LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES PRIMA
OPERA MATHEMATICA
VOLUMEN SEPTIMUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXIII

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ALGEBRAICAE

AD THEORIAM COMBINATIONUM ET PROBABILITATUM PERTINENTES

EDIDIT

LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXIII

PREFACE DE L'EDITEUR

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION

§ 1. La productivité d'EULER. Classification des mémoires de ce volume.

II. LES RECREATIONS MATHEMATIQUES

§ 2. Les ponts de Königsberg, mémoire 53 (de *l'Index d'ENESTRÖM*). § 3. Le problème du saut du cavalier, mém. 309. § 4. Le jeu de Joseph ou de saint Pierre, mém. 476. § 5. Un problème de permutation, mém. 738 et extrait de H_6. § 6. Notice historique sur les carrés magiques. § 7. Extrait de H_1 et mém. 795. § 8. Relations entre le problème des carrés magiques et le saut du cavalier. Pandiagonalité. § 9. Le problème des 36 officiers. Carrés latins. Carrés eulériens; mém. 530.

III. LE CALCUL DES PROBABILITES

§ 10. Notice historique sur la loterie génoise. § 11. Théorie mathématique de la loterie génoise, mém. 812. § 12. Les séquences dans la loterie génoise, mém. 338. § 13. Loterie génoise et coefficients binomiaux, mém. 600 et mém. 813. § 14. Le jeu de rencontre, mém. 201. § 15. Le jeu de Pharaon, mém. 313. § 16. Les loteries à plusieurs classes, mém. 412. § 17. Le problème de Saint-Pétersbourg, mém. 811. § 18. Le problème de la durée du jeu, extrait de H_4. § 19. Autres jeux touchés par EULER dans ses carnets mathématiques.

IV. LA THEORIE DES ERREURS D'OBSERVATION

§ 20. Le mémoire de DANIEL BERNOULLI (1778) et le mém. 488. § 21. SIMPSON, LAGRANGE et le mém. 628.

V. LA STATISTIQUE MATHEMATIQUE

§ 22. Les notations internationales. § 23. Recherches générales sur la mortalité. Conversion d'un capital en rente viagère, mém. 334. § 24. EULER et SÜSSMILCH, leur apologétique chrétienne. Le chap. VIII de *l'Ordre divin*. § 25. Extrait de H_6. Le premier essai de représenter une série statistique par une fonction mathématique.

VI. LES ASSURANCES SUR LA VIE HUMAINE

§ 26. Calcul de rentes viagères immédiates et de rentes différées, mém. 335. § 27. Calcul de la rente de survie unilatérale, $a_{x|y}$ et $P_{xy}(a_{x|y})$; première apparition de la méthode universelle d'EULER, mém. 403. § 28. Calcul d'une assurance en cas de décès reposant sur un couple de deux têtes jointes, $A_{\overline{xy}}$ et $P_{\overline{xy}}$, mém. 599. § 29. D'un établissement public pour payer des pensions à des veuves, première partie du mém. 473; son rapport avec le mém. 403. § 30. Les «Caisses du franc au décès»; calcul de l'assurance simple au décès, A_x et P_x; la réserve de sûreté; deuxième partie du mém. 473. § 31. Les tontines perpétuelles d'EULER, troisième partie du mém. 473. Fragment inédit exposant une autre sorte de tontine perpétuelle. § 32. Résumé succinct.

I. INTRODUCTION

§ 1. Les vingt-huit mémoires que contient le présent tome 7 de la première série des *Oeuvres complètes de Léonard Euler* ont été rédigés entre 1735 et 1781, tandisque leur publication se répartit, très inégalement d'ailleurs, sur presque deux siècles, de 1741 à 1923. Cela tient en grande partie à la productivité d'EULER. Elle était si intense que bien souvent le célèbre mathématicien eut de la peine à trouver un éditeur pour ses livres et des revues où publier ses écrits. Aussi sont-ils dispersés dans de nombreux recueils. Il est naturel que les Académies des sciences de Berlin et de Saint-Pétersbourg, dont EULER fut le directeur le plus illustre, en aient la part du lion. Ces circonstances se reflètent dans les vingt-huit travaux qui nous occupent. De ceux-ci, en effet, sept ornent les Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin; six, dont l'un a pour auteur DANIEL BERNOULLI, ont paru dans les publications périodiques de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, un dans Neues hamburgisches Magazin et un dans les Verhandelingen de la Société des sciences de Flessingue; six se trouvent dans des recueils de travaux EULÉRIENS: *Opuscula analytica, Commentationes arithmeticae, Opera postuma;* l'un forme un livre à lui seul, Saint-Pétersbourg 1776; un autre se trouve dans un ouvrage où on ne le chercherait guère: dans *L'Ordre divin* de l'ecclésiastique JEAN-PIERRE SÜSSMILCH.[1]) Enfin, des cinq derniers publiés ici pour la première fois, quatre sont extraits des Adversaria mathematica, c'est à dire des carnets

1) *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben* erwiesen von JOHANN PETER SÜSSMILCH, Königl. Preuss. Oberconsistorialrath, Probst in Cölln, und Mitglied der Königl. Academie der Wissenschaften. Zwote und ganz umgearbeitete Ausgabe. Erster Theil, Berlin 1761. Zweyter Theil, nebst dreyfachem Anhange und Register über beyde Theile. Berlin 1762. Im Verlag des Buchladens der Realschule.

mathématiques que, d'après Monsieur ENESTRÖM[1]), on désigne par H_1, H_2, H_3, . . . H_9. L'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg les fit parvenir à Zurich avec les autres manuscrits EULÉRIENS conservés dans ses archives, les mettant obligeamment à la disposition de la *Commission Euler* de la Société helvétique des sciences naturelles.

De ces 28 travaux, quatorze, et parmi eux les plus importants, sont écrits en français, douze en latin et deux en allemand.

La liste des travaux d'EULER dressée par Monsieur ENESTRÖM comprend 866 numéros, sans parler d'une volumineuse correspondance. Quand on cherche à se faire une idée de la rapidité avec laquelle EULER a dû produire ses livres et articles, on comprend que des fautes diverses aient pu se glisser dans leur rédaction. Cela ne porte pas atteinte à la grandeur de son génie, mais ne dispense point l'éditeur de corriger ces fautes dont beaucoup, d'ailleurs, ne sont pas imputables à EULER lui-même. Voir à ce sujet la préface du volume I_2 édité par Monsieur RUDIO.

En ce qui concerne les matières traitées dans ces vingt-huit mémoires, elles se répartissent en cinq domaines distincts.

1) *Les récréations mathématiques,* représentées par huit travaux, les numéros 53, 309, 476, 530, 738 et 795 de *l'Index d'Eneström* et deux notes extraites des carnets mathématiques d'EULER.

2) *Le calcul des probabilités*, représenté par neuf travaux, les numéros 201, 313, 338, 412, 600, 811, 812 et 813 de *l'Index d'Eneström* et une note extraite des carnets mathématiques.

3) *La théorie des erreurs d'observation*, représentée par trois travaux, les numéros 488 et 628 de *l'Index d'Eneström* et un travail de DANIEL BERNOULLI, auquel le mémoire 488 se rapporte directement et dont la connaissance est indispensable pour bien suivre les raisonnements d'EULER.

4) *La statistique mathématique,* représentée par trois travaux: 1) Le mémoire 334 auquel est jointe la table de mortalité de WILLEM KERSSEBOOM. 2) Un travail paru dans l'ouvrage (déjà cité) de JEAN-PIERRE SÜSSMILCH: *L'ordre divin dans les variations du genre humain* . . ., travail qui ne paraît pas avoir été publié séparément sous le nom d'EULER. Il ne figure pas non plus dans *l'Index d'Eneström.* 3) Une note de la main d'EULER, extraite de ses carnets mathématiques, *Sur la multiplication du genre humain.*

---

1) Voir G. ENESTRÖM, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie,* Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 22, 1913, Zweite Abteilung, p. 191—205. Voir § 19 de cette préface.

5) *Les bases mathématiques des assurances sur la vie humaine*, représentées par cinq travaux. Ce sont les numéros 335, 403, 473, 599 de *l'Index d'Eneström* et le fragment inédit qui termine ce volume.

Passons en revue ces divers écrits.

II. LES RECREATIONS MATHEMATIQUES

§ 2. Ce sont presque toujours des occasions spéciales qui ont amené Euler à s'occuper de ces sujets. Le mémoire 53, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, qui ouvre le volume, fut présenté le 26 août 1735 à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, mais publié seulement en 1741. Euler y résout le fameux problème des ponts de Königsberg. Un piéton peut-il diriger sa promenade de manière à traverser chacun des sept ponts, mais chacun seulement une fois? Euler en prouve l'impossibilité, puis termine le mémoire par la démonstration de ce curieux théorème valable quels que soient les ramifications du fleuve, le nombre des îlots, le nombre et la position des ponts: s'il y a plus de deux régions dans lesquelles on peut pénétrer par un nombre impair de ponts, un chemin répondant aux conditions du problème n'existe pas. S'il y a au plus deux régions dans lesquelles on peut pénétrer par un nombre impair de ponts, un tel chemin existe, à condition que le point de départ soit pris dans l'une de ces régions-là. Enfin, il y a toujours une solution, où que se trouve le point de départ, lorsque la distribution des ponts et des îles est telle que c'est toujours par un nombre pair de ponts que chaque région est reliée à ses voisines. Il y aurait donc toujours une solution, si les conditions du problème exigeaient que chaque pont fût traversé deux fois, et deux fois seulement.

Une traduction française de ce mémoire Eulérien, due à E. Coupy, a paru dans les Nouvelles Annales de mathématiques **10**, 1851, p. 106—119, sous le titre *Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation,* et une autre traduction française se trouve en manuscrit dans la bibliothèque de l'observatoire astronomique d'Uccle près Bruxelles. On trouvera une analyse du mémoire Eulérien dans les Nova Acta eruditorum, Lipsiae 1751, p. 593—594. Il fut réimprimé dans les Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, editio nova, Bononiae 1752, p. 116—126 plus une table.

§ 3. Le mémoire 309, *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse,* fut, d'après C. G. J. Jacobi, présenté à l'Académie des sciences de Berlin le 2 mars 1758 et publié dans ses Mémoires en 1766, dans le tome pour l'année 1759.[1]) Ce

1) Sur l'ordre de succession des tomes des Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, voir la note 2 p. XXVIII.

mémoire est consacré au problème du saut du cavalier sur l'échiquier. Il s'agit de parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, en commençant par une case donnée et sans parvenir jamais deux fois à la même. EULER s'est également occupé de ce problème dans sa correspondance avec CHRISTIAN GOLDBACH[1]) (1690—1764) et LOUIS BERTRAND de Genève (1731—1812). Ce problème, qui remonte sans doute au temps où le jeu des échecs lui-même fut inventé, provient d'un autre où il s'agit d'abattre successivement, avec le même cavalier, les 32 figures du jeu des échecs réunies sur une moitié de l'échiquier.[2]) Quoi qu'il en soit, la première apparition de ce problème dans la littérature est sur un parchemin (no. 10287) de la bibliothèque nationale de Paris, de la première moitié du 14ième siècle. D'après ce manuscrit, un cavalier bat successivement les 31 autres figures supposées réunies dans la moitié inférieure de l'échiquier, en parcourant les cases dans l'ordre où elles sont numérotées dans la figure ci-dessous

1	22	9	26	3	30	11	32
16	19	2	23	10	25	4	29
21	8	17	14	27	6	31	12
18	15	20	7	24	13	28	5

Il était naturel de généraliser la question au cas de l'échiquier entier. Dès le commencement du 18ième siècle, le problème du saut du cavalier semble se répandre[3]) et l'on cite et reproduit souvent les solutions données par PIERRE REYMOND DE MONTMORT (1678—1719), ABRAHAM DE MOIVRE (1667—1754) et JEAN-JACQUES D'ORTOUS DE MAIRAN (1678—1771). Mais ce n'est que chez EULER que l'on trouve le commencement d'une théorie de ce problème.

EULER distingue deux sortes de routes: 1) celles où le cavalier, après avoir parcouru toutes les cases, peut sauter de la dernière à la première; elles rentrent donc en elles-mêmes (*routes fermées*); elles permettent de résoudre le problème en commençant par n'importe quelle case donnée d'avance; 2) les routes qui ne sont pas rentrantes en elles-mêmes et

1) Voir la lettre du 26 avril 1757 publiée par P.-H. FUSS dans la *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle,* 1, St.-Pétersbourg 1843, p. 654—655.

2) Voir A. VAN DER LINDE, *Geschichte und Literatur des Schachspiels,* Berlin 1874, 1, p. 101. Cet auteur estime à mille ans à peu près l'âge du jeu des échecs.

3) Voir J. OZANAM (1640—1717), *Récréations mathématiques et physiques*, Paris 1694; édition de 1725, p. 260.

qui, par conséquent, ne sont valables que pour une case initiale déterminée (*routes ouvertes*). EULER indique une méthode pour trouver des routes ouvertes, puis un procédé permettant de découvrir plusieurs routes fermées lorsqu'on en connaît une qui ne jouit pas de cette propriété. Il expose ensuite une méthode pour découvrir des routes encore plus curieuses. Par exemple, l'échiquier étant partagé en deux parties égales par une parallèle à l'un des côtés, arranger la route de manière que le cavalier parcoure la première moitié entièrement avant de pénétrer dans la seconde, ou encore: de façon que la route soit symétrique par rapport au centre de l'échiquier. Puis EULER considère des carrés où le nombre des cases, n^2, est différent de 64. Pour $n = 2$, 3 ou 4, il n'y a point de solution. Le premier carré que le cavalier puisse parcourir est donc celui de 25 cases, et dans ce cas, il faut ou commencer ou finir par une case angulaire. Pour n impair, il n'existe pas de route fermée. Enfin, EULER généralise le problème à des échiquiers rectangulaires ou en forme de croix.

Le mémoire EULÉRIEN fut réimprimé en 1849, avec une orthographe adaptée au temps, dans les Commentationes arithmeticae, t. 1, p. 337—355. On en trouvera un extrait dans The journal of science and the arts, **3**, London 1817, p. 72—77, sous le titre: *An account of EULERS method of solving a problem, relative to the move of the knight at the game of chess.*

Le problème du saut du cavalier a donné lieu à de très nombreuses publications.[1]) D'intéressantes recherches ont pour objet *les diagrammes* du saut du cavalier, c'est à dire les lignes brisées ou les polygones qu'on obtient en joignant par des segments de droite les centres des cases successivement parcourues.[2]) Les solutions où les chiffres qui indiquent l'ordre de succession des cases se trouvent arrangés de façon à donner pour chaque ligne et pour chaque colonne une somme constante, qui est

$$\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{64} n = 260$$

dans le cas de l'échiquier ordinaire, constituent la catégorie des sauts de cavalier *magiques*. On en connaît 242 différents, les uns ouverts, les autres fermés. En voici un exemple.

1) On trouvera de nombreuses références bibliographiques dans l'ouvrage de W. AHRENS, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, 2. Aufl., **1**, Leipzig und Berlin 1910, Kap. XI.

2) Voir A. CRÉTAINE, *Etudes sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs*, Paris 1865, avec 25 tables; voir aussi les recherches de TH. PARMENTIER, Association française pour l'avancement des Sciences, **20** (Congrès de Marseille) 1891, **21** (Pau) 1892, **23** (Caen) 1894 (Publication spéciale).

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Les carrés en question ne sont eux-mêmes que *semi-magiques*, puisque les 8 cases de chacune des deux diagonales ne donnent pas la même somme 260. Je reviendrai ci-dessous à la connexion entre le problème de la marche cavalière et celui des carrés magiques.

Vandermonde[1]) (1735—1796) a le premier généralisé le problème à l'espace, imaginant un „échiquier à trois dimensions" où les cases sont n^3 petits cubes que le cavalier parcourt toujours d'après la même règle. Vandermonde a donné une solution pour le cas le plus simple possible qui est celui de $n = 4$.[2]) Enfin, on a généralisé encore la question en admettant que le saut du cavalier, au lieu d'avoir les composantes (2; 1) comme dans le jeu des échecs, ait les composantes (2; 3) ou (2; 5) etc., ou en général $(a; b)$. On voit de suite que la condition de parcourir toutes les cases ne peut être remplie que si la somme $a + b$ des composantes est un nombre impair; sinon, le cavalier ne parcourt que des cases de même couleur. Quant au nombre des solutions possibles pour un échiquier de n^2 cases, il augmente très rapidement avec n, suivant une loi encore inconnue. Il est énorme, quelques centaines de millions, dans le cas de l'échiquier ordinaire.[3])

---

1) Ch.-A. Vandermonde, *Remarques sur les problèmes de situation*, Histoire de l'Académie des sciences pour l'année 1771, Paris 1774, p. 566—575.

2) Des solutions pour un échiquier tridimensionnel de 5^3, 6^3, 7^3 et 8^3 cases ont été données par A. H. Frost, *On the Knight's Path*, Quarterly Journal of Math. **14**, 1877, p. 123—125; ibid. p. 354—359.

3) Voir l'ouvrage déjà cité de W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, 2. Aufl., 1, Leipzig und Berlin 1910, Kap. XI.

§ 4. Le mémoire 476, *Observationes circa novum et singulare serierum genus*, présenté, d'après les actes, le 4 juillet 1771 à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, publié en 1776, est consacré à l'étude d'une nouvelle et singulière espèce de séries qu' EULER découvrit en cherchant la théorie mathématique du „jeu de Joseph", appelé aussi „jeu de saint Pierre". Saint Pierre était une fois sur un bateau avec 15 chrétiens et 15 payens. Survint une tempête si effroyable que le capitaine déclara tout perdu, à moins que la moitié de l'équipage ne fût jetée à la mer. Qui sacrifier? Saint Pierre proposa de procéder comme suit: les 30 hommes étant postés en rond, l'officier les dénombre en comptant toujours de 1 à 9, et c'est chaque fois le neuvième homme qui est jeté à la mer. Saint Pierre plaça les 30 hommes très habilement dans l'ordre suivant: 4 chrétiens, 5 payens, 2 c., 1 p., 3 c., 1 p., 1 c., 2 p., 2 c., 3 p., 1 c., 2 p., 2 c., 1 p.; et le résultat en fut que le sort tomba précisément sur les 15 payens. La solution de ce problème est contenue dans le vers mnémotechnique:

Populeam virgam mater regina tenebat,

ou dans ceux-ci:

Mort, tu ne falliras pas
En me livrant le trépas,

où l'on doit faire abstraction des consonnes et où les voyelles a, e, i, o, u représentent les nombres 1, 2, 3, 4, 5 respectivement.

Si des 30 hommes susmentionnés, un seul doit subir la peine, savoir celui qui restera finalement, quand on aura éliminé les 29 autres de la manière ci-dessus décrite (chaque fois le neuvième), il importe de savoir déterminer à l'avance le numéro fatal où finira ce dénombrement par neuvaines. Dans le cas particulier, c'est à l'homme qui occupait le 21$^{\text{ième}}$ rang dans l'ordre primitif. C'est de ce deuxième problème que vient le nom de „jeu de Joseph". La légende raconte en effet de l'historien juif FLAVIUS JOSEPHUS, mort vers l'an 95 de l'ère chrétienne, que, lors de la prise de sa ville par les Romains, il se réfugia avec 40 autres Israëlites dans une cave. Plutôt que de tomber aux mains des Romains, ils décidèrent de se donner mutuellement la mort, malgré les conseils de JOSEPH. Alors celui-ci, pour sauver sa vie, proposa de procéder comme ci-dessus indiqué, le neuvième homme étant chaque fois tué par les survivants. JOSEPH resta finalement seul.

L'étude de cette question et de ses généralisations fournit les séries dont il s'agit. Au lieu de 30, prenez un nombre entier x quelconque et au lieu du 9$^{\text{ième}}$, éliminez chaque fois le $n^{\text{ième}}$; vous obtiendrez alors les suites envisagées dans ce mémoire. EULER étudie «la série des rejetés» dans divers cas particuliers et en indique de curieuses propriétés. Pour n et x entiers positifs quelconques, on ne connaît pas de méthode générale permettant de déterminer le numéro final par le calcul.

§ 5. Dans le mémoire 738, *Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum,* présenté à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg le 18 octobre 1779, mais publié seulement en 1811, EULER résout le problème suivant: étant donnés n objets quelconques placés dans un ordre déterminé, par exemple n lettres $a, b, c, d, \ldots,$ trouver de combien de manières différentes on peut intervertir leur ordre de telle façon qu'aucun des dits objets ne garde la place qu'il occupait dans l'arrangement primitif. Désignant par $\Pi(n)$ le nombre de ces permutations spéciales, on voit immédiatement que $\Pi(1) = 0$, $\Pi(2) = 1$, $\Pi(3) = 2$, et l'on vérifie que $\Pi(4) = 9$, $\Pi(5) = 44$, $\Pi(6) = 265$ etc.

EULER déduit la formule de récurrence

$$\Pi(n+1) = n\,\{\Pi(n) + \Pi(n-1)\}$$

et démontre qu'elle est équivalente à cette autre

$$\Pi(n) = n \cdot \Pi(n-1) + (-1)^n.$$

Un complément de ces recherches, publié pour la première fois dans ce volume p. 542—545, s'est trouvé dans le carnet mathématique H_6. EULER y résout le problème suivant: ayant assigné à chacun des n objets donnés une place déterminée, trouver de combien de manières différentes on peut les permuter de façon qu' oubien aucun ne reste en place, ou qu'un seul ou 2 seulement ou 3 seulement ou 4 seulement etc., de ces objets, gardent la place qu'ils occupaient dans l'arrangement initial. Le nombre des objets qui doivent rester en place étant $n - \lambda$, EULER trouve pour le nombre des permutations encore possibles la formule

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-\lambda+1)\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \cdots + \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\right)$$

et l'applique aux cas particuliers de $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ avec les diverses valeurs possibles de λ. L'analogie de cette formule avec celle que trouve EULER dans le mémoire 201 montre la connexion qu'il y a entre ce problème de permutation et le calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre.

§ 6. A l'étude des carrés magiques, EULER a consacré deux mémoires et de nombreuses pages de ses carnets mathématiques. Si l'on réussit à placer, dans les n^2 cases d'un carré disposées comme sur un damier, n^2 nombres entiers, dits *les éléments* du carré, de telle façon que la somme en soit la même dans chacune des n lignes, des n colonnes et des deux diagonales du carré, on a construit «un carré magique de n.» La somme constante est dite *la constante magique* ou *la constante du carré.* On ne connaît pas l'origine de ce genre de spéculations. Les carrés magiques trouvés en Chine et dans les Indes remontent à une époque qu'il est difficile de déterminer. En Occident, les premiers écrits

relatifs aux carrés magiques se trouvent chez les Arabes, au neuvième siècle de notre ère.[1]) C'est probablement aux Arabes, peut-être déjà aux Israëlites, qu'il faut faire remonter l'usage de ces carrés en astrologie et comme talismans, usage qui leur a valu le nom de *magiques.* Au 16ième et surtout au 17ième siècle, on rencontre en grand nombre des carrés magiques sur des amulettes. Ils ont joué un rôle important dans les sciences occultes.

Il n'existe pas de carré magique de 2. Le carré magique le plus simple possible est donc celui de 3. Sa constante magique est 15, comme le montre l'exemple ci-dessous.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

On convient d'envisager ce carré comme équivalent aux 7 autres carrés magiques que l'on peut en déduire en le faisant tourner, autour de son centre, d'un ou de deux ou de trois angles droits, et en regardant de bas en haut chacun de ces quatre carrés. C'est dans ce sens que l'on peut dire: «il n'y a qu'un seul carré magique de 3». On étend la même convention aux carrés magiques de n. Il existe 880 carrés magiques de 4 essentiellement différents.[2]) Le plus ancien se trouve sur une gravure d'ALBRECHT DÜRER (1471—1528) intitulée *Me-*

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

lancolia, burinée en 1514, et cette date est formée par les quatre chiffres du milieu de la dernière

1) Le premier traité sur ce sujet est attribué au mathématicien arabe TÂBIT BEN KORRAH, mort en 901. Voir l'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, édition française rédigée sous la direction de JULES MOLK, t. I, vol. 3, fasc. 1, Paris et Leipzig 1906, p. 63, note 349. Voir aussi H. SUTER, *Abhandl. zur Gesch. d. Math.* 12 (1900), p. 36, 93, 136, 139, 146, 218.

2) Ils ont tous été donnés par B. FRÉNICLE DE BESSY, *Table générale des quarrez magiques de quatre,* publiée (après la mort de FRÉNICLE) par PH. DE LA HIRE, Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des sciences, Paris 1693, p. 484. Nouvelle édition dans les Mémoires de l'Académie des sciences 1666—1699, t. V, Paris 1729, p. 303. Voir aussi les lettres de FRÉNICLE DE BESSY et de FERMAT à MERSENNE, de 1640. *Oeuvres de FERMAT* 2, Paris 1894, p. 182—199.

ligne. On voit en effet sur cette gravure, parmi toutes sortes d'objets et d'êtres allégoriques, le carré ci-dessus.[1])

Le nombre des carrés magiques de n augmente très rapidement avec n, suivant une loi inconnue. On n'a pas même encore déterminé leur nombre pour $n > 4$.

§ 7. Dans le travail *De quadratis magicis* qui s'est trouvé dans le premier de ses carnets mathématiques, travail rédigé probablement en 1726 et publié pour la première fois dans ce volume, p. 535—539, EULER enseigne à former, à l'aide des termes d'une progression arithmétique de raison donnée $= r$, le carré magique dont la constante soit un nombre b également donné d'avance, puis à construire un carré magique dont on prescrit la constante magique $= b$ et l'élément le plus petit $= a$. Généralisant ces «carrés à progression arithmétique», on a étudié les carrés magiques à nombres triangulaires[2]), ou à nombres non consécutifs quelconques[3]), en particulier les carrés magiques dont les éléments sont tous des nombres premiers.[4])

Le mémoire 795, *De quadratis magicis,* fut présenté à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg le 17 octobre 1776, mais publié seulement en 1849 dans les Commentationes arithmeticae, puis réimprimé en 1862 dans les Opera postuma. Le manuscrit qui est de la main de GOLOWIN a été examiné pour la présente réimpression du mémoire, ce qui a motivé quelques légères modifications au texte de l'édition originale. EULER y donne des règles nouvelles pour construire des carrés magiques, à l'aide de lettres latines et grecques auxquelles sont attribuées des valeurs en progression arithmétique. Comme ce travail a été rédigé en 1776 et le mémoire suivant, *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques* (no. 530 de *l'Index d'ENESTRÖM*), en 1779, il est probable qu'on doive voir dans cette idée des lettres grecques et latines, élaborée en 1776, le germe de la notion de carré latin et du mémoire 530.

§ 8. Il y a une connexion remarquable entre le problème des carrés magiques et le saut du cavalier. Déjà MANUEL MOSCHOPOULOS, qui vivait vers l'an 1300[5]), indique la

1) Sur la gravure de DURER se trouve par erreur à la place du chiffre 9 le chiffre 2 pour la seconde fois, et dans le titre, *Melencolia*, un *e* au lieu d'un *a*.

2) Voir V. COCCOZ, *Carrés magiques à nombres triangulaires*, Association française pour l'avancement des sciences, **15** (Nancy) 1886, II, p. 130; **21** (Pau) 1892, II, p. 147; id. *Carrés magiques à nombres non consécutifs*, ibid. **23** (Caen) 1894, II, p 163.

3) P. DE LAFITTE, *Le carré magique de 3,* Paris 1904.

4) A. GÉRARDIN, dans Sphinx-Oedipe, Nancy 1920, p. 167, Questions 727 et 736; ibid. 1921, p. 170—171.

5) P. TANNERY a publié *Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques*, avec traduction en français, dans l'Annuaire de l'Association pour l'encouragement des études

a *b*

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

c *d*

méthode suivante permettant de construire immédiatement un carré magique de n, du moins lorsque n est impair. 1) Mettre le nombre 1 dans la case du milieu de la première ligne du carré; 2) faire un saut de cavalier, par exemple 2 pas vers le bas et 1 vers la droite, et placer le nombre suivant, 2, dans la case ainsi obtenue; 3) continuer à placer de la même façon, par la marche cavalière, les nombres successifs; 4) quand on arrive ainsi à une case déjà occupée, il faut supprimer pour une fois le saut du cavalier et placer le nombre suivant (dans l'exemple ci-dessus, ce nombre suivant est 8 ou 15 ou 22 ou 29 etc.) quatre cases plus bas que celle qu'on vient de remplir; puis 5) continuer à nouveau et toujours par le même saut de cavalier; 6) dès que le cavalier sortirait ainsi du carré, on l'y fait rentrer par l'extrémité opposée de la même ligne ou colonne. Pour $n = 7$, on obtient par exemple le carré magique ci-dessus, dont la constante magique est

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7^2 + 1) = 7 \cdot 25 = 175.$$

On peut aussi envisager le carré magique de 3 (voir § 7) comme formé par cette méthode.

Ce carré magique de 7 est plus que magique, il est *panmagique*[1]) ou *pandiagonal*[2])

---

grecques, **20**, 1886, p. 88—118. Voir aussi P. Tannery, Bulletin des sc. math. et astronom. (2) **8**, 1884, I, p. 263—277, et S. Günther, *Vermischte Untersuch. zur Gesch. d. math. Wiss.*, Leipzig 1876.

1) Nom dû à G. Tarry, *Carrés panmagiques de base 3n*, Association française pour l'avancment des sciences **32** (Angers) 1903, II, p. 130. Voir aussi Revue scientif. (4) **20** (40ième année), Paris 1903, p. 373.

2) Dénomination due à E. Mac Clintock. Voir *On the most perfect forms of magic squares with methods for their production*, American Journ. of Math. **19**, 1897, p. 99. Plusieurs autres dénominations ont été proposées. En France, on appelle ces carrés généralement *carrés diaboliques*, d'après Ed. Lucas, *Récréations mathématiques* **1**, Paris 1882, préface p. XVII.

ou *diabolique*, c'est à dire qu'on trouve la constante magique 175 non seulement dans chacune des 7 lignes, des 7 colonnes et des 2 diagonales principales ad et bc, mais aussi dans chaque *diagonale brisée*, c'est à dire dans les 12 files parallèles aux diagonales ad ou bc. Par exemple

$$(32 + 17 + 2 + 36 + 28) + (13 + 47)$$

donne aussi 175.

Euler a considéré des carrés pandiagonaux dans le mémoire 530, et c'est pourquoi j'introduis cette notion ici. Les carrés pandiagonaux constituent un type remarquable de carrés magiques soumis à des conditions supplémentaires: ils restent magiques lorsqu'on les partage d'une manière quelconque en deux rectangles, égaux ou inégaux, par une parallèle à l'un des côtés et que l'on transpose ensuite les deux rectangles. Cette opération transforme une diagonale brisée en diagonale principale et réciproquement. Si l'on imagine la figure ci-dessus découpée et enroulée sur un cylindre de manière que les bords ac et bd soient réunis, on aura un *cylindre magique*. Enfin, ce cylindre étant recourbé de manière que les bords ab et cd coïncident à leur tour, on obtiendra un *tore magique*, et la différence entre diagonale brisée et diagonale principale aura disparu entièrement.

Quand n est un nombre impair non divisible par 3, la méthode du saut du cavalier permet de remplir le carré ou le tore magiques quelle que soit la case initiale; mais si n est impair et divisible par 3, on ne peut arriver à un carré magique par cette méthode qu'en commençant par certaines cases, par exemple celle indiquée par Moschopoulos, et dans ce cas le carré cesse en général d'être pandiagonal, tout en restant magique. Il n'y a pas de carré magique pandiagonal de 3, il en existe 48 de 4. En général, si $\frac{n}{2}$ est un nombre impair, il n'y a pas de carré magique pandiagonal de n.[1])

On appelle *carré magique aux deux premiers degrés* un carré magique qui reste magique, quand on remplace chaque élément par son carré.[2]) Aucun carré magique de 3

1) E. Mac Clintock, American Journ. of Math. **19**, 1897, p. 110.

2) En France, on les désigne généralement sous le nom de *carrés sataniques*. Voir Ed. Lucas, *Récréations mathématiques* **4**, Paris 1894, p. 226. M. Frolov, *Égalités à deux degrés*, Bulletin de la Soc. math de France, **17**, 1888/89, p. 69—83. V. Coccoz, Association française pour l'avancement des sciences **21** (Pau) 1892, II, p. 136; **22** (Besançon) 1893, II, p. **171**; **23** (Caen) 1894, II, p. 176; **24** (Bordeaux) 1895, II, p. 102; **31** (Montauban) 1902, II, p. 137. Voir aussi B. Portier, *Le carré diabolique de 9 et son dérivé, le carré satanique de 9 etc.*; Alger 1895; 2e. éd., Paris 1902. A. Rilly, *Etude sur les triangles et les carrés magiques aux deux premiers degrés*. Troyes 1907.

On a envisagé encore bien d'autres types particuliers de carrés magiques et aussi de nombreuses généralisations de ces carrés. «La terminologie est, à cet égard, aussi variée que pittoresque», dit M. Maillet dans son article cité à la note suivante.

ni de 4 n'est magique au deuxième degré, mais on en a construit de 8, de 9, de 10, de 14, de 16. (Voir aussi le mémoiré 407, vol. 1_6, p. 287.)

Ajoutons que, dès le 17ième siècle, on a cherché à étendre les règles de formation des carrés magiques à d'autres figures que le carré. On a construit des rectangles magiques, des cercles magiques, des cubes magiques envisagés déjà par FERMAT, des parallélipipèdes magiques, des sphères magiques, des étoiles magiques etc. Les carrés magiques ont reçu des applications dans divers domaines et donné lieu à toute une littérature spéciale.[1])

§ 9. Le mémoire 530, *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques*, lu, d'après les actes, le 8 mars 1779 à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, fut publié en 1782 dans les Mémoires de la Société des sciences de Flessingue dont EULER était membre depuis 1775. En 1849, on en fit une réimpression dans les Commentationes arithmeticae. C'est une reproduction littérale du mémoire de Flessingue, sauf l'orthographe modernisée. Parmi les documents envoyés à Zurich par l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg se trouve un manuscrit qui n'est pas de la main d'EULER, mais qui paraît être une première rédaction du mémoire 530. En tout cas, le mémoire de Flessingue suit ce manuscrit fidèlement, presque toujours phrase après phrase, mais exprime souvent les idées en d'autres termes. En voici un exemple: Les deux derniers alinéas de la page 391 du présent volume sont rédigés comme suit dans le manuscrit en question: «Mais je dois avouer que j'ai trouvé cette propriété par pure induction, et je ne vois pas encore comme on pourroit la deduire de la nature de la serie. Cependant, il y a un moyen d'approcher d'avantage de la verité de l'assertion que

$$Q = nP - \frac{P \pm 1}{n}.$$

Multiplions cette valeur, regardée un instant comme variable, par n; il y aura

$$nQ = (nn-1)P \pm 1,$$

oubien en mettant pour plus de généralité une lettre indeterminée f au lieu de l'unité, soit, quelque valeur qu'ait la lettre f, véritablement

$$nQ = (nn-1)P \pm f.»$$

Ici, le manuscrit se termine brusquement. La fin du mémoire 530 est donc une adjonction faite plus tard. Dans la présente réimpression, je m'en suis tenu presque partout à

1) Voir l'article de E. MAILLET, *Figures magiques*, dans l'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, édition française t. I, vol. 3, fasc. 1, Paris et Leipzig 1906, p. 62—75; W. AHRENS, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, 2. Aufl. 2, Leipzig und Berlin 1918, Kap. XII, *Magische Quadrate*, p. 1—54; ED. LUCAS, *Récréations mathématiques*, 4, Paris 1894.

l'édition de Flessingue, qui représente en général une rédaction revue et améliorée du dit manuscrit. [1])

Le point de départ du mémoire 530 est le fameux problème des 36 officiers, de 6 grades différents et appartenant à 6 régiments différents. Il s'agit de les ranger en un carré de 6 lignes parallèles, chacune à 6 officiers, mais de telle manière que ni le même grade ni le même régiment ne soient représentés deux fois sur une même ligne ou colonne. «Or», dit EULER, «après toutes les peines qu'on s'est données pour resoudre ce probléme, on a été obligé de reconnoître, qu'un tel arrangement est absolument impossible, *quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse.*» Pour traiter le cas général où n^2 officiers, de n grades différents et appartenant à n régiments différents, doivent être répartis en un carré de n^2 cases, conformément à l'énoncé ci-dessus, EULER introduit les notions nouvelles de *formule directrice* et de *carré latin*, désignés sous ce nom par EULER parcequ'il se servait de lettres latines pour les former. Ce terme a acquis droit de cité en Mathématiques. On appelle *carre latin* un carré de n^2 cases construit avec n éléments seulement, disposés dans les n^2 cases de façon qu'aucun de ces n éléments ne figure deux fois dans une même ligne ou colonne, mais que chacun figure dans chacune. On rencontre des carrés latins dans la théorie des substitutions. [2]) EULER parvient à la solution de son problème général pour n^2 officiers en combinant des carrés latins, à l'aide de ses «formules directrices», pour en former ce qu'on appelle aujourd'hui des *carrés eulériens.*

---

1) L'édition originale aussi bien que le manuscrit susmentionné qui lui a servi de base, portent à plusieurs reprises $Q = nP - \frac{P \pm 1}{n}$ au lieu de $Q = nP + \frac{-P \pm 1}{n}$ qui est seul exact. De même page 96 du présent volume (mém. 334, § 26), l'édition originale a $1 - \frac{\alpha - n\beta}{N}$ etc. au lieu de $1 + \frac{-\alpha - n\beta}{n}$ etc. Voir *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 6, p. 58, note 1.

2) Voir W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, Cambridge 1897, p. 20 et p. 49. E. MAILLET a tenté un essai d'une théorie générale des carrés latins et des carrés magiques basée sur la théorie des substitutions entre n lettres. Voir *Sur une application de la théorie des groupes de substitutions à celle des carrés magiques.* Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse (9) **6**, 1894, p. 258—280; *Sur les carrés latins d'EULER*, Association française pour l'avancement des sciences **23** (Caen) I, 1894, p. 101—102; II, 1895, p. 244—252. *Application de la théorie des substitutions à celle des carrés magiques,* Quarterly Journ. of Math. **27**, 1895, p. 132—144.

Le problème fondamental de la théorie des carrés latins consiste à déterminer le nombre de carrés latins que l'on peut former avec n éléments. Ce problème qui se rattache à la théorie des groupes n'est pas encore résolu. Voir à ce sujet les travaux de P. A. MAC MAHON, *A new method in Combinatory Analysis, with application to Latin Squares and associated questions,* Transactions of the Cambridge Philos. Soc. **16**, 1898, p. 262—290; *Combinatorical Analysis. The foundations of a new theory*, Philos. Transactions R. Soc. of London, series A, vol. **194**, 1900, p. 361—386.

On appelle *carré eulérien de n* tout tableau carré dont les n^2 éléments (k, m) sont formés de deux indices k et m (EULER appelle le premier l'indice latin et le second l'indice grec), choisis tous deux parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, mais de telle façon que dans chaque ligne et dans chaque colonne du carré ne figure jamais deux fois le même indice latin ni deux fois le même indice grec. Ces carrés peuvent donc être envisagés comme une généralisation des carrés latins. Chaque carré eulérien de n fournit une solution du problème des n^2 officiers. Il n'y a pas de carré eulérien de 2; il y en a un seul de 3,

$$\begin{matrix} (2, 1) & (3, 3) & (1, 2) \\ (1, 3) & (2, 2) & (3, 1) \\ (3, 2) & (1, 1) & (2, 3) \end{matrix}$$

si l'on convient d'envisager comme équivalents ceux qu'on en déduit par rotation, par symétrie et par l'intervertion des indices grecs et latins. EULER démontre l'existence de solutions dans le cas où n est un nombre impair ou un multiple de 4. Il énonce la proposition que si $n = 6$ et en général $= 4k + 2$, le problème n'admet aucune solution. Mais EULER reconnaît que «c'est là une induction hardie». L'impossibilité d'une solution du problème des 36 officiers n'a été démontrée qu'au commencement du vingtième siècle.[1])

Dans le mémoire 530 se trouve aussi une étude des carrés eulériens diagonaux et pandiagonaux. Dans un carré *diagonal,* ni le même indice latin k ni le même indice grec m ne doivent figurer deux fois dans une des deux diagonales. De tels carrés ont été envisagés par GAUSS.[2]) Pour qu'un carré eulérien soit *pandiagonal,* ni le même indice latin ni le même indice grec ne doivent figurer deux fois dans une des deux diagonales principales ni dans l'une quelconque des diagonales brisées, pas plus que dans aucune ligne ou colonne. Les carrés eulériens pandiagonaux, diagonaux et simples sont donc dans la même dépendance que les carrés pandiagonaux (ou diaboliques), carrés magiques et carrés semi-

1) Par G. TARRY, puis par J. PETERSEN. Voir G. TARRY, *Les permutations carrées de base 6.* Mém. soc. sc. Liège (3) **2**, 1900, mémoire no. 7 = Mathesis (2) **10**, juillet 1900, suppl. p. 23—30; *Le problème des 36 officiers,* Association française pour l'avancement des sciences **29**, Paris 1900, I, p. 122—123; II, Paris 1901, p. 170—203. L'Intermédiaire des mathématiciens **7**, 1900, p. 14—16; **12**, 1905, p. 174. J. PETERSEN, *Les 36 officiers*, Annuaire des mathématiciens 1901/2, publié par C.-A. LAISANT et A. BUHL, Paris 1902, p. 413—427.

Pour le cas général où $n \equiv 2 \pmod{4}$, la démonstration donnée par M. P. WERNICKE, *Das Problem der 36 Offiziere,* Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **19**, 1910, p. 264—267, a été mise en défaut par M. HARRIS F. MAC NEISH, ibid. **30**, 1921, p. 151—153.

2) Voir *Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und H. C. SCHUMACHER,* herausg. von C. A. F PETERS, **4**, Altona 1862, p. 63, lettre écrite en 1842. GAUSS a d'ailleurs exprimé également la conviction que le problème des 36 officiers n'admet point de solution.

magiques. EULER démontre qu'il n'y a pas de carré eulérien diagonal de 3. Il construit deux carrés eulériens diagonaux de 4 essentiellement différents et démontre l'impossibilité de carrés eulériens pandiagonaux de n, quand n est divisible par 2 ou par 3.

De tout carré eulérien diagonal de n, on peut déduire un carré magique de n, par exemple en y remplaçant chaque élément (k, m) par la valeur $(k-1)n+m$. Et si le carré eulérien était pandiagonal de n, la même règle permet d'en déduire un carré magique pandiagonal. Mais l'inverse n'a pas nécessairement lieu; il existe des carrés magiques dont on ne peut pas déduire des carrés eulériens, par exemple les carrés magiques de 6.

A la fin du mémoire 530, EULER s'occupe du nombre des solutions. Ce nombre augmente très rapidement avec n. «Le parfait dénombrement de tous les cas possibles de variations semblables seroit un objet digne de l'attention des Géomètres, d'autant plus que tous les principes connus dans la doctrine des combinaisons n'y sçauroient préter le moindre secours», dit EULER. Il fait lui-même le premier pas vers la solution, en établissant deux formules de récurrence qu'il ramène l'une à l'autre.

III. LE CALCUL DES PROBABILITES

§ 10. Vers le milieu de sa vie, EULER consacra une partie de son universelle attention à l'étude de la théorie des hasards et de ses applications. En outre, EULER s'est occasionnellement occupé, dans sa correspondance, de questions relatives au calcul des probabilités. C'est ainsi qu'il a rédigé deux expertises sous forme de lettres adressées au roi de Prusse Frédéric II, la première en 1749 sur une loterie d'Etat dite Loterie génoise que préconisait alors un Italien nommé ROCCOLINI, la seconde en 1763 sur le projet d'un Hollandais nommé VAN GRIETHAUSEN.[1]) Cette lettre de 1749 est le plus ancien écrit d'EULER sur les loteries.[2])

A ce propos, disons un mot de la fameuse *Loterie génoise* ou *Lotto des nombres*, appelée aussi «Giuoco del Seminario». LAPLACE, on ne sait trop pourquoi, l'appelle «Loterie de l'École militaire».[3]) Cette loterie a inspiré quatre mémoires d'EULER et quelques pages

1) On trouve ces lettres imprimées pour la première fois dans les Opera postuma, t. 1, St.-Pétersbourg 1862, p. 550—552 (réponse à la lettre royale du 15 septembre 1749), et p. 553—554 (réponse à la lettre royale du 17 août 1763). Voir *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III.

2) Voir la note 3, p. 101.

3) P.-S. DE LAPLACE (1749—1827), *Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris (Savants étrangers), t. VI, 1774, p. 365; *Oeuvres complètes de LAPLACE*, t. 8, Paris 1891, p. 16.

de son carnet mathématique H_5, écrit probablement de 1748 à 1750. Le berceau de cette loterie est sans doute la ville de Gênes, où depuis des temps très reculés on pratiquait les jeux de hasard. Le fait historique qui lui a donné naissance semble être la coutume de faire décider par le sort qui aurait l'honneur d'être Conseiller. Parmi les 100 candidats, tous sénateurs, on tirait chaque année au sort pour désigner les 5 qui occuperaient la plus haute charge. La population de la ville se mit à parier sur qui le sort tomberait. Lorsque ce genre de paris devint général, des banques privées, et plus tard le Gouvernement, organisèrent ces jeux et en tirèrent grand profit. Bientôt, les noms des candidats étaient remplacés par des numéros. Au lieu de 100, on en mit 90, et voilà «la loterie génoise». Elle consiste donc à tirer 5 billets d'une urne qui en contient 90, marqués des nombres 1, 2, 3, 4, . . . 90. On dit que le Conseiller Benedetto Gentile est l'inventeur de cette loterie et qu'en 1620 elle fut pratiquée pour la première fois officiellement. L'Etat chercha à donner à ces tirages une certaine pompe en les faisant coïncider avec des cérémonies religieuses. Il semble cependant que le peuple de Gênes ait jugé a sa juste valeur ce jeu aux conséquences funestes, puisque la légende raconte que Satan, en guise de remerciements pour services rendus, fit au Conseiller Benedetto Gentile l'honneur de venir personnellement le chercher.

Malgré les lumières de la raison, la participation à ces paris n'a cessé d'être vive. Déjà au 16ième siècle, des jeux de hasard furent interdits «comme étant immoraux et causant la ruine de nombreuses familles». Le Lotto aux 90 numéros fut prohibé à réitérées fois. Mais la République de Gênes, se trouvant à court d'argent, accorda elle-même à un entrepreneur, contre bonne redevance, la concession d'exploiter ce jeu (1643), et cet exemple fut suivi dans bon nombre d'autres villes italiennes. Même le Saint-Siège qui, d'abord, avait banni cette loterie par les édits les plus sévères, se vit entraîné, par les doctrines du mercantilisme alors en vogue, à établir une loterie génoise dans ses propres Etats. D'Italie, le Lotto des nombres prit le chemin du reste de l'Europe, en une marche rapide et triomphale; il fut introduit en 1751 à Vienne, en 1757 à Paris, en 1763 à Berlin par Frédéric le Grand qui, au préalable, avait chargé Euler d'étudier la question au point de vue mathématique. En 1771 par exemple, 26 villes allemandes exploitaient ce jeu de hasard. Après avoir constaté son influence néfaste à presque tous les points de vue, les Etats eurent mille peines à s'en débarrasser. Ce n'est qu'en 1861 que la dernière loterie génoise disparut d'Allemagne et au moment où éclata la guerre mondiale, l'Autriche et l'Italie, malgré de louables efforts, n'avaient pas encore réussi à extirper les pernicieux effets de cette institution officielle.

§ 11. Le mémoire 812, *Réflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée Loterie génoise*, qui d'après Jacobi fut lu à l'Académie de Berlin le 10 mars 1763, mais publié

seulement un siècle plus tard, en 1862, dans les Opera postuma, contient une description et une théorie mathématique détaillées de cette loterie. Pour la présente réimpression de ce mémoire, j'ai pu utiliser le manuscrit de Saint-Pétersbourg. J'ai constaté que P.-H. VON FUSS (1798—1855), l'éditeur des Opera postuma, a très pieusement reproduit le manuscrit d'EULER, même parfois des fautes de calcul. Je les ai naturellement éliminées; mais à part cela, je ne me suis écarté du manuscrit, pour suivre l'édition originale publiée par FUSS, que là où elle constitue une réelle amélioration du texte du manuscrit.[1])

EULER désigne par n le nombre des billets contenus dans l'urne, numérotés de 1 à n, et suppose qu'on en tire t au hasard. Il sait donner aux formules qu'il déduit une élégance remarquable. Spécialisant ensuite les résultats trouvés: 1) au cas où $n = 90$ et $t = 5$, ce qui correspond à la loterie génoise historique, puis 2) au cas où $n = 100$ et $t = 9$, EULER calcule les probabilités de tous les cas qui peuvent advenir, puis dresse trois plans complets «selon la loi d'égalité», puis trois plans arrangés de telle sorte que, selon le calcul des probabilités, l'entrepreneur en tirera un profit fixé d'avance. La cause directe de ce mémoire doit évidemment être cherchée dans l'expertise que le roi de Prusse demandait à EULER précisément en 1763, au moment de l'introduction officielle de la loterie génoise à Berlin. Et l'Italien auquel EULER fait allusion dans la première phrase du mémoire 812 est le même ROCCOLINI dont il avait examiné le plan en 1749, à la demande de FRÉDÉRIC II.

§ 12. Le mémoire 338, *Sur la probabilité des sequences dans la Loterie génoise*, rédigé en 1767, fut publié la même année dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin. Pour la présente réimpression de ce travail, j'ai utilisé le manuscrit eulérien, d'où quelques modifications de détail au texte de l'édition originale. EULER y traite le difficile problème des séquences. On nomme ainsi le fait que 2 ou 3 ou 4 parmi les 5 nombres qu'on tire de l'urne, ou que tous les 5, se suivent dans l'ordre naturel. Par exemple, si l'on sort les numéros 19, 20, 21, 40, 41, dans un ordre de succession quelconque, il y a *une séquence de trois* qui est 19, 20, 21, et trois *séquences de deux* qui sont 19, 20; 20, 21; 40, 41. Par des inductions merveilleuses que le raisonnement vient ensuite

1) Voici les principaux germanismes éliminés déjà par FUSS. 1) Au problème 4, p. 473 de ce volume, le manuscrit porte: *Des nombres A, B, C, il se trouvent, dans les billets tirés, tous les 3, 2 seulement, un seul, nul.* C'est manifestement la traduction trop littérale de l'allemand „Es finden sich . . .", et j'ai écrit le singulier: . . . *il se trouve, dans les billets* . . . 2) A la page 470: . . *Qu'aucun ne s'y trouve, la probabilité est . . .;* le manuscrit porte: *qu'aucun ne s'y trouve pas, la probabilité est* . . . 3) A la page 479, j'ai écrit avec FUSS: *ce qui nous mène aux recherches suivantes,* alors que le manuscrit porte: *ce qui nous mène à des recherches suivantes*, traduction trop littérale de l'expression allemande „zu folgenden Resultaten".

corroborer, EULER résout ce problème général: le nombre des billets marqués des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ... étant quelconque $= n$; si l'on en tire m billets au hasard, déterminer toutes les probabilités qui peuvent avoir lieu à l'égard des séquences. Ici de nouveau, EULER découvre des liens inattendus entre ce problème et la théorie des nombres, notamment avec le nombre des décompositions possibles d'un nombre entier donné en une somme de nombres entiers plus petits que lui.[1])

§ 13. Dans le mémoire 600, *Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium,* qui d'après les actes fut présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 8 octobre 1781 et publié en 1785 dans les Opuscula analytica, EULER s'occupe encore de la loterie génoise. Après chaque tirage, on remet dans l'urne les 5 numéros que l'on en a sortis. Quelle est la probabilité que, après une série de s tirages, tous les numéros de 1 à 90 soient sortis sans exception, ou au moins 89 d'entre eux ou au moins 88 etc. Remplaçant les nombres 90 et 5 par m et i, EULER découvre des relations remarquables entre ces nombres entiers, en utilisant un symbole spécial pour représenter les coëfficients binomiaux. Déjà dans ses lettres au marquis DE CONDORCET (1743—1794), des années 1775 et 1776, et dans son mémoire 575 rédigé en 1776 (publié seulement en 1784), EULER avait vu la grande utilité qu'il y a à désigner par un symbole spécial les fractions de la forme

$$\frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

que l'on désigne aujourd'hui généralement par $\binom{b}{n}$. EULER les représente par $\left(\frac{b}{n}\right)$ dans quatre mémoires et par $\left[\frac{b}{n}\right]$ dans celui qui nous occupe. Le Comité de rédaction a décidé de remplacer les crochets par des parenthèses rondes.[2])

Le mémoire 813, *Analyse d'un problème du calcul des probabilités,* dont on ignore l'époque de rédaction, fut publié en 1862 dans les Opera postuma. Pour la présente réimpression de ce travail, j'ai utilisé le manuscrit de Saint-Pétersbourg, ce qui a motivé quelques légers changements au texte de l'édition originale. Ce mémoire est également inspiré par

---

1) EULER renvoie à ses recherches antérieures sur la décomposition additive des nombres entiers. Il s'agit principalement des deux mémoires suivants: 1) Mém. 158, *Observationes analyticae variae de combinationibus,* Comment. acad. sc. Petrop. **13** (1741/43), 1751, p. 64—93; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 2, p. 163—193. 2) Mém. 191, *De partitione numerorum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. **3** (1750/51), 1753, p. 125—169; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2, p. 254—294. L'éditeur du tome I_2, Monsieur RUDIO, a donné un excellent résumé de ces deux mémoires dans sa préface, p. XVIII—XX. Voir aussi la note p. 149 du présent volume.

2) Voir la note au bas de la page 409 du présent volume et la note 1 p. XXXVIII.

la loterie génoise. Il se rapporte à des tirages faits d'une urne qui contient N billets marqués des numéros 1, 2, 3, ... N, dont on tire p au hasard. Les ayant remis dans l'urne et bien mêlés avec les autres, on opère un nouveau tirage de p billets et ainsi de suite, à q reprises successives. EULER détermine la probabilité que le billet marqué a, où a est l'un des nombres 1, 2, 3, ... N, ne soit jamais tiré, ou ne soit tiré qu'une seule fois ou deux fois ou trois fois etc., ou enfin qu'il sorte à chacun des q tirages. Dans la seconde partie du mémoire, EULER traite le problème difficile que voici. Quand des N billets on en aura tiré p, et cela à q reprises successives, il est certain qu'au moins $N-qp$ billets ne seront pas sortis. Mais il est possible qu'un même billet soit tiré plus d'une fois et qu'ainsi le nombre des numéros non sortis soit $N-qp+1$ ou $N-qp+2$ ou $N-qp+3$ etc., ou même $N-p$, si l'on attrape par hasard les mêmes billets dans les q tirages. Par une induction merveilleuse, sans d'ailleurs donner la démonstration complète de ses résultats, EULER arrive à déterminer la probabilité de ces différents cas, à l'aide d'une identité remarquable.

La variété et la difficulté des problèmes mathématiques qu'EULER sut voir dans la loterie génoise sont si grandes que, depuis lors, l'intérêt des géomètres leur est resté acquis.

§ 14. Dans cinq autres travaux encore, on voit l'illustre géomètre traiter des questions difficiles se rapportant aux jeux de hasard. D'après C. G. J. JACOBI, un mémoire intitulé *Calcul des probabilités dans les jeux de hasard* fut présenté à l'Académie de Berlin le 8 mars 1753. C'est probablement le mémoire 201: *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre,* publié en 1753. Une analyse en parut dans les Nova Acta eruditorum, Leipzig 1754, p. 179. EULER y suppose deux personnes, A et B, ayant chacune en main un entier jeu de cartes. Elles en tirent, simultanément chaque fois, une carte après l'autre jusqu'à ce que les deux personnes sortent la même carte. On dit alors qu'*il y a rencontre.* Le joueur A parie que cela se produira; si une telle rencontre n'arrive point, c'est B qui gagnera. Pour généraliser, EULER remplace les n cartes par des billets numérotés 1, 2, 3, 4, ... n et démontre que la probabilité de gain pour A est égale à

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-+\cdot\quad\cdot+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\cdot$$

Il en résulte que le rapport des probabilités est à peu près comme 12 est à 7, plus exactement comme 1720 est à 1001. Sur 19 parties jouées, 12 feront donc probablement gagner A.

Quand le nombre des cartes augmente audelà de toute limite, il s'introduit, chose remarquable, le nombre $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$, base des logarithmes naturels; la probabilité qu'il n'y aura pas rencontre est $\frac{1}{e}\cdot$

Dans son carnet mathématique H_5, écrit de 1748 à 1750, EULER a rédigé sur le même problème une note en latin, où il arrive naturellement au même résultat. Elle contient en plus deux développements remarquables en fraction continue, développements qu'EULER avait déjà déduits en 1737.[1])

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

et

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\text{etc.}}}}}}}$$

A signaler encore la connexion entre ce problème du jeu de rencontre et celui des permutations spéciales traité ci-dessus au § 5.

§ 15. D'après JACOBI, le mémoire 313, *Sur l'avantage du Banquier au jeu de Pharaon,* fut présenté le 27 février 1755 à l'Académie des sciences de Berlin, et un second mémoire portant le même titre y fut présenté le 20 juillet 1758. On ignore s'il s'agit du même travail ou de deux travaux différents. La publication[2]) eut lieu en 1766. EULER, après avoir déterminé les probabilités dont dépend l'avantage du Banquier, condense les résultats numériques en un grand tableau dont il déduit quelques règles pratiques pour les Pontes. «Un prudent Ponte», conclut-il, «peut toujours faire en sorte que l'avantage du Banquier

1) Voir le mémoire 71 (de *l'Index d'ENESTRÖM*): *De fractionibus continuis,* Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, p. 98—137, § 21 et 22; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 14. La fraction continue donnant $\frac{e-1}{2}$ se trouve aussi dans l'*Introductio in analysin infinitorum,* Lausannae 1748, t. I, cap. 18, § 381; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 8, p. 388.

2) Il est très curieux que le tome 20 des Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin ait paru en 1766, alors que le tome 16 ne parut qu'en 1767. Explication: Les 13 pre-

surpasse à peine un pour cent». La fin de ce mémoire est remarquable: EULER y utilise le calcul intégral pour arriver à la sommation de certaines séries de la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\nu-1}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{n-2\lambda-1}.$$

Cet artifice, dont il a fréquemment fait usage avec le plus grand succès, est devenu une véritable méthode d'investigation et a donné une célèbre formule de sommation.[1]) Je rappelle qu'en 1741 pour la première fois[2]), EULER avait eu recours aux ressources du calcul infinitésimal pour la solution de questions relatives à la théorie des nombres, et l'on sait quelle moisson abondante fut le fruit de cette union de deux domaines qui semblent si disparates: celui du continu où règne l'analyse mathématique supérieure, et celui du discontinu où règne le nombre entier.

§ 16. Le mémoire 412, *Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités*, fut d'après JACOBI présenté le 29 novembre 1770 à l'Académie des sciences de Berlin, qui le publia en 1771. L'idée en avait été suggérée à EULER par l'expertise qu'il fit en 1763, à la demande du roi FRÉDÉRIC II, du plan de la loterie du Hollandais

miers tomes des dits Mémoires avaient paru régulièrement chaque année, savoir

le tome 1 (pour l'année 1745) parut en 1746,
le tome 2 (pour l'année 1746) parut en 1747,
. . . .
le tome 13 (pour l'année 1757) parut en 1759.

Puis aucun tome ne parut plus pendant cinq ans. Le tome 14 (pour l'année 1758) fut publié en 1765 et le tome 15 (pour l'année 1759) en 1766 seulement. C'est alors qu'on décida, plutôt que d'attendre jusqu'à ce que le tome 16 (pour l'année 1760) fût entièrement préparé, de procéder de suite à la publication du volume qui était à ce moment déjà prêt pour l'impression et dont, en outre, le contenu présentait un intérêt plus actuel; c'était le tome 20 (pour l'année 1764) qui parut ainsi en 1766. Pendant les trois années suivantes, on publia deux tomes par an:

le tome 21 (pour l'année 1765) et le tome 16 (pour l'année 1760) en 1767;
„ „ 22 („ „ 1766) „ „ „ 17 („ „ 1761) en 1768;
„ „ 23 („ „ 1767) „ „ „ 18 („ „ 1762) en 1769.

Par le tome 19 (pour l'année 1763), qui parut en 1770, le raccordement fut enfin opéré.

1) Voir la formule sommatoire d'EULER, par exemple dans ses *Institutiones calculi differentialis*, Partis posterioris cap. V, § 130; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 328.

2) Voir le mémoire 158, *Observationes analyticae variae de combinationibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 13 (1741/43), 1751, p. 64—93; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2, p. 163.

DE GRIETHOUSE [1]), car il s'agit de nouveau d'une loterie composée de k classes où chaque billet doit passer par toutes les classes et où l'entrepreneur s'engage à payer, outre les prix attribués aux gagnants, un ducat pour tout billet qui aurait passé par toutes les classes sans rien gagner. Cela entraîne pour l'entrepreneur une dépense supplémentaire dont il s'agit d'évaluer le montant le plus probable. Par deux méthodes différentes, dont l'une consiste à faire le dénombrement minutieux de tous les cas possibles et entraîne par conséquent des calculs extrêmement longs, EULER arrive au résultat que la dépense supplémentaire en question doit être estimée à

$$m\left(\frac{m}{m+p}\right)^{k-1}$$

où k = nombre des classes de la loterie, p = nombre des prix dans chaque classe et m = nombre des billets «blancs» dans chacune, de sorte que $p+m$ est le nombre de tous les billets d'une classe. Dans le cas de la loterie DE GRIETHOUSE où $k=5$, $p=8000$ et $m=42000$, chacune des 5 classes comprenant 50000 billets, la dépense supplémentaire, qui peut varier entre 42000 et 10000, doit être estimée à $42000\cdot\left(\frac{42}{50}\right)^4 = 20910{,}6$; son montant probable est toujours plus près de la limite inférieure que de la limite supérieure.

Dans son expertise de 1763, EULER ne semble pas encore être arrivé à la très simple formule ci-dessus. Il s'est occupé de ce problème dans son carnet mathématique H_7, écrit de 1759—1760, p. 2—6. [2]) EULER y attaque le problème par une troisième méthode, en traitant d'abord le cas où $(k-1)p=1$, ce qui donne $k=2$, $p=1$, m quelconque; puis les cas où $(k-1)p=2$ (2 possibilités); $(k-1)p=3$ (2 possibilités); $(k-1)p=4$ (3 possibilités, k pouvant prendre les valeurs 2, 3, ou 5); puis $(k-1)p=5$, d'où 2 possibilités; le nombre m des billets blancs est toujours quelconque. Mais comme EULER, arrêté peut-être par les complications de plus en plus grandes, n'a pas résolu le problème par cette méthode, je n'ai pas jugé utile de reproduire ces développements.

§ 17. Le mémoire 811, *Vera aestimatio sortis in ludis*, dont l'époque de rédaction est inconnue, fut publié en 1862 dans les Opera postuma. Pour la présente réimpression de ce travail, j'ai utilisé le manuscrit de Saint-Pétersbourg, ce qui a motivé quelques légers changements au texte de l'édition originale publiée par FUSS. Ce mémoire se rapporte à l'un des problèmes les plus célèbres dans les annales du calcul des probabilités, dit *problème de Saint-Pétersbourg*. Il a ceci de particulier que la durée du jeu est illimitée, ce qui entraîne le fait que l'espérance mathématique de l'un des joueurs est représentée par

1) Voir la note 1 p. XXIII.

2) Les premières pages sont rédigées en français, les autres en latin, ce qui n'est pas très rare chez EULER. Voir le fragment qui termine le présent volume.

une série infinie. Des problèmes de ce genre furent posés pour la première fois par NICOLAS BERNOULLI dans une lettre qu'il écrivit le 9 septembre 1713 à PIERRE REYMOND DE MONTMORT.[1] Quand cette série infinie est convergente, ce qui était le cas pour la plupart des problèmes proposés par N. BERNOULLI, il n'y a pas de raison pour ne pas accepter le résultat du calcul. Mais l'un de ces problèmes conduit à une série divergente, de sorte que, d'après la règle classique, la mise de celui qui accepterait ce jeu devrait être infinie, alors que d'après le bon sens commun «son espérance ne vaut pas même vingt écus». C'est ce paradoxe qui a attiré l'attention des mathématiciens et des philosophes.

Il s'agit du problème suivant: le joueur A promet de donner 1 écu à B si, avec un dé ordinaire, il amène au premier coup un nombre pair de points, 2 écus s'il amène le nombre pair de points au second coup, 4 écus s'il l'amène au $3^{\text{ième}}$ coup, 8 s'il l'amène au $4^{\text{ième}}$ coup et ainsi de suite, 2^{n-1} écus s'il amène le nombre pair de points au $n^{\text{ième}}$ coup seulement. Quelle mise le joueur B devrait-il payer équitablement en échange de ces engagements de A, *la durée du jeu étant illimitée?* La règle classique donne comme réponse:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 8+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}+\cdots=\infty.$$

Les nombreux essais que l'on a faits pour résoudre ce paradoxe n'ont pas été sans importance pour le développement de la théorie des probabilités. DANIEL BERNOULLI a le premier traité ce problème à fond, et cela dans les Commentarii de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg[2]), d'où le nom de «problème de Saint-Pétersbourg». Il est devenu fameux par les discussions mathématiques, philosophiques et métaphysiques auxquelles il donna lieu aussi bien que par les noms illustres de ceux qui prirent part à ces joûtes, depuis 1713 jusqu'à nos jours.

Voici l'idée nouvelle qu'EULER apporte dans la discussion. En mettant dans la balance la mise d'une part, les chances de gain ou de perte d'autre part, on doit aussi tenir compte de la fortune du joueur, car personne ne dispose de moyens infinis. Pour évaluer leur augmentation ou diminution, on doit admettre qu'ils varient non en progression arithmétique, mais en progression géométrique. Par conséquent, il faut envisager non la différence, mais le rapport des dits moyens avant et après la partie jouée. EULER déduit de ces prémisses une règle nouvelle permettant de mettre en équation des problèmes où inter-

---

1) Voir la note 1 p. 459—461 du présent volume.

2) DANIEL BERNOULLI, *Specimen theoriae novae de mensura sortis,* Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/31), 1738, p. 175—192. Traduction allemande par A. PRINGSHEIM, Leipzig 1896. C'est à propos de ce problème que DANIEL BERNOULLI a introduit une notion nouvelle et féconde en définissant *l'espérance morale,* pour juger des gains ou des pertes qui dépendent d'évènements fortuits.

viennent des probabilités mathématiques. Dans le cas où l'on suppose infinie la fortune des joueurs, cette règle conduit au même résultat que la règle classique de l'espérance mathématique.

§ 18. Dans son carnet mathématique H_4 dont les pages 186 et 187 sont publiées pour la première fois dans le présent volume, EULER traite un problème qui a fait mettre en oeuvre toutes les ressources de l'analyse mathématique supérieure. C'est le problème dit «de la durée du jeu». Son origine remonte à HUYGENS, et les plus grands géomètres y ont essayé la puissance de leurs méthodes, depuis les BERNOULLI, MONTMORT, MOIVRE, LAGRANGE, jusqu'à LAPLACE qui s'en est occupé à réitérées fois. Le joueur A possède a pièces de monnaie ou jetons, le joueur B en possède b; leurs chances respectives de gagner une partie sont entre elles comme n est à m; après chaque partie jouée, le perdant donne un jeton à son partenaire vainqueur. On demande la probabilité que l'un des joueurs gagne ainsi tous les jetons de son partenaire, en s parties ou en moins de s parties. EULER résout le problème moins difficile de déterminer la probabilité pour A de gagner tous les jetons de son adversaire, sans égard au nombre des parties. Elle est

$$p = \frac{n^b (m^a - n^a)}{m^{a+b} - n^{a+b}};$$

pour B, elle est $= 1 - p$. Dans le même carnet H_4, EULER a repris ce problème et recherché la probabilité que le jeu se termine en s parties; mais il n'a pas poussé ses recherches jusqu'au résultat final, raison pour laquelle je n'ai pas reproduit ici ses développements.

§ 19. EULER a traité encore un grand nombre d'autres problèmes relatifs au calcul des probabilités, dans ses *Adversaria mathematica* qu'il écrivait au jour le jour, sur les sujets les plus divers. Ces carnets mathématiques, importants pour l'histoire du développement de la pensée d'EULER, sont rédigés tantôt en latin, tantôt en français ou en allemand. Voici les principaux passages qui se rapportent au calcul des probabilités proprement dit et dont il n'est pas fait mention ailleurs.

Dans le carnet H_3 (537 pages écrites de 1736 à 1739): probabilités de tirer 0 ou 1 ou 2 ou 3 etc. cartes gagnantes, quand on tire au hasard n cartes d'un paquet de m cartes dont k sont gagnantes.

Dans le carnet H_4 (520 pages écrites de 1740 à 1748), EULER traite le *jeu de la Poule*. Trois personnes, A, B et C, dont les probabilités de gagner une partie sont entre elles comme a, b et c, jouent à la poule pour une mise $= 1$, c'est à dire: A et B font une première partie à la suite de laquelle le perdant se retire et cède sa place à C. Il en

est de même après chaque partie: le perdant se retire pour céder sa place au troisième joueur. Celui qui gagne deux parties consécutives gagne la mise. Déterminer l'espérance mathématique de chacun. EULER étend le problème au cas de n joueurs. — Dans le même carnet: détermination de probabilités dans le cas où l'on jette m dés à n faces chacun.

Dans le carnet H_5 (353 pages écrites de 1748 à 1750), application de la théorie de la loterie génoise «au *jeu des Taraux* où il y a 78 cartes». EULER a repris la théorie de ce jeu dans le carnet H_6.

Dans le carnet H_6 (516 pages écrites de 1750 à 1755) se trouve un traité mathématique presque complet du *jeu de L'Hombre,* repris par EULER à réitérées fois, avec de nombreux développements de formules. Puis «Sur le *jeu du Mariage* où il y a 32 chartes».

Dans le carnet H_9, quelques résultats donnés sans démonstration, relatifs à des probabilités dans certains tirages d'urnes.

Des méthodes essentiellement nouvelles ne sont pas mises en oeuvre dans ces notes. Comme la plupart de ces problèmes ont été traités également par plusieurs autres géomètres des dix-huitième et dix-neuvième siècles, surtout par MOIVRE et LAPLACE, dont les ouvrages sont facilement accessibles, une publication *in extenso* de toutes ces notes des *Adversaria mathematica* dans le présent volume n'a pas été jugée nécessaire.

IV. LA THEORIE DES ERREURS D'OBSERVATION

§ 20. La théorie des erreurs n'est pas non plus restée étrangère à l'universalité du génie d'EULER. Avant lui, tout le monde n'admettait pas qu'il fût préférable de réunir plusieurs observations contradictoires et d'en tirer une moyenne, plutôt que de se contenter d'une observation unique faite avec d'autant plus de soins. Par son prestige, EULER a contribué dans une large mesure à faire triompher le point de vue moderne: plus il y a d'observations, mieux cela vaut, pourvu qu'on sache les ajuster. Un mémoire publié par DANIEL BERNOULLI en 1778 dans les Acta de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, intitulé *Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda,* fournit à EULER l'occasion de s'occuper de ce sujet. C'est en effet à ce travail de DANIEL BERNOULLI que se rapporte le mémoire 488 d'EULER, *Observationes in praecedentem dissertationem illustris* BERNOULLI. Il fut présenté le 5 décembre 1776 à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg et imprimé en 1778 à la suite du travail susdit de DANIEL BERNOULLI.

BERNOULLI critique la méthode habituelle consistant à prendre, comme valeur la plus probable de la grandeur inconnue, la moyenne arithmétique entre les résultats fournis par

plusieurs observations; car, dit il, cette moyenne arithmétique attribue la même probabilité aux écarts, quelque grands qu'ils soient, alors qu'il est manifeste que des écarts très considérables sont beaucoup moins probables que de petits écarts, quand toutes les observations sont faites avec le même soin. Donc, conclut BERNOULLI, la moyenne arithmétique n'est pas la valeur la plus probable de l'inconnue; pour la déterminer, il faut attribuer à tout écart x une certaine probabilité $y = p(x)$ dépendant de la grandeur de l'erreur; en d'autres termes: il faut admettre une «loi des erreurs». Elle doit satisfaire, selon BERNOULLI, à cinq conditions. Parmi l'infinité de courbes qui y satisfont, BERNOULLI choisit une demi-circonférence qu'il appelle *circulus moderator*, d'équation $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, où le rayon r est une constante à déterminer par expérience dans chaque cas particulier. Son centre, qui détermine la valeur la plus probable de l'inconnue, doit être situé de manière que l'ensemble de toutes les observations, et par conséquent des écarts qu'elles entraînent, soit plus probable qu'il ne le serait pour toute autre position du centre, ou que le produit

$$Q(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x - a_1)^2} \cdot \sqrt{r^2 - (x - a_2)^2} \cdots \sqrt{r^2 - (x - a_n)^2}$$

soit maximal; on trouvera donc x en cherchant le maximum de $Q(x)$. Quand il y a n observations, cela conduit à une équation du degré $2n - 1$; cette équation donne la moyenne arithmétique, comme valeur la plus probable de la grandeur inconnue, seulement dans le cas où $n = 2$. EULER fait ressortir ce qu'il y a d'hypothétique dans ce procédé de BERNOULLI, puis développe une méthode beaucoup plus simple pour résoudre le problème. La détermination de x n'y dépend plus que d'une équation du troisième degré. EULER montre même comment, dans bien des cas, on peut la réduire au second degré, puis applique la théorie des fractions continues pour trouver la valeur la plus probable, x, par approximations successives.

§ 21. Le premier qui ait envisagé une erreur d'observation comme un évènement fortuit et dont la probabilité dépend de la grandeur de l'erreur est THOMAS SIMPSON, dans une section de ses *Miscellaneous Tracts* de 1757.[1] Seize ans plus tard LAGRANGE, indépendamment de SIMPSON, reprenait ces problèmes, dans un mémoire qui a fait époque et que l'on considère ordinairement comme le premier travail dans le domaine de la théorie des erreurs.[2] Dans les 8 premiers problèmes de ce mémoire, LAGRANGE s'occupe des cas

1) T. SIMPSON (1710—1761), *On some curious and very interesting subjects in Mechanics, physical Astronomy and speculative Mathematics*, London 1757. La section dont il s'agit ici est intitulée *An Attempt to show the advantage arising by taking the Mean of a number of observations, in practical Astronomy.*

2) J.-L. LAGRANGE (1736—1813), *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette*

où il y a un nombre fini n d'erreurs distinctes; dans les 2 derniers problèmes, passant au cas qui se présente effectivement dans la nature, où le nombre des possibilités d'erreurs comprises entre certaines limites est infini, LAGRANGE introduit la notion de «probabilité d'une erreur». C'est à la première partie de ce travail fondamental de LAGRANGE que se rapporte le mémoire 628 d'EULER, intitulé *Eclaircissemens sur le mémoire de Mr. DE LA GRANGE, inséré dans le Ve. volume des Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, etc.* Présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 27 novembre 1777, il ne fut publié par elle qu'en 1788, cinq ans après la mort d'EULER. Notre mathématicien se borne à développer en détail quelques cas simples pour lesquels je renvoie le lecteur au *Résumé* qui précède le dit mémoire, p. 425—426 du présent volume.

V. LA STATISTIQUE MATHEMATIQUE

§ 22. Un mouvement général tendant à introduire le calcul des probabilités dans les domaines les plus divers prit naissance dans la première moitié du 18ième siècle. EULER, entré à son tour dans la lice entre BERNOULLI et LAPLACE, montra sa grande aptitude pour ce genre de recherches par huit travaux, dont plusieurs font époque dans les annales de la science actuarielle. On se rend mieux compte des progrès qu'il a réalisés, si l'on fait usage d'une notation uniforme permettant la comparaison facile des formules eulériennes. C'est pourquoi je vais rappeler ici quelques notations universellement adoptées depuis le congrès international des actuaires tenu à Paris en 1900. On a des *symboles principaux* et des *symboles accessoires* servant à préciser la signification du symbole principal conformément à certaines *règles*. J'utiliserai dans la suite les dix symboles principaux suivants: a, a, A, d, i, l, p, P, q, v. La lettre d indiquera toujours un nombre de décès, l toujours un nombre de vivants, p une probabilité de vie, q une probabilité de décès et P le montant d'une prime ou cotisation. La lettre a désignera toujours la valeur actuelle d'une rente de montant 1 et payable en *début* de période, la lettre a la valeur actuelle de l'unité de rente payable en *fin* de période. La majuscule A désignera la valeur actuelle de l'unité de capital échéant après le décès d'une ou de plusieurs personnes nommées dans le contrat d'assurance. Enfin, i représentera l'intérêt que rapporte l'unité de capital pendant l'unité de temps, et $v = \frac{1}{1+i}$ le *facteur d'escompte;* par exemple au taux de 5% par an, on a

$$i = 0{,}05 \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{1{,}05} = \frac{20}{21}.$$

---

méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière, Mélanges de philosophie et de mathématiques de la société royale de Turin 5, 1770—1773, p. 167—232. *Oeuvres de LAGRANGE,* publiées par J.-A. SERRET, t. II, Paris 1868, p. 171—234.

Première règle: Une lettre ou un chiffre placés au bas et à droite d'un symbole principal indiquent *un âge.* Exemples: l_x = nombre des vivants d'âge x; $\mathbf{a}_x$ = valeur actuelle d'une rente viagère de montant 1, payable au commencement de chaque année aussi longtemps que vivra une personne déterminée actuellement d'âge x; A_x = valeur actuelle de l'unité de capital exigible à la fin de l'année contenant le moment du décès d'une personne actuellement d'âge x.

Deuxième règle: Une lettre ou un chiffre placés au bas et à gauche d'un symbole principal indiquent *une durée.* Exemples: ${}_nq_x$ = probabilité qu'une personne actuellement d'âge x (règle 1) meure avant d'atteindre l'âge $x+n$;

$${}_1p_0, \quad {}_2p_0, \quad {}_3p_0, \quad \cdots \quad {}_rp_0$$

représentent les probabilités pour un nouveau-né d'arriver à l'âge d'un an, de deux ans, de trois ans, ... de r ans au moins. On écrit, pour abréger, p_x, q_x, d_x au lieu de ${}_1p_x$, ${}_1q_x$, ${}_1d_x$.

Troisième règle: Si une lettre ou un chiffre sont suivis à leur droite d'une barre verticale, ils marquent *le temps du différé,* c'est à dire qu'ils indiquent pendant combien d'années doit être différée la chose exprimée par le symbole principal. Exemples: ${}_{65-x|}\mathbf{a}_x$ représente la valeur actuelle d'une rente viagère de montant 1, mais qui ne prendra cours que si une personne actuellement d'âge x vit encore $65-x$ années au moins, c'est à dire si l'assuré dépasse l'âge de 65 ans (*rente de vieillesse*); ${}_{10|n}a_x$ représente la valeur actuelle d'une rente viagère différée de 10 ans, ensuite temporaire pendant n années au plus (règle 2) et reposant sur une tête d'âge x (*stipendium*); les termes de cette rente ne deviendront donc exigibles que si l'assuré, actuellement d'âge x, dépasse l'âge $x+10$. Le symbole $a_{x|y}$ représente la valeur actuelle de l'unité de rente viagère payable à la fin de chaque année, commençant à courir après le décès d'une personne déterminée actuellement d'âge x, rente servie aussi longtemps que vivra une autre personne actuellement d'âge y (*rente de survie*).

Quatrième et cinquième règles: Lorsque plusieurs lettres ou chiffres indiquant des âges se suivent immédiatement, ils indiquent un groupe *s'éteignant au premier décès.* Si, au contraire, ces lettres ou chiffres sont surlignés d'une barre horizontale, ils indiquent un groupe *s'éteignant au dernier décès.* Exemples: le symbole $\mathbf{a}_{xy}$ représente le prix d'une rente viagère de montant 1, payable dès maintenant au début de chaque année, aussi longtemps que vivront deux personnes déterminées âgées présentement de x et de y ans. Cette rente cessera d'être exigible dès que décédera l'une des deux têtes jointes, (x) ou (y), n'importe laquelle (rente viagère *non réversible*). Le symbole ${}_{n|}\mathbf{a}_{\overline{xy}}$ représente le prix d'une rente viagère de montant 1, différée de n années (règle 3), payable au commencement de chaque année et exigible aussi longtemps que l'une *au moins* de deux personnes déterminées (x) et (y) sera encore en vie. Cette rente ne cessera donc de courir qu'après l'extinction totale du couple $(\overline{xy})$; c'est une rente viagère *réversible en totalité.* De même, $A_{\overline{xy}}$ représente la

valeur actuelle de unité de capital exigible seulement après l'extinction totale du couple $(\overline{xy})$.

Enfin, pour indiquer *la prime échelonnée* d'une combinaison d'assurance, on écrit la majuscule P devant une parenthèse qui renferme le symbole exprimant la valeur actuelle de la dite combinaison, et l'on groupe autour de cette lettre P, s'il y a lieu, des symboles accessoires et des signes se rapportant aux modalités de paiement de la prime. Ainsi:

$$P_z({}_{65-x|}\mathbf{a}_x), \quad P_z({}_{10|n}a_x), \quad P_z(a_{x|y}) \quad \text{etc.}$$

représentent le montant des primes annuelles constantes qu'il faudrait payer aussi longtemps que vit la personne d'âge z, pour acheter les rentes viagères ci-dessus analysées. Pour indiquer que les primes annuelles doivent être temporaires et exigibles pendant r années *au plus*, on écrirait

$$_rP_z({}_{65-x|}\mathbf{a}_x), \quad _rP_z({}_{10|n}a_x), \quad _rP_z(a_{x|y}) \quad \text{etc.}$$

A noter que lorsqu'il s'agit d'assurances au décès, et seulement dans ces cas, on peut supprimer le symbole principal A; ainsi, on écrit pour abréger P_x au lieu de $P_x(A_x)$, $P_{\overline{xy}}$ au lieu de $P_{\overline{xy}}(A_{\overline{xy}})$, P_{xy} au lieu de $P_{xy}(A_{xy})$ etc.

La notation internationale comprend, en outre, six «signes de commutation»: D_x, N_x, S_x etc. qui seront définis plus bas, au fur et à mesure de leur introduction.

§ 23. La statistique mathématique a fait l'objet de trois travaux d'EULER. Le mémoire 334, *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, fut publié en 1767 dans le tome 16 des Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin. Pour la présente réimpression, j'ai utilisé le manuscrit de Saint-Pétersbourg, ce qui a permis d'apporter quelques améliorations au texte de l'édition originale.[1])

Ce mémoire 334, auquel EULER renvoie souvent dans ses travaux ultérieurs, est aussi très important par l'influence qu'il a exercée sur la théorie formelle de la population. EULER y introduit les symboles

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad \ldots \quad (n) \tag{a 1}$$

pour représenter les probabilités de vie d'un nouveau-né; elles s'écrivent en notation moderne (voir § 22 ci-dessus)

$$p_0, \quad {}_2p_0, \quad {}_3p_0, \quad {}_4p_0, \quad \ldots \quad {}_np_0\,. \tag{b 1}$$

La série eulérienne

$$N, \quad (1)\,N, \quad (2)\,N, \quad (3)\,N, \quad \ldots \quad (x)\,N, \quad \ldots \tag{a 2}$$

est donc une table de survivants et s'écrirait en notation moderne

$$l_0, \quad l_1, \quad l_2, \quad l_3, \quad \ldots \quad l_x, \quad \ldots \tag{b 2}$$

1) La plus importante est mentionnée à la page 82. Au sujet de la date de parution, voir la note 2 p. XXVIII.

EULER a utilisé les mêmes symboles (a 1) dans les mémoires 334, 335, 403, 473, 599 ainsi que dans le fragment qui termine ce volume; mais sa notation n'est pas conséquente[1]); il attribue parfois à (n) la signification de l_n; dans ce cas, la série (a 1) est identique avec (b 2), le nombre de base étant tantôt $N = 1000$, comme dans le mémoire 335, tantôt $N = 100000$, comme dans le mémoire 403. Dans le mémoire *Sur la multiplication du genre humain*, p. 545—552 du présent volume, les mêmes symboles (a 1) servent à représenter les nombres des naissances annuelles.

Après avoir établi quelques propositions devenues classiques et introduit la notion de *vie probable*, EULER fait une application des données statistiques au calcul de rentes viagères. Il déduit les formules qui donnent: 1°) le montant de la rente viagère immédiate équivalente au capital C; 2°) le montant de la rente viagère différée de n années, reposant sur la tête d'un nouveau-né et équivalente au capital C versé à fonds perdu au moment de la naissance. Traduites en notation moderne, ces formules donnent donc

$$\frac{C}{a_x} \quad \text{et} \quad \frac{C}{{}_{n|}a_0}.$$

Dans la seconde partie du mémoire 334, EULER énonce cette proposition devenue célèbre: Quand aucun obstacle n'entrave l'expansion d'une population, celle-ci, recensée à intervalles égaux, augmente selon les termes d'une progression géométrique. Quoique inexacte pour de longues durées, cette hypothèse si simple, grâce à la souplesse qu'EULER a su lui donner, sert encore actuellement de guide aux théoriciens de la démographie.

Sans l'exprimer toujours en termes explicites, EULER suppose: 1°) que la population envisagée forme un ensemble clos, c'est à dire qu'il n'y a ni émigration, ni immigration; 2°) que la loi de mortalité reste constante au cours des âges; 3°) qu'il y a proportionnalité directe entre le nombre de tous les vivants et le nombre des naissances annuelles. Après avoir résolu quatre problèmes préliminaires, EULER développe une méthode qui permet d'obtenir très simplement une table de mortalité immédiatement applicable. *Il suffit d'un recensement général et d'une liste mortuaire pour l'année qui suit ce recensement.* Cette méthode d'EULER a fait époque, à cause de sa simplicité jointe à l'exactitude qu'elle permet d'obtenir, quand on la perfectionne en tenant compte des migrations.

§ 24. EULER s'est occupé à réitérées fois de questions démographiques. Dans son *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748[2]), il mentionne déjà l'hypothèse de la

1) Dans le manuscrit du mémoire 403, EULER a utilisé les crochets, écrivant $[x]$ au lieu de (x). Pour des raisons d'uniformité, je m'en suis tenu à l'édition originale, où les parenthèses rondes ont été mises (voir § 13 de cette préface, p. XXVI).

2) LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 8, p. 116.

variation d'une population selon les termes d'une progression géométrique et en fait un exemple pour l'emploi des logarithmes. A cet endroit se trouve une remarque caractéristique que je traduis ici: „Pour cette raison apparaissent bien ridicules les objections de ces hommes incrédules niant la possibilité qu'en un si court laps de temps, les descendants d'un seul couple aient pu peupler la terre entière.“ On sait qu' EULER, qui a gardé jusqu'à sa mort la foi de ses pères, a plusieurs fois fait de l'apologétique chrétienne, notamment en 1747 et 1754.[1]) A la fin du mémoire 334, EULER fait une mention élogieuse des travaux de JEAN-PIERRE SÜSSMILCH, ecclésiastique qui fut son collègue à l'Académie des sciences de Berlin.

Si je cite ces faits, c'est pour prouver qu' EULER a largement inspiré, sinon rédigé entièrement, le chapitre VIII du livre susmentionné de SÜSSMILCH.[2]) Ce chapitre VIII, intitulé *Von der Geschwindigkeit der Vermehrung und von der Zeit der Verdoppelung,* qui contient des remarques mathématiques parfois très profondes, constitue le deuxième travail démographique que nous devons à EULER. Chose curieuse, il n'est relevé dans aucune liste de travaux eulériens. Ni dans les autres ouvrages de SÜSSMILCH ni dans les biographies contemporaines, ce mémoire d'EULER n'est mentionné.

En faisant des hypothèses variées sur la natalité et la mortalité, EULER a calculé plusieurs tables qui mettent en lumière le temps qu'il faut à la population d'un pays pour doubler en nombre, toute émigration ou immigration étant supposée exclue. On sait que cette période de duplication a joué un grand rôle dans le premier stade de l'évolution de la statistique mathématique. Je m'arrêterai ici, à cause du mémoire suivant, sur la plus importante de ces tables. Elle a été dressée très probablement en 1754, tandisque les autres parties de ce chapitre VIII ont été rédigées en 1740. EULER se base sur les hypothèses simplificatrices suivantes.

1) Les mariages se font tous quand les époux ont vingt ans; chaque couple engendre 6 enfants, 3 garçons et 3 filles.

2) Les naissances ont lieu tous les deux ans, dans les 22ième, 24ième et 26ième années d'âge des parents. Il naît chaque fois 2 jumeaux. Tous survivent et tous se marient à l'âge de vingt ans.

3) On meurt à 40 ans révolus, ni plus tôt, ni plus tard.

---

1) Voir *Rettung der Göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürfe der Freygeister.* Berlin, bey A. Haude, und Joh. Carl Spener. 1747. Voir aussi la lettre d'EULER à E. PONTOPPIDAN, du 11 mai 1754. Cf. les numéros 92 et 218 de *l'Index d'ENESTRÖM.*

2) Voir la note 1 p. VIII et les pages 507—508.

En prenant comme point de départ deux conjoints âgés de 20 ans, on voit que les hypothèses eulériennes conduisent aux nombres de naissances suivants, de deux en deux ans:

$$\left.\begin{array}{l} 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 14, \\ 12,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 8,\ 20,\ 32,\ 38,\ 32,\ 20,\ 8,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 10,\ 30,\ 60,\ 90, \\ 102,\ 90,\ 60,\ 30,\ 10,\ 2,\ 2,\ 12,\ 42,\ 100,\ 180,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (c)$$

En désignant par n_t le nombre des naissances pendant la $t^{\text{ième}}$ unité de temps, on remarque que

$$n_t = n_{t-13} + n_{t-12} + n_{t-11}$$

à partir du $14^{\text{ième}}$ terme de cette suite.

A la fin du § 161, EULER fait remarquer que ces nombres de naissances forment une série récurrente semblable à celles qui apparaissent, lorsqu'on développe une fraction algébrique par la division. «Quelqu' irrégulières que ces progressions semblent être quand on n'en considère que les premiers termes, elles finissent, prolongées suffisamment loin, par se transformer en progression géométrique, et les irrégularités du commencement diminuent de plus en plus, pour finalement disparaître presque complètement.»

Monsieur GUMBEL a démontré l'exactitude de cette proposition pour le cas particulier dont il s'agit ici.[1])

La fonction génératrice est

$$\frac{2}{1 - x^{11} - x^{12} - x^{13}}.$$

En effectuant le développement, on trouve en effet

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - x^{11} - x^{12} - x^{13}} = {} & 2 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{10} + 2x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13} \\ & + 0x^{14} + \cdots + 0x^{21} + 2x^{22} + 4x^{23} + 6x^{24} + 4x^{25} \\ & + 2x^{26} + 0x^{27} + \cdots + 0x^{32} + 2x^{33} + 6x^{34} + 12x^{35} + \cdots \end{aligned}$$

Les coefficients de ce développement, à partir du $12^{\text{ième}}$, sont précisément les nombres de naissances. Monsieur GUMBEL, en appliquant la méthode de GRÄFFE, démontre que l'équation correspondant à cette fonction génératrice, savoir

$$x^{13} - x^2 - x - 1 = 0,$$

possède: 1⁰) trois racines réelles dont $x_1 = 1{,}0961$ a la plus grande valeur absolue; 2⁰) dix racines complexes, et la plus grande de leurs valeurs absolues est 1,087. Dès lors, on

1) E. J. GUMBEL, *Eine Darstellung statistischer Reihen durch Euler.* Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, **25**, Leipzig 1916, p. 251—264. Dans ce travail, le facteur 2 au numérateur de la fraction génératrice est omis.

peut appliquer le théorème suivant connu d'EULER en 1744 déjà[1]), énoncé aussi pa LAGRANGE[2]) et par CAPELLI.[3])

Si l'on développe en série une fonction rationnelle proprement dite ($n < m$)

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_\lambda x^\lambda + \cdots$$

le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ *tend vers une limite finie et déterminée pour* $n \to \infty$, *à condition qu l'équation*

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

possède une racine (simple ou multiple) dont la valeur absolue soit supérieure aux valeur absolues de toutes les autres. De plus, si cette condition est satisfaite,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} \right)$$

est précisément égal à cette racine-là. Il résulte de ce théorème que le rapport du term général au précédent, dans le développement ci-dessus, tend vers la limite 1,0961 et qu par suite, les nombres de naissances (série (c) ci-dessus) tendent effectivement à se confond avec les termes d'une progression géométrique de raison 1,0961. On démontre facilemen qu'il en est de même de la série des nombres de vivants, l_t, résultant des hypothès euleriennes. Il est vrai que pour s'apercevoir de cette convergence, il faudrait prolong ces séries extrêmement loin. Cela tient à la petitesse de la différence des valeurs absolu maximales des racines: $1{,}0961 - 1{,}087 = 0{,}0091$.

§ 25. Dans le carnet mathématique H_6 s'est trouvé un complément important de c développements. C'est le mémoire *Sur la multiplication du genre humain,* publié pour première fois p. 545—552 du présent volume. EULER y donne la théorie mathématiq des calculs qu'il fit pour SÜSSMILCH et montre comment il faut s'y prendre pour trouv la formule de récurrence et la fonction génératrice. En faisant relativement à la natali

1) Voir *Introductio in analysin infinitorum,* Lausannae 1748, t. I, § 338 et 339. *LEONHAR EULERI Opera omnia,* series I, vol. 8, p. 342 et 354.

2) J.-L. LAGRANGE, *Traité de la résolution numérique des équations de tous les degrés,* Pa an VI, p. 147. Nouvelle édition revue et augmentée par l'auteur. Paris 1808. *Oeuvres de L GRANGE* publiées par J.-A. SERRET, t. 8, Paris 1879.

3) A. CAPELLI, *Sull' uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebric* Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche, serie 3a, vol. I, N poli 1895, p. 205. Voir aussi l'article de N. E. NÖRLUND, *Neuere Untersuchungen über Differenz gleichungen,* Enzyklop. d. math. Wiss. II C 7, p. 677, Leipzig 1923.

En prenant comme point de départ deux conjoints âgés de 20 ans, on voit que les hypothèses eulériennes conduisent aux nombres de naissances suivants, de deux en deux ans:

$$\left.\begin{array}{l} 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 14, \\ 12,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 8,\ 20,\ 32,\ 38,\ 32,\ 20,\ 8,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 10,\ 30,\ 60,\ 90, \\ 102,\ 90,\ 60,\ 30,\ 10,\ 2,\ 2,\ 12,\ 42,\ 100,\ 180,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (c)$$

En désignant par n_t le nombre des naissances pendant la $t^{\text{ième}}$ unité de temps, on remarque que

$$n_t = n_{t-13} + n_{t-12} + n_{t-11}$$

à partir du 14ième terme de cette suite.

A la fin du § 161, EULER fait remarquer que ces nombres de naissances forment une série récurrente semblable à celles qui apparaissent, lorsqu'on développe une fraction algébrique par la division. «Quelqu' irrégulières que ces progressions semblent être quand on n'en considère que les premiers termes, elles finissent, prolongées suffisamment loin, par se transformer en progression géométrique, et les irrégularités du commencement diminuent de plus en plus, pour finalement disparaître presque complètement.»

Monsieur GUMBEL a démontré l'exactitude de cette proposition pour le cas particulier dont il s'agit ici.[1])

La fonction génératrice est

$$\frac{2}{1 - x^{11} - x^{12} - x^{13}}.$$

En effectuant le développement, on trouve en effet

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - x^{11} - x^{12} - x^{13}} = 2 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{10} + 2x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13} \\ + 0x^{14} + \cdots + 0x^{21} + 2x^{22} + 4x^{23} + 6x^{24} + 4x^{25} \\ + 2x^{26} + 0x^{27} + \cdots + 0x^{32} + 2x^{33} + 6x^{34} + 12x^{35} + \cdots \end{aligned}$$

Les coefficients de ce développement, à partir du 12ième, sont précisément les nombres de naissances. Monsieur GUMBEL, en appliquant la méthode de GRÄFFE, démontre que l'équation correspondant à cette fonction génératrice, savoir

$$x^{13} - x^2 - x - 1 = 0,$$

possède: 1⁰) trois racines réelles dont $x_1 = 1{,}0961$ a la plus grande valeur absolue; 2⁰) dix racines complexes, et la plus grande de leurs valeurs absolues est 1,087. Dès lors, on

1) E. J. GUMBEL, *Eine Darstellung statistischer Reihen durch Euler.* Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, **25**, Leipzig 1916, p. 251—264. Dans ce travail, le facteur 2 au numérateur de la fraction génératrice est omis.

peut appliquer le théorème suivant connu d'EULER en 1744 déjà[1]), énoncé aussi par LAGRANGE[2]) et par CAPELLI.[3])

Si l'on développe en série une fonction rationnelle proprement dite ($n < m$)

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_\lambda x^\lambda + \cdots$$

le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ *tend vers une limite finie et déterminée pour* $n \to \infty$, *à condition que l'équation*

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

possède une racine (simple ou multiple) dont la valeur absolue soit supérieure aux valeurs absolues de toutes les autres. De plus, si cette condition est satisfaite,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} \right)$$

est précisément égal à cette racine-là. Il résulte de ce théorème que le rapport du terme général au précédent, dans le développement ci-dessus, tend vers la limite 1,0961 et que, par suite, les nombres de naissances (série (c) ci-dessus) tendent effectivement à se confondre avec les termes d'une progression géométrique de raison 1,0961. On démontre facilement qu'il en est de même de la série des nombres de vivants, l_t, résultant des hypothèses eulériennes. Il est vrai que pour s'apercevoir de cette convergence, il faudrait prolonger ces séries extrêmement loin. Cela tient à la petitesse de la différence des valeurs absolues maximales des racines: $1{,}0961 - 1{,}087 = 0{,}0091$.

§ 25. Dans le carnet mathématique H_6 s'est trouvé un complément important de ces développements. C'est le mémoire *Sur la multiplication du genre humain*, publié pour la première fois p. 545—552 du présent volume. EULER y donne la théorie mathématique des calculs qu'il fit pour SÜSSMILCH et montre comment il faut s'y prendre pour trouver la formule de récurrence et la fonction génératrice. En faisant relativement à la natalité

---

1) Voir *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I, § 338 et 339. *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 8, p. 342 et 354.

2) J.-L. LAGRANGE, *Traité de la résolution numérique des équations de tous les degrés*, Paris an VI, p. 147. Nouvelle édition revue et augmentée par l'auteur. Paris 1808. *Oeuvres de LAGRANGE* publiées par J.-A. SERRET, t. 8, Paris 1879.

3) A. CAPELLI, *Sull' uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebriche.* Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche, serie 3a, vol. I, Napoli 1895, p. 205. Voir aussi l'article de N. E. NÖRLUND, *Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen*, Enzyklop. d. math. Wiss. II C 7, p. 677, Leipzig 1923.

les mêmes hypothèses que ci-dessus, mais posant comme âge ultime de la vie humaine 50 ans (au lieu de 40 ans comme ci-dessus), EULER arrive à l'équation

$$x^{14} - x^2 - x - 1 = 0,$$

dont la racine de valeur absolue maximale est la raison de la progression géométrique limite vers laquelle tendent finalement les nombres de naissances et les nombres de vivants. Enfin, en supposant une fécondité plus grande: mariage à 20 ans, deux jumeaux à 22 ans, deux à 24 ans et ainsi de suite jusqu'à 30 ans (10 enfants par mariage), EULER dresse une table analogue à celle qu'il calcula pour SÜSSMILCH, puis détermine pour les nombres de naissances la formule de récurrence et la fonction génératrice. Ces tables calculées par EULER et les remarques faites par lui à ce sujet constituent le premier essai connu de représenter une série statistique par une fonction mathématique. Dans ce domaine aussi, EULER a fait oeuvre de pionnier.

Il ressort d'ailleurs de plusieurs passages du livre de SÜSSMILCH qu' EULER a collaboré à la confection de la table de mortalité de SÜSSMILCH-BAUMANN, bien connue et qui pendant plus d'un siècle fut utilisée en Allemagne. Elle n'y a été détrônée que par les tables modernes basées sur les résultats acquis au cours du 19ième siècle sur l'allure de la mortalité dans les diverses couches de la population.

VI. LES ASSURANCES SUR LA VIE HUMAINE

§ 26. EULER s'est occupé souvent de questions relatives aux assurances en cas de vie ou de décès. Plusieurs expertises qu'il fit n'ont pas été conservées. Des travaux publiés dans ce volume, cinq se rapportent à cette branche de la science actuarielle. Le mémoire 335, *Sur les rentes viagères*, dont on ignore la date de présentation, fut publié en 1767 dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin. Après avoir donné quelques détails historiques sur le taux de l'intérêt, EULER, par *la méthode de la société fictive*, méthode devenue classique, détermine $r \cdot a_m$, c'est à dire le prix d'une rente viagère immédiate de montant r, payable à la fin de chaque année aussi longtemps que vivra une personne actuellement d'âge m.[1]) Pour faciliter les calculs numériques, EULER a imaginé un artifice consistant à faire usage d'une relation de récurrence entre a_m et a_{m+1}. C'est la formule suivante, retrouvée après EULER par beaucoup d'actuaires[1])

$$a_m = (1 + a_{m+1}) \cdot v \cdot \frac{l_{m+1}}{l_m}. \tag{1}$$

1) Pour la signification des symboles actuariels, voir le § 22 de cette préface.

Comme $a_{\omega-1} = 1$ et $a_\omega = 0$, quand ω marque *l'âge limite* de la table de mortalité utilisée, la formule (1), très importante pour la pratique, permet de dresser avec un minimum de travail un barème complet des prix d'une rente viagère immédiate; il suffit d'avoir à disposition une table de survivants

$$l_0, \quad l_1, \quad l_2, \quad l_3, \quad \cdots \quad l_x, \quad l_{x+1}, \quad \cdots \quad l_\omega,$$

où ω est tel que $l_\omega \neq 0$, mais $l_{\omega+1} = 0$. EULER établit encore deux formules pour déterminer le prix net d'une rente viagère différée de n années, soit ${}_n|\mathbf{a}_x$. Il complète ces développements par plusieurs tables numériques qui donnent a_x pour tous les âges ronds, puis ${}_{10}|\mathbf{a}_x$ et ${}_{20}|\mathbf{a}_x$ pour les âges x divisibles par 5. Le taux technique est 5% et la table de mortalité celle de KERSSEBOOM, utilisée par EULER à réitérées fois. Le lecteur la trouvera p. 98—100 de ce volume, avec quelques notes explicatives.

§ 27. En 1768, EULER reçut un livre publié à Göttingue par le sénateur J. A. KRITTER, traitant d'une caisse de pensions pour veuves et en général d'assurances en cas de décès.[1]) Ce livre fut pour lui l'occasion de rédiger le mémoire 403, *Des Herrn LEONHARD EULERS nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencasse,* présenté à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg le 3 avril 1769. D'après les procès-verbaux, ce mémoire fut déposé aux archives et une copie envoyée à Göttingue. Par l'intermédiaire d'A.-G. KÄSTNER (1719—1800), depuis 1756 professeur à l'Université de Göttingue, ce travail d'EULER fut publié en 1770 dans Neues hamburgisches Magazin.[2]) Pour la présente réimpression, j'ai utilisé le manuscrit de Saint-Pétersbourg, ce qui a permis d'apporter quelques améliorations au texte de l'édition originale. Tandisque KRITTER, désireux d'éviter toute formule mathématique, expose sa théorie très prolixement (son livre compte 156 pages dont 20 pages de préface), EULER la résume sur 9 pages, en langage algébrique clair et concis. EULER fait mieux; en condensant la théorie, il la modifie du tout au tout.

C'est dans ce mémoire qu'apparaît pour la première fois une méthode géniale par laquelle EULER ramène à une même équation deux problèmes différents que, jusqu'à ces dernières

---

1) JOHANN AUGUSTIN KRITTER, Senator und Kämmerer zu Göttingen, *Oeconomisch-Politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche jetzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwen-Cassen aufgeworfen werden.* Nach den SÜSSMILCHISCHEN Grundsätzen angestellet in einem Briefwechsel zweyer Patrioten, nebst einer Beurtheilung des neuen Bremischen Instituti einer Trauerpfennig-Beysteuer. Göttingen, verlegts ABRAM VANDENHOEKS sel. Witwe. Universitäts-Buchhandlung, 1768.

2) Voir la lettre du $^1/_{12}$ septembre 1769 adressée à KÄSTNER par JEAN-ALBRECHT EULER, fils de LÉONARD. Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft in Bern, 1847, p. 164. Voir aussi L.-G. DU PASQUIER, *Eine deutsche Abhandlung LEONHARD EULERS über Witwenkassen,* Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich, **55**, 1910, p. 14.

années, les actuaires traitaient séparément: calculer, pour une combinaison d'assurance donnée, la prime unique d'une part, la prime échelonnée constante d'autre part. La méthode eulérienne conduit à une équation où figurent deux indéterminées, disons k et $\mathbf{a}$; suivant que l'on fait $k = 0$ ou $k = \mathbf{a}$, cette équation permet de calculer soit la prime unique, soit la prime nivelée exigible pendant n années, n pouvant être fixé d'avance ou dépendre de la vie d'une ou de plusieurs personnes. Dans le cas particulier dont il est question dans le mémoire 403, EULER procède comme suit. Un couple, composé du mari d'âge x et de la femme d'âge y, verse de suite à l'Institution une somme k à capital abandonné et s'engage, en outre, à payer annuellement une prime $\mathbf{a}$, aussi longtemps que les deux époux seront tous deux en vie. La Caisse, de son côté, s'engage à servir à la veuve une pension annuelle p commençant à courir après la mort du mari. Si la femme décédait avant lui, les sommes versées resteraient acquises à l'Institution qui n'aurait aucune obligation envers le mari devenu veuf. C'est donc $a_{x|y}$, rente de survie unilatérale, qu'il s'agit de calculer. En appliquant des propositions élémentaires du calcul des probabilités, EULER arrive à l'équation

$$k + M \cdot (p + \mathbf{a}) - N \cdot p = 0 \tag{2}$$

où N et M[1]) représentent deux séries que je transcris ici, en utilisant la notation internationale exposée au § 22.[2])

$$\left.\begin{aligned} N &\equiv \frac{1}{l_y}\left(v \cdot l_{y+1} + v^2 \cdot l_{y+2} + v^3 \cdot l_{y+3} + \cdots\right) \\ M &\equiv \frac{1}{l_x \cdot l_y}\left(v \cdot l_{x+1} \cdot l_{y+1} + v^2 \cdot l_{x+2} \cdot l_{y+2} + v^3 \cdot l_{x+3} \cdot l_{y+3} + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L'équation (2) permet de déterminer l'une des trois grandeurs k, $\mathbf{a}$, p, lorsqu'on connaît les deux autres. Si l'on se donne d'avance le montant p de la pension de veuve, on en trouvera le prix de revient, $p \cdot a_{x|y}$, en posant $\mathbf{a} = 0$; la formule (2) donne

$$k = p \cdot (N - M), \quad \text{donc} \quad a_{x|y} = N - M. \tag{4}$$

Pour cette même rente de survie, on trouve la prime annuelle nivelée exigible jusqu'au premier décès, prime que nous écrivons $P_{xy}(p \cdot a_{x|y}) = p \cdot P_{xy}(a_{x|y})$, en faisant $k = \mathbf{a}$; la formule (2) donne

$$\mathbf{a} = p \cdot \frac{N - M}{M + 1}, \quad \text{donc} \quad P_{xy}(a_{x|y}) = \frac{N - M}{M + 1} = \frac{a_{x|y}}{M + 1}. \tag{5}$$

Mais cette même équation (2) permet de résoudre une quantité d'autres problèmes, une fois qu'ont été calculées N et M, qui ne dépendent que de la table de mortalité et du taux de l'intérêt adoptés. On peut en effet fixer arbitrairement deux des trois quantités $\mathbf{a}$, k,

1) Voir § 29 ci-dessous.

2) Le signe $\equiv$ (doublement égal) signifie égal par définition.

p, ou fixer à volonté le montant de l'une et établir entre les deux autres une relation arbitraire, ou enfin, établir entre elles deux relations arbitraires.

On voit que la sagacité d'EULER était arrivée bien près de la notion de „nombres escomptés de vivants", nombres qui figurent aujourd'hui dans toutes les formules actuarielles; mais le mérite d'avoir reconnu clairement l'importance primordiale de ces nombres et de les avoir désignés par des symboles spéciaux, dits „signes de commutation", revient à l'Ecole anglaise et, sur le continent, au Danois TETENS.[1]) Introduisons ces nombres en posant

$$D_x = l_x \cdot v^x \quad \text{et} \quad N_x = \Sigma D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots \tag{6}$$

Ce sont les deux premiers *signes de commutation.* La formule (3) devient

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{v^y \cdot l_y}(v^{y+1} \cdot l_{y+1} + v^{y+2} \cdot l_{y+2} + v^{y+3} \cdot l_{y+3} + \cdots) \\ &= \frac{1}{D_y}(D_{y+1} + D_{y+2} + D_{y+3} + \cdots) \\ &= \frac{N_{y+1}}{D_y}. \end{aligned} \tag{3a}$$

Or, on démontre en science actuarielle que $\mathbf{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$, d'où

$$\frac{N_{x+1}}{D_x} = \mathbf{a}_x - 1 = a_x. \tag{7}$$

On voit par là que l'abréviation eulérienne N n'est pas autre chose que a_y, valeur actuelle de l'unité de rente immédiate payable en fin de période. C'est une relation remarquable.

L'introduction des nombres escomptés de vivants dans l'équation qui définit M donne

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{v^x \cdot l_x \cdot l_y}(v^{x+1} \cdot l_{x+1} \cdot l_{y+1} + v^{x+2} \cdot l_{x+2} \cdot l_{y+2} + v^{x+3} \cdot l_{x+3} \cdot l_{y+3} + \cdots) \\ &= \frac{1}{D_x \cdot l_y}(D_{x+1} \cdot l_{y+1} + D_{x+2} \cdot l_{y+2} + D_{x+3} \cdot l_{y+3} + \cdots) \\ &= \frac{1}{D_{x,y}}(D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + D_{x+3,y+3} + \cdots) \\ &= \frac{N_{x+1,y+1}}{D_{x,y}}, \end{aligned} \tag{3b}$$

1) J.-N. TETENS (1736–1807), après avoir été de 1776 à 1789 professeur de philosophie et de mathématiques à l'Université de Kiel, devint Conseiller d'Etat et des Finances à Copenhague. Il publia entre autres une *Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften,* Leipzig 1785.

si l'on adopte les notations modernes [1]) formées par analogie avec (6)

et
$$\left.\begin{aligned} D_{x,y} &\equiv D_x \cdot l_y = v^x \cdot l_x \cdot l_y \\ N_{x,y} &\equiv D_{x,y} + D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Or, on démontre en science actuarielle que

$$N_{xy} : D_{xy} = \mathfrak{a}_{xy}. \tag{9}$$

Il s'ensuit que $M = \mathfrak{a}_{xy} - 1 = a_{xy}$, c'est à dire que l'abréviation eulérienne M n'est pas autre chose que la valeur actuelle de l'unité de rente viagère immédiate payable en fin de période, reposant sur un couple de deux têtes et exigible jusqu'au *premier* décès. Les relations (4) et (5) deviennent

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy} \quad \text{et} \quad P_{xy}(a_{x.y}) = a_{x|y} : \mathfrak{a}_{xy}, \tag{10}$$

formules qui sont classiques de nos jours. Je reparlerai de ce problème à propos du mémoire 473 (voir § 29).

La méthode eulérienne qui conduit à l'équation (2) est applicable à toutes les assurances au décès. On peut même utiliser cette méthode dans les assurances en cas de vie, du moins lorsqu'il s'agit de rentes viagères différées, et sans avoir recours au calcul des probabilités. Bien que cette méthode soit aussi simple que puissante, elle n'a pas tout de suite acquis dans la pratique l'importance qui lui revient. Il a fallu une occasion telle que l'Edition complète des oeuvres d'Euler pour la faire en quelque sorte découvrir à nouveau et pour mettre en lumière sa très grande fécondité. Jointe à la notation moderne internationale, elle permet de donner aux formules une généralité et une élégance que beaucoup ne s'attendraient pas à rencontrer dans ce domaine. [2])

§ 28. Le mémoire 599, *Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis. Quantum duo conjuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utriusque mortem certa argenti summa persolvatur*, fut présenté le 10 juin 1776 à l'Académie de Saint-Pétersbourg, mais publié seulement en 1785. Pour la seconde fois, Euler fait usage de sa méthode géniale qui permet de résumer en une seule formule les cas les plus variés. Il s'agit de déterminer la valeur actuelle $1000 \cdot A_{\overline{xy}}$ ainsi que la prime annuelle nivelée correspondante, $1000 \cdot P_{\overline{xy}}$; contrairement à l'hypothèse faite dans le mémoire 403, cette prime échelonnée est payable jusqu'au *dernier* décès.

---

1) D'après Griffith Davies; voir *Institute of Actuaries' Textbook, Part II by G. King*, 2. ed., London 1902, p. 122.

2) Voir L.-G. Du Pasquier, *Introduction à la science actuarielle.* Neuchâtel et Paris, 1919.

La méthode eulérienne consiste ici à supposer: α) qu'un très grand nombre de couples $(\overline{xy})$ se présentent au même moment chez le même assureur pour signer des contrats identiques; β) que chacun de ces couples $(\overline{xy})$ s'engage: 1⁰) à verser de suite la somme k à capital abandonné; 2⁰) à payer en outre, annuellement et jusqu'au dernier décès, la prime constante **a**. Les obligations de l'assureur consistent à placer ces fonds à intérêt composé, de façon à pouvoir payer, lors de l'extinction totale de chaque couple, la somme assurée de 1000 roubles.

Par des théorèmes élémentaires du calcul des probabilités, EULER arrive à l'équation

$$k + \mathbf{a}\left(\frac{P}{(x)} + \frac{Q}{(y)} - \frac{R}{(x)(y)}\right) = 1000\left\{1 - \frac{i \cdot P}{(x)} - \frac{i \cdot Q}{(y)} + \frac{i \cdot R}{(x)(y)}\right\} \tag{11}$$

qui montre la puissance de la méthode eulérienne. En effet, pour répondre à la question posée, il suffit de faire $k = \mathbf{a}$; et l'on pourra tirer de (11) le montant de la prime échelonnée constante, $\mathbf{a} = 1000 \cdot P_{\overline{xy}}$, exigible jusqu'au dernier décès.

Mais la même formule (11) permet de résoudre encore quantité d'autres problèmes. En particulier, faisant $\mathbf{a} = 0$, on en tirera le prix de revient net de la dite assurance, soit $1000 \cdot A_{\overline{xy}}$. En plus, l'une des deux quantités k ou **a** étant fixée arbitrairement, (11) permettra de calculer l'autre. Enfin, on peut établir entre **a** et k une relation à volonté, l'équation (11) permettra encore de répondre à la question ainsi modifiée. Et si, au lieu de 1000 roubles, on prenait la somme assurée d'un montant quelconque C, la variété des problèmes résolubles par cette même équation serait bien plus grande encore.

Quant aux autres grandeurs qui figurent dans (11), i représente l'intérêt annuel de l'unité de capital; les symboles (x) et (y), expliqués ci-dessus au § 23, désignent des probabilités de vie; P, Q, R sont des abréviations que nous allons examiner.

$$P = \frac{(x+1)}{\lambda} + \frac{(x+2)}{\lambda^2} + \frac{(x+3)}{\lambda^3} + \cdots \tag{12}$$

Si l'on écrit le facteur d'escompte v au lieu de $\frac{1}{\lambda}$ et qu'on tienne compte de la formule $(n) = \frac{l_n}{l_0}$, on voit que

$$P \cdot l_0 = l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + l_{x+3} \cdot v^3 + \cdots$$

donc

$$\begin{aligned} P \cdot l_0 \cdot v^x &= l_{x+1} \cdot v^{x+1} + l_{x+2} \cdot v^{x+2} + l_{x+3} \cdot v^{x+3} + \cdots \\ &= D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots \\ &= N_{x+1}, \end{aligned}$$

en introduisant les signes de commutation d'après la formule (6). Dans l'équation (11), $\frac{P}{(x)}$ devient donc en notation moderne

$$\frac{N_{x+1} \cdot l_0}{v^x \cdot l_0 \cdot l_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x};$$

de même

$$\frac{Q}{(y)} = \frac{N_{y+1}}{D_y},$$

car, par définition, on passe de P à Q en remplaçant x par y. On constate donc que $\frac{P}{(x)}$ et $\frac{Q}{(y)}$ ne diffèrent pas de la grandeur N introduite par Euler déjà en 1768 (voir la formule (3a) ci-dessus). Quant à l'abréviation

$$R \equiv \frac{(x+1)(y+1)}{\lambda} + \frac{(x+2)(y+2)}{\lambda^2} + \frac{(x+3)(y+3)}{\lambda^3} + \cdots \tag{13}$$

elle devient

$$= \frac{l_{x+1}}{l_0} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_0} \cdot v + \frac{l_{x+2}}{l_0} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_0} \cdot v^2 + \frac{l_{x+3}}{l_0} \cdot \frac{l_{y+3}}{l_0} \cdot v^3 + \cdots$$

ou, en introduisant les signes de commutation d'après (6) et (8),

$$R \cdot l_0^2 \cdot v^x = D_{x+1} \cdot l_{y+1} + D_{x+2} \cdot l_{y+2} + \cdots \equiv N_{x+1,\,y+1}.$$

Il s'ensuit que, dans l'équation (11),

$$\frac{R}{(x)(y)} = \frac{N_{x+1,\,y+1}}{l_0^2 \cdot v^x \cdot \frac{l_x}{l_0} \cdot \frac{l_y}{l_0}} = \frac{N_{x+1,\,y+1}}{D_{x,y}},$$

et ceci est précisément le symbole M du mémoire 403. Il y a donc, entre les grandeurs M et R relatives aux mêmes âges x et y, la relation remarquable

$$R \cdot l_0^2 = M \cdot l_x \cdot l_y. \tag{14}$$

Le mémoire 599 se termine par des développements relatifs à ces trois grandeurs P, Q, R. Euler introduit la différence d'âge $x - y$ et indique un procédé pour abréger les calculs numériques, procédé qu'il utilise dans le livre que je vais analyser.

§ 29. Des travaux qu'Euler a consacrés à la science actuarielle, le plus important est le numéro 473 (de *l'Index d'Eneström*): *Eclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la déscription d'une nouvelle espece de Tontine aussi favorable au Public qu'utile à l'Etat. Calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler. Par Mr. Nicolas Fuss.* Ce mémoire fut présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg les premier février et 16 mai 1776 et publié par elle la même année sous forme de livre. Six ans plus tard en parut une traduction allemande due au sénateur de Göttingue déjà mentionné J.-A. Kritter, auteur de plusieurs publications sur des institutions d'assurance.[1])

1) Johann Augustin Kritter, Senat. und Camerar. in Göttingen, *Erläuterungen über die öffentlichen Anstalten zum Besten sowohl der Witwen als Sterbefälle nebst der Beschreibung einer*

Les *Eclaircissemens* d'EULER comprennent trois parties qui n'ont entre elles d'autre lien que d'être réunies dans un même volume et de traiter de questions d'assurance sur la vie humaine. Une analyse en fut faite dans Allgemeine deutsche Bibliothek **36**, I, 1778, p. 508—517.

La première partie porte le titre *D'un établissement public pour payer des pensions à des veuves, fondé sur les principes les plus solides de la probabilité.* EULER y traite à nouveau le problème déjà résolu par lui en 1769 et analysé en détail au § 27 ci-dessus. C'est donc la troisième fois qu'EULER utilise sa méthode universelle. Il arrive à l'équation

$$k + C \cdot \mathbf{a} = (B - C) \cdot p \tag{15}$$

où k, p et $\mathbf{a}$ ont la signification ci-dessus expliquée. Or, en examinant de près la définition des grandeurs désignées ici par B et C, on constate que le B de (15) est identique au N de (2) et le C de (15) identique au M de (2), abstraction faite des différences de notation. L'équation (15) est donc la même que l'équation (2) établie sept ans auparavant dans le mémoire 403. Ces deux équations, écrites en notation moderne, reviennent à celle-ci:

$$k + \frac{N_{x+1,\,y+1}}{D_{x,y}} \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{N_{y+1}}{D_y} - \frac{N_{x+1,\,y+1}}{D_{x,y}}\right) \cdot p$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$k + \mathbf{a} \cdot a_{xy} = (a_y - a_{xy}) \cdot p.$$

Cette première partie des *Eclaircissemens* donne, en plus de la théorie déjà exposée succinctement dans le mémoire 403, de longs développements relatifs aux calculs pratiques et quinze tables numériques. Bien que les données statistiques qui ont servi de base à EULER soient sujettes à caution, bien que, pour abréger les calculs numériques, EULER fasse usage d'un artifice diminuant l'exactitude, sans rechercher quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise, les tables eulériennes, même abstraction faite de leur valeur historique, ne sont pas dépourvues d'intérêt pour l'actuaire moderne. Aussi le Bureau fédéral des assurances à Berne a-t-il bien voulu se charger de vérifier les tables des deux premières parties de ce mémoire. Nous lui réitérons ici l'expression de notre sincère gratitude.

---

neuen Art von Tontine, die für das Publikum eben so bequem als für den Staat nützlich ist. Berechnet unter der Aufsicht des Herrn LEONHARD EULER durch Herrn NICOLAS FUSS, Adjunktus der Kaiserl. Akademie der Wissenschafften zu Petersburg. Aus dem Französischen übersetzt und mit einer Einleitung versehen. Altenburg, in der RICHTERSCHEN Buchhandlung. 1782. Ce livre est de 79 p. in -4°. Les pages 1 à 18 contiennent l'Introduction de KRITTER. Une analyse de ce livre parut dans Allgemeine deutsche Bibliothek **58**, 1784, p. 558—559.

§ 30. La deuxième partie des *Eclaircissemens* est intitulée *Sur l'établissement d'une Caisse pour les morts.*[1]) C'est de nouveau une circonstance extérieure, la fondation d'une *Fraternité*, qui fournit à EULER l'occasion de s'occuper de cette question. La dite *Fraternité* devait se composer de 550 membres dont chacun s'engageait à payer 2 roubles toutes les fois que l'un des sociétaires mourrait. De la somme de 1100 roubles ainsi recueillie à chaque décès, 1000 étaient versés à la famille du défunt, tandisque les 100 roubles restants servaient à l'entretien d'une église et à couvrir les frais qu'un tel établissement occasionne. Tout sociétaire défunt devait sans retard être remplacé par un nouveau membre, afin que le nombre total des adhérents fût constamment de 550. EULER démontre en détail qu'une Caisse établie sur ces bases n'est pas viable à la longue, et l'histoire des *Caisses du franc au décès* (Frankenkassen), qui furent fondées par centaines, lui a donné raison.

EULER applique ici pour la quatrième fois sa méthode universelle et résout le problème de l'assurance simple au décès, en supposant que la personne assurée s'engage: 1) à verser de suite un capital k à fonds perdu; 2) à payer en outre, à fonds perdu également et aussi longtemps qu'elle sera en vie, une prime annuelle constante du montant de $\mathbf{a}$ Par la méthode de la société fictive, EULER arrive très facilement à l'équation

$$(x) \cdot k + P \cdot \mathbf{a} = 100 \left\{(x) - i \cdot P\right\} = 100\,(x) - 6\,P \tag{16}$$

où $i = 0{,}06$, puisqu' EULER prend ici $6\,\%$ comme taux annuel de l'intérêt. Si l'on pose $\mathbf{a} = 0$, l'équation (16) donne la valeur actuelle du capital assuré (100 roubles), exigible après le décès d'une personne actuellement d'âge x:

$$100\,A_x = k = 100 - \frac{6\,P}{(x)}.$$

Si l'on pose $k = \mathbf{a}$, l'équation (16) donne pour la prime nivelée correspondante, $\mathbf{a}$, ou $100\,P_x$ en notation moderne, l'expression

$$\mathbf{a} = 100 \cdot \frac{(x) - i \cdot P}{(x) + P} = 100 \cdot P_x.$$

On voit que la même équation (16) permet de résoudre une quantité d'autres problèmes, puisque l'on peut fixer arbitrairement l'une des deux quantités $\mathbf{a}$ et k qui y figurent, ou encore établir *a priori* entre $\mathbf{a}$ et k une relation à volonté. Si, au lieu de 100 roubles, la somme assurée était laissée quelconque $= C$, la variété des problèmes résolubles par la même équation (16) serait bien plus grande encore.

Dans l'équation (16), le symbole (x) a la signification expliquée ci-dessus au § 23 (voir le mémoire 334), et P est défini comme suit:

$$P \equiv \frac{(x+1)}{\lambda} + \frac{(x+2)}{\lambda^2} + \frac{(x+3)}{\lambda^3} + \cdots$$

1) Le terme de *mort* est pris ici, comme souvent chez EULER, dans le sens de décès.

où λ représente le facteur de capitalisation $(1 + i)$. En introduisant la notation moderne, on voit que

$$\frac{P}{(x)} = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \mathbf{a}_x - 1 = a_x.$$

Donc, P a ici la même signification que dans le mémoire 599 équation (12).

L'équation (16) étant divisée par (x) devient, en notation moderne,

$$k + \mathbf{a} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x} = 100\left\{1 - i \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x}\right\} \tag{17}$$

ou encore, en tenant compte de (7),

$$k + \mathbf{a} \cdot a_x = 100\,(1 - i \cdot a_x).$$

Appliquant ces formules, Euler a calculé une table qui donne, pour les âges x divisibles par 5, le prix de revient $100\,A_x$ et la prime annuelle viagère correspondante $100\,P_x$, les bases techniques étant la table de mortalité de Kersseboom et le taux annuel de 5 %.

A plusieurs reprises, Euler insiste sur la nécessité de ce que l'on appelle une *réserve de sûreté* pouvant contrebalancer l'effet des écarts entre la mortalité réelle et celle indiquée par la table; pour constituer cette réserve, il propose: 1°) une différence entre le taux technique de l'intérêt et le taux effectif; 2°) un chargement des primes; 3°), comme dans le cas des tontines, une légère diminution des rentes; 4°), comme dans le mémoire 403, un «vieillissement statistique» des hommes et un «rajeunissement statistique» des femmes.

§ 31. C'est dans la troisième partie des *Eclaircissemens* qu'Euler développe une des idées les plus originales qu'il ait eues dans ce domaine, le *Plan d'une nouvelle espèce de Tontine, aussi favorable au Public qu'utile à l'Etat.* On connaît le principe des tontines d'Etat ordinaires: Un grand nombre de personnes forment une société fermée qui verse à l'Etat, à capital abandonné, une certaine somme, en échange de laquelle l'Etat paye chaque année une rente de montant fixe s, à répartir entre les sociétaires survivants. Comme le nombre de ceux-ci diminue constamment par suite de décès et que la somme à répartir annuellement, s, reste la même, la part de chaque sociétaire augmente d'année en année, sans qu'on puisse dire à l'avance de combien. Les sociétaires survivants sont les héritiers des membres décédés, du moins pour ce qui concerne ces rentes. Le dernier qui demeure de la société reçoit à lui seul toute la somme s jusqu'à sa mort, et après l'extinction totale de la société, le capital versé reste acquis à l'Etat.

Euler a imaginé une tontine perpétuelle dont l'accès est ouvert en tout temps et à n'importe qui, où les membres peuvent savoir à l'avance de combien leurs rentes augmen

teront chaque année. C'est la théorie de cette institution qui se trouve exposée dans les pages en question. Deux grandes tables numériques, calculées au taux technique de 5 %, indiquent «Combien une personne d'un âge quelconque peut toucher d'intérêts croissans annuels pour un capital de 1000 roubles, mis à fond perdû, à la manière des Tontines». La deuxième table est «rectifiée à l'usage public». EULER y suppose que le 20 % des accroissements de rentes produits par le fait du décès de membres tourne au profit de l'établissement, ce qui revient à diminuer de $\frac{n}{5} - 10$ les rentes du montant de n. Dans l'extrême vieillesse, les rentes des survivants atteignent des chiffres énormes.

L'idée des tontines a séduit EULER à plusieurs reprises. Preuve en soit le fragment *Sur le calcul des rentes tontinières,* publié pour la première fois dans le présent volume, d'après un manuscrit en possession de Monsieur D.-E. SMITH à New-York. Il s'agit probablement d'une expertise réclamée par le roi de Prusse FRÉDÉRIC II, qui eut souvent recours aux lumières du grand mathématicien appelé par lui à Berlin pour y réorganiser l'Académie des sciences. (Voir le commencement du § 10 de cette préface.) Le manuscrit eulérien est un brouillon où parfois chiffres et formules s'entrecroisent dans divers sens; j'ai dû par endroit relier par un texte sommaire des chiffres dont on ne voit pas immédiatement la signification, d'autant moins que l'ordre des feuillets manuscrits n'est pas indiqué. EULER développe l'idée de la tontine ordinaire, mais en lui faisant subir diverses modifications. La plus importante se rapporte aux montants des rentes croissantes. La répartition d'une somme constante entre les sociétaires survivants produit des rentes fabuleuses pour l'extrême vieillesse. EULER se propose d'augmenter les rentes des premières années aux dépens de celles des dernières. Il y parvient en répartissant entre les rentiers survivants non pas une somme annuelle constante (comme c'est le cas dans la tontine ordinaire), mais des sommes qui vont en diminuant d'année en année, une fois selon les termes d'une progression arithmétique, une autre fois en progression géométrique. En plus de la théorie, le mémoire contient de nombreuses tables numériques, résumées finalement en un grand tableau qui indique «Combien pro cento on payera aux tontiniers de chaque âge, de 5 à 5 ans, depuis le commencement.» Le maximum est 500% de la prime unique versée au début à capital abandonné.

§ 32. En résumé, dans le domaine spécial des assurances sur la vie humaine, EULER a traité les problèmes suivants:

1) Conversion d'un capital C en rente viagère immédiate, $\frac{C}{a_x}$.

2) Conversion d'un capital C en rente viagère différée de n années, $\frac{C}{{}_{n|}a_x}$.

3) Calcul du prix de revient d'une rente viagère constante et immédiate, a_x, avec une table de ces prix.

4) Calcul du prix d'une rente viagère constante différée de n années, ${}_{n|}\mathbf{a}_x$, avec des tables qui donnent ${}_{10|}\mathbf{a}_x$ et ${}_{20|}\mathbf{a}_x$.

5) Calcul d'une rente de survie unilatérale (rente de veuve); détermination de son prix de revient net $a_{x|y}$ et de la prime annuelle nivelée correspondante $P_{xy}(a_{x|y})$ exigible jusqu'au *premier* décès.

6) Calcul de l'assurance simple au décès; détermination de sa valeur actuelle A_x et de la prime échelonnée correspondante P_x, exigible jusqu'à la mort de l'assuré (x), avec des tables numériques.

7) Calcul d'une assurance au décès reposant sur deux têtes jointes $(\overline{xy})$; détermination de sa valeur actuelle $A_{\overline{xy}}$ et de la prime annuelle nivelée correspondante $P_{\overline{xy}}$, exigible jusqu'au *dernier* décès.

8) Calcul de rentes qui croissent à la manière des tontines, dans divers cas très variés, avec de nombreuses tables numériques.

Ce sont les combinaisons les plus utiles, celles qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique, qui ont été traitées par cet esprit universel d'une façon claire, à l'aide d'une méthode nouvelle aussi féconde qu'originale et qui révèle toute sa puissance presque un siècle et demi après la mort du grand savant.

Je ne voudrais pas terminer la préface de ce volume sans exprimer ma sincère gratitude à mes collègues du Comité de rédaction, tout particulièrement à Monsieur le professeur RUDIO, rédacteur en chef, et à Monsieur le professeur KRAZER. Les difficultés à vaincre étaient plus grandes et plus nombreuses dans ce tome que dans d'autres volumes de l'Edition complète des Oeuvres d'EULER. C'est grâce à une inlassable minutie alliée à un désintéressement toujours renouvelé et à une persévérance sans borne que nos efforts réunis ont été couronnés de succès. Enfin, j'ai l'agréable devoir d'exprimer ma profonde reconnaissance à la Maison d'édition B. G. TEUBNER pour tous les soins qu'elle a apportés à la publication de ce volume.

Neuchâtel, juin 1923.

L.-GUSTAVE DU PASQUIER.

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis Enestroemiani commentationes
53, 201, 309, 313, 334, 335, 338, 403, 412, 473, 476, 488, 530, 599, 600, 628, 738, 795, 811, 812, 813

SOLUTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS

Commentatio 53 indicis ENESTROEMIANI
Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1736), 1741, p. 128—140

1. Praeter illam geometriae partem, quae circa quantitates versatur et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit LEIBNITZIUS[1]), quam *Geometriam situs* vocavit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum neque calculo quantitatum utendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs geometriam pertineant et quali methodo in iis resolvendis uti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, ut neque determinationem quantitatum requireret neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitavi, praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit usus. Methodum ergo meam, quam ad huius generis problemata solvenda inveni, tanquam specimen Geometriae situs hic exponere constitui.

1) Vide epistolam a G. LEIBNIZ (1646—1716) ad CHR. HUYGENS (1629—1695) scriptam d. 8. Sept. 1679, *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, Erste Abt, Bd. 2, Berlin 1850, p. 17—20, imprimis p. 19, Beilage p. 20—25. Epistola, qua HUYGENS respondit d. 22. Nov. 1679, invenitur ibidem p. 27. Vide porro G. LEIBNIZ, *De analysi situs. LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, Zweite Abt., Bd. 1, Halle 1858, p. 178—183. L. G. D.

2. Problema autem hoc, quod mihi satis notum esse perhibebatur, erat sequens: Regiomonti in Borussia esse insulam *A*, *der Kneiphof* dictam, fluviumque eam cingentem in duos dividi ramos, quemadmodum ex figura (Fig. 1) videre licet; ramos vero huius fluvii septem instructos esse pontibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et *g*. Circa hos pontes iam ista proponebatur quaestio, num quis cursum ita instituere queat, ut per singulos pontes semel et non plus quam semel transeat. Hocque fieri posse, mihi dictum est, alios negare alios dubitare; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi sequens maxime generale formavi problema: quaecunque sit fluvii figura et distributio in ramos atque quicunque fuerit numerus pontium, invenire, utrum per singulos pontes semel tantum transiri queat an vero secus.

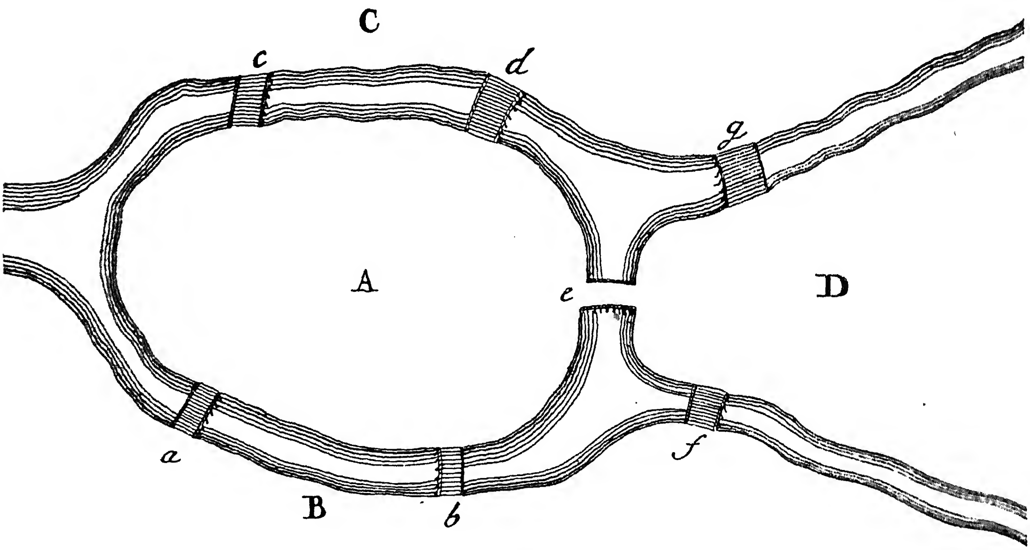

Fig. 1.

3. Quod quidem ad problema Regiomontanum de septem pontibus attinet, id resolvi posset facienda perfecta enumeratione omnium cursuum, qui institui possunt; ex his enim innotesceret, num quis cursus satisfaceret an vero nullus. Hic vero solvendi modus propter tantum combinationum numerum et nimis esset difficilis atque operosus et in aliis quaestionibus de multo pluribus pontibus ne quidem adhiberi posset. Hoc porro modo si operatio ad finem perducatur, multa inveniuntur, quae non erant in quaestione; in quo procul dubio tantae difficultatis causa consistit. Quamobrem missa hac me-

thodo in aliam inquisivi, quae plus non largiatur, quam ostendat, utrum talis cursus institui queat an secus; talem enim methodum multo simpliciorem fore sum suspicatus.

4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo singulos pontium transitus designandi, in quo utor litteris maiusculis A, B, C, D singulis regionibus adscriptis, quae flumine sunt separatae. Ita, si quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem a sive b, hunc transitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem, ex qua exierat viator, posterior vero dat regionem, in quam pontem transgressus pervenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem f, hic transitus repraesentabitur litteris BD; duos autem hos transitus successive institutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B designat tam regionem, in quam primo transitu pervenit, quam regionem, ex qua altero transitu exit.

5. Simili modo si viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem g, hos tres transitus successive factos quatuor litteris $ABDC$ denotabo. Ex his enim quatuor litteris $ABDC$ intelligetur viatorem primo in regione A existentem transiisse in regionem B, hinc esse progressum in regionem D ex hacque ultra esse profectum in C; cum vero hae regiones fluviis sint a se invicem separatae, necesse est, ut viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes successive instituti quinque litteris denotabuntur; et si viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui unitate est maior quam numerus pontium, denotabitur. Quare transitus per septem pontes ad designandum octo requirit litteras.

6. In hoc designandi modo non respicio, per quos pontes transitus sit factus, sed si idem transitus ex una regione in aliam per plures pontes fieri potest, perinde est, per quemnam transeat, modo in designatam regionem perveniat. Ex quo intelligitur, si cursus per septem figurae pontes ita institui posset, ut per singulos semel ideoque per nullum bis transeatur, hunc cursum octo litteris repraesentari posse easque litteras ita esse debere dispositas, ut immediata litterarum A et B successio bis occurrat, quia sunt duo pontes a et b has regiones A et B iungentes; simili modo successio litterarum A et C quoque debet bis occurrere in illa octo litterarum serie; deinde successio litterarum A et D semel occurret similiterque successio litterarum B et D itemque C et D semel occurrat necesse est.

7. Quaestio ergo huc reducitur, ut ex quatuor litteris A, B, C et D series octo litterarum formetur, in qua omnes illae successiones toties occurrant, quoties est praeceptum. Antequam autem ad talem dispositionem opera adhibeatur, ostendi convenit, utrum tali modo hae litterae disponi queant an non. Si enim demonstrari poterit talem dispositionem omnino fieri non posse, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam investigavi, cuius ope tam pro hac quaestione quam pro omnibus similibus facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

8. Considero ad huiusmodi regulam inveniendam unicam regionem A, in quam quotcunque pontes a, b, c, d etc. conducant (Fig. 2). Horum pontium contemplor primo unicum a, qui ad regionem A ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat, vel ante transitum esse debuit in regione A vel post transitum in A perveniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet, ut littera A semel occurrat. Si tres pontes, puta a, b, c, in regionem A conducant et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera A bis occurret, sive ex A initio cursum instituerit sive minus. Simili modo si quinque pontes in A conducant, in designatione transitus per eos omnes littera A ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicunque numerus impar, tum, si is unitate augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera A occurrere debeat.

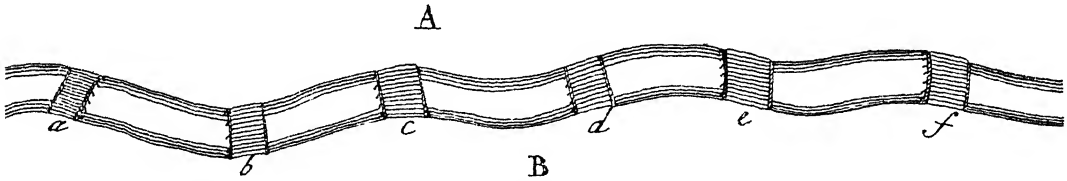

Fig. 2.

9. In casu igitur pontium transeundorum Regiomontano (Fig. 1), quia in insulam A quinque pontes deducunt a, b, c, d, e, necesse est, ut in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere similique modo littera D bis debet occurrere atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero B, C et D unaquaeque bis; id quod in serie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perspicuum est per septem pontes Regiomontanos talem transitum institui non posse.

10. Simili modo de omni alio casu pontium, si quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit, fuerit impar, iudicari potest, an per singulos pontes transitus semel fieri queat. Si enim evenit, ut summa omnium vicium, quibus singulae litterae occurrere debent, aequalis sit numero omnium pontium unitate aucto, tum talis transitus fieri potest; sin autem, ut in nostro exemplo accidit, summa omnium vicium maior fuerit numero pontium unitate aucto, tum talis transitus nequaquam institui potest. Regula autem, quam dedi pro numero vicium A ex numero pontium in regionem A deducentium inveniendo, aeque valet, sive omnes pontes ex una regione B, ut in figura (Fig. 2) repraesentatur, ducant sive ex diversis; tantum enim regionem A considero et inquiro, quot vicibus littera A occurrere debeat.

11. Si autem numerus pontium, qui in regionem A conducunt, fuerit par, tum circa transitum per singulos notandum est, utrum initio viator cursum suum ex regione A instituerit an non. Si enim duo pontes in A conducant et viator ex A cursum inceperit, tum littera A bis occurrere debet; semel enim adesse debet ad designandum exitum ex A per alterum pontem et semel quoque ad designandum reditum in A per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione cursum inceperit, tum semel tantum littera A occurret; semel enim posita tam adventum in A quam exitum inde denotabit, ut huiusmodi cursus designare statui.

12. Conducant iam quatuor pontes in regionem A et viator ex A cursum incipiat; tum in designatione totius cursus littera A ter adesse debebit, si quidem per singulos semel transierit. At si ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera A occurret. Si sex pontes ad regionem A conducant, tum littera A, si ex A initium eundi est sumptum, quater occurret, at si non ex A initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debebit. Quare generaliter: si numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera A occurrere debet, si initium non est in regione A sumptum; dimidium vero unitate auctum dabit numerum vicium, quoties littera A occurrere debet, initio cursus in ipsa regione A sumpto.

13. Quia autem in tali cursu nonnisi ex una regione initium fieri potest, ideo ex numero pontium, qui in quamvis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definio, ut

sumam numeri pontium unitate aucti dimidium, si numerus pontium fuerit impar; ipsius vero numeri pontium medietatem, si fuerit par. Deinde si numerus omnium vicium adaequet numerum pontium unitate auctum, tum transitus desideratus succedit, at initium ex regione, in quam impar pontium numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit unitate minor quam pontium numerus unitate auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus unitate est augendus.

14. Proposita ergo quacunque aquae pontiumque figura ad investigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aqua a se invicem diremptas litteris A, B, C etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum eumque unitate augeo atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris A, B, C etc. sibi subscriptis cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducentium. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros, signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia adiicio, imparium vero unitate auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros ultimo scriptos in unam summam coniicio; quae summa si vel unitate minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium unitate auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posse. Hoc vero est tenendum, si summa inventa fuerit unitate minor quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asterisco notata fieri debere; contra vero ex regione non signata, si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, ut sequitur:

Numerus pontium 7, habetur ergo 8.

	Pontes	
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Quia ergo plus prodit quam 8, huiusmodi transitus nequaquam fieri potest.

15. Sint duae insulae A et B aqua circumdatae, qua cum aqua communicent quatuor fluvii, quemadmodum figura (Fig. 3) repraesentat. Traiecto porro sint super aquam insulas circumdantem et fluvios quindecim pontes a, b, c, d etc. et quaeritur, num quis cursum ita instituere queat, ut per

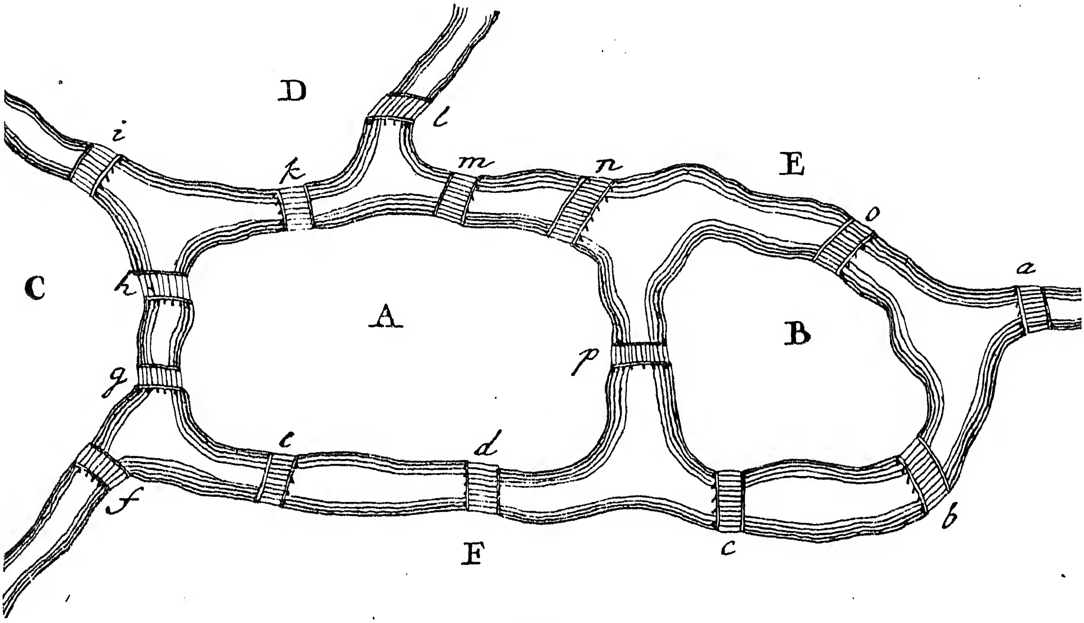

Fig. 3.

omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam semel. Designo ergo primum omnes regiones, quae aqua a se invicem sunt separatae, litteris A, B, C, D, E, F, cuiusmodi ergo sunt sex regiones. Dein numerum pontium 15 unitate augeo et summam 16 sequenti operationi praefigo.

		16
A^*,	8	4
B^*,	4	2
C^*,	4	2
D,	3	2
E,	5	3
F^*,	6	3
		16

Tertio litteras A, B, C etc. sibi invicem subscribo et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt, pono, ut ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros, asterisco noto. Quinto in tertiam columnam scribo parium numerorum dimidia, impares vero unitate augeo et semisses appono. Sexto tertiae columnae numeros invicem addo et obtineo summam 16; quae cum aequalis sit numero supra posito 16, sequitur transitum desiderato modo fieri posse, si modo cursus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non sunt asterisco notatae. Cursus autem ita fieri poterit

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD,$$

ubi inter litteras maiusculas pontes simul collocavi, per quos fit transitus.

16. Hac igitur ratione facile erit in casu quam maxime composito iudicare, utrum transitus per omnes pontes semel tantum fieri queat an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoscendi, qui ex hoc ipso modo non difficulter eruetur, postquam sequentes observationes in medium protulero. Primo autem observo omnes numeros pontium singulis litteris A, B, C etc. adscriptos simul sumptos duplo maiores esse toto pontium numero. Huius rei ratio est, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad utramque regionem, quas iungit.

17. Sequitur ergo ex hac observatione summam omnium pontium, qui in singulas regiones conducunt, esse numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non potest, ut inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium unicus sit impar; neque etiam, ut tres sint impares, neque quinque etc. Quare si qui pontium numeri litteris A, B, C etc. adscripti sunt impares, necesse est, ut eorum numerus sit par; ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum A, B, C, D adscripti, uti ex § 14 videre licet; atque in exemplo praecedente, § 15, duo tantum sunt numeri impares, litteris D et E adscripti.

18. Cum summa omnium numerorum litteris A, B, C etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifestum est illam summam binario auctam et per 2 divisam dare numerum operationi praefixum. Si igitur

omnes numeri litteris A, B, C, D etc. adscripti fuerint pares et eorum singulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum summa unitate minor quam numerus praefixus. Quamobrem his casibus semper transitus per omnes pontes fieri potest. In quacunque enim regione cursus incipiatur, ea habebit pontes numero pares ad se conducentes, uti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri potest, ut quis per omnes pontes bis transgrediatur; quilibet enim pons quasi in duos erit divisus numerusque pontium in quamvis regionem ducentium erit par.

19. Praeterea, si duo tantum numeri litteris A, B, C etc. adscripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum semper desideratus transitus succedet, si modo cursus ex regione, ad quam pontium impar numerus tendit, incipiatur. Si enim pares numeri bisecentur atque etiam impares unitate aucti, uti praeceptum est, summa harum medietatum unitate erit maior quam numerus pontium ideoque aequalis ipsi numero praefixo.

Ex hocque porro perspicitur, si quatuor vel sex vel octo etc. fuerint numeri impares in secunda columna, tum summam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo eumque excedere vel unitate vel binario vel ternario etc. et idcirco transitus fieri nequit.

20. Casu ergo quocunque proposito statim facillime poterit cognosci, utrum transitus per omnes pontes semel institui queat an non, ope huius regulae:

Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus est impar, tum certo affirmari potest talem transitum non dari.

Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus est impar, tunc transitus fieri poterit, si modo cursus in altera harum regionum incipiatur.

Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum transitus desiderato modo institui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur.

Hac igitur data regula problemati proposito plenissime satisfit.

21. Quando autem inventum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest, quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti utor regula: tollantur cogitatione, quoties fieri potest, bini pontes, qui ex una regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur; tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos; quo invento pontes cogitatione sublati hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse iudico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.

CALCUL DE LA PROBABILITE DANS LE JEU DE RENCONTRE[1)]

Commentatio 201 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [7] (1751), 1753, p. 255—270

1. Le jeu de rencontre est un jeu de hazard où deux personnes, ayant chacune un entier jeu de cartes, en tirent à la fois une carte après l'autre, jusqu'à ce qu'il arrive qu'elles rencontrent la même carte; et alors une des deux personnes gagne. Or, lorsqu'une telle rencontre n'arrive point du tout, alors c'est l'autre des deux personnes qui gagne. Cela posé, on demande la probabilité que l'une et l'autre de ces deux personnes aura de gagner.

2. Pour fixer mieux nos idées, on peut supposer que ces deux personnes, dont l'une soit nommée A et l'autre B, ayent chacune un certain et même nombre de billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, 5 etc., et que chacune en tire un billet après l'autre, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le même numero à la fois; et que ce soit la personne A qui gagne alors. Or, s'il arrive que ces deux personnes tirent tous leurs billets sans rencontrer jamais le même nombre, que la personne B gagne.

3. Comme il est indifférent de quel numero chaque billet soit marqué, il est permis de supposer que A tire ses billets selon l'ordre 1, 2, 3, 4, 5 etc. Ou, pour faire l'application aux cartes, on concevra les cartes de l'un et l'autre jeu tellement numerotées, selon l'ordre comme elles sont tirées successivement par A, de sorte que n^{ro}. 1 sera la carte que A tire la premiere, n^{ro}. 2 celle qu'il tire la seconde, n^{ro}. 3 la troisieme et ainsi de suite.

---

1) Voir aussi les mémoires 313, 811 et 813 de ce volume. L. G. D.

4. Ainsi la personne A, qui est pour la rencontre, gagnera, lorsque B tire de son paquet de cartes: au premier coup n^{ro}. 1, ou au second n^{ro}. 2, ou au troisième n^{ro}. 3, ou au quatrième n^{ro}. 4 etc. Or, s'il arrive que le numero de la carte tirée par B ne répond jamais au numero de la carte tirée par A au même coup, ce sera alors B qui gagne le dépôt. Par ce moyen, il semble que la recherche de ce jeu est renduë la plus aisée pour y appliquer le calcul.

5. La question est donc de déterminer la probabilité qu'aura tant A que B pour gagner le dépôt, quel que soit le nombre des cartes ou des billets numerotés. Car on voit d'abord que cette détermination varie selon le nombre des billets et qu'elle devient d'autant plus compliquée, plus le nombre des billets sera grand. Il conviendra donc de commencer cette recherche par les plus petits nombres de billets et d'en partir pour arriver successivement à de plus grands.

6. Supposons donc d'abord que l'un et l'autre des joüeurs n'ait qu'une seule carte marquée de 1, et il est clair que la rencontre ne sauroit manquer, de sorte que A gagnera infailliblement. Dans ce cas donc, la probabilité de gagner de A sera exprimée par 1 et celle de B par 0, puisque celui-cy n'a aucune espérance de gagner.

7. Que l'un et l'autre des joüeurs A et B ait maintenant deux cartes, numerotées de 1 et 2, et que A tire ses cartes selon les numeros 1 et 2. Dans cette supposition il y aura deux cas, car B tirera ses deux cartes ou dans l'ordre 1, 2 ou dans l'ordre 2, 1. Le premier, donnant d'abord au premier coup une rencontre, fera gagner A; l'autre ne donnant aucune rencontre fera gagner B.

8. Puisque donc l'un et l'autre de ces deux cas est également probable, tant A que B auront chacun un cas pour gagner. Et partant, la probabilité de l'un et de l'autre sera exprimée par $\frac{1}{2}$, ou bien chacun aura droit de prétendre à la moitié du dépôt.

9. Posons que les deux joüeurs ayent chacun trois cartes, marquées des nombres 1, 2, 3, et que A tire en premier lieu n^{ro}. 1, en second n^{ro}. 2,

en troisieme nr°. 3. Or, B pourra tirer ses cartes en 6 manieres différentes, de la sorte:

A	B					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

et il y a également de probabilité que chacun de ces 6 cas arrive actuellement.

10. De ces 6 cas, il y en aura donc deux, le premier et le second, qui feront gagner A et où le jeu finit par conséquent au premier coup; des quatre autres cas, il n'y en a qu'un, savoir le cinquieme, qui fera gagner A au second coup et qui y finit le jeu. Parmi les trois autres cas, il y a encore le troisieme, qui fait gagner A au troisieme coup.

11. Ainsi en tout, parmi tous les 6 cas possibles, il y en a quatre qui sont favorables à A, et les deux autres, savoir le quatrieme et le sixieme, mettront B en possession du gain. Donc, A ayant quatre cas pour gagner et B deux, l'espérance de A est $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et celle de $B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; ou l'avantage de A est deux fois plus grand que celui de B.

12. Donnons maintenant à chacun de nos jouëurs 4 cartes 1, 2, 3, 4; et pendant que A tire ses cartes dans l'ordre 1, 2, 3, 4, l'ordre des cartes de B peut varier en 24 manieres différentes, de la sorte:

A	B																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	1	1	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	3	4	4	2	2	3	4	1	1	3	4	3	1	2	2	4	1	4	2	3	3	1	1	2
4	4	3	2	4	3	2	1	4	3	1	3	4	2	1	4	2	4	1	3	2	1	3	2	1

et chacun de ces 24 cas est également possible.

13. Il est évident que les six premiers cas font d'abord gagner A au premier coup; et puisque le jeu s'y finit, j'ai rayé les nombres suivans de ces 6 colonnes. Des 18 cas qui restent, il y en a 4, savoir les cas 17, 18, 21 et 22, qui font gagner A au second coup, où ces colonnes seront par conséquent terminées. Quatorze cas continueront donc le jeu jusqu'au troisieme coup; et il y en a trois, 10, 12 et 20, qui terminent le jeu en faveur de A. Enfin des onze cas du reste, il n'y en a que deux qui donnent une rencontre pour le quatrieme et dernier coup.

14. Ayant donc 6 cas où A gagne au premier coup, 4 cas où il gagne au second coup, trois cas où il gagne au troisieme coup et deux cas où il gagne au quatrieme coup, il y aura en tout 15 cas favorables à A, et les 9 autres cas feront gagner B. Par conséquent, la probabilité de gagner de A sera $=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$ et celle de B $=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$; ou bien l'espérance de A sera à celle de B comme 5 à 3.

15. Si nous posons le nombre des cartes $=5$, on auroit en tout 120 cas différens pour les variations qui pourroient arriver dans l'ordre des cartes tirées par B, pendant que A tireroit ses cartes selon les numeros 1, 2, 3, 4, 5. Or, cela meneroit trop loin, si nous voulions représenter tous ces cas, pour voir combien en seroient favorables à A et à B; et un encore plus grand nombre de cartes rendroit cette représentation tout à fait impraticable.

16. D'ailleurs, un tel dénombrement actuel ne serviroit pas beaucoup à déterminer en général les espérances des deux joueurs A et B, quelque grand que soit le nombre des cartes. Pour cet effet, il faut faire des remarques générales qui nous puissent conduire à la connoissance des [probabilités pour les] plus grands nombres de cartes, sachant déjà les probabilités pour les plus petits nombres.

17. Je remarque donc premierement en général que, le nombre des cartes étant $=m$, il y aura autant de cas différens que le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4 jusqu'à m contient d'unités; ou bien ce nombre de cas est

$$=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m.$$

Or, je suppose toujours que A tire ses cartes selon l'ordre des numeros 1, 2, 3, 4, ... m, dont elles sont marquées, et le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m$ donnera le nombre des cas qui peuvent arriver dans l'ordre des cartes tirées par B.

18. Cela est clair par les premiers principes des combinaisons, d'où l'on sait que l'ordre de 2 cartes peut varier 2 fois, de 3 cartes 6 fois, de 4 cartes 24 fois, de 5 cartes 120 fois, de 6 cartes 720 fois, de 7 cartes 5040 fois, de 8 cartes 40320 fois, et en général de m cartes autant de fois que le produit

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m$$

contient d'unités.

19. Ce nombre de cas $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m$ étant posé pour abréger $= M$, je remarque, en second lieu, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la premiere carte tirée par B est 1, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la premiere carte tirée par B est 2, et qu'il y aura autant de cas où la premiere carte de B est ou 3 ou 4 ou 5 etc., ou enfin m.

20. De plus, si nous faisons abstraction que le jeu finit aussitôt que B aura rencontré la carte de A, et que nous supposions qu'ils continuent à tirer leurs cartes jusqu'à la fin, quoiqu'il y fût arrivé une ou plusieurs rencontres, il est aussi clair qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la seconde carte de B sera 2, et autant de cas où la troisieme carte sera 3 ou la quatrieme 4 ou la cinquieme 5 ou la sixieme 6, et ainsi de suite.

21. Donc, dans cette supposition qu'on continuë de tirer les cartes jusqu'à la fin, il y aura $\frac{M}{m}$ cas que A gagne au premier coup, de même $\frac{M}{m}$ cas qu'il gagne au second coup, et toujours autant de cas qu'il gagne au troisieme coup ou au quatrieme ou au cinquieme etc., ou même au dernier coup.

22. Mais en effet, quoiqu'il y ait $\frac{M}{m}$ cas qui font gagner A au premier coup, il n'y aura pas autant de cas qui le font gagner au second coup, puisque des $\frac{M}{m}$ cas qui le feroient gagner au second coup, dans la supposition

précédente, il faut retrancher ceux qui l'ont déjà fait gagner au premier coup; car, dès qu'il aura gagné au premier coup, le jeu ne se continuë pas au delà.

23. Il en est de même du nombre $\frac{M}{m}$ de cas où B tireroit la carte n^{ro}. 3; car il en faut retrancher les cas qui ont déjà rencontré, ou au premier coup ou au second. Et pour que A gagne au quatrieme coup, il faut ôter du nombre de tous les cas où cela arrive, qui est $=\frac{M}{m}$, ceux qui auront déjà eu une rencontre, ou dans le premier ou dans le second ou dans le troisieme coup.

24. En général donc, le nombre des cas qui feroient gagner A à un coup quelconque étant $=\frac{M}{m}$, dans l'hypothese précédente, il en faut exclure tous ceux où il s'est déjà trouvé une rencontre dans quelqu'un des coups précédens; de sorte que le nombre des cas devient de plus en plus moindre, plus le coup est éloigné du commencement.

25. Pour juger donc de combien il faut diminuer le nombre des cas favorables $\frac{M}{m}$ à chaque coup, ou pour en connoitre le nombre de ceux qui ont déjà eu une rencontre dans quelque coup précédent, voilà comme je m'y prends. Je conçois que la carte qui se rencontre au coup proposé soit ôtée de l'un et de l'autre jeu, et l'ordre des cartes et le nombre des cas sera le même que si le nombre des cartes étoit d'une unité moindre.

26. Pour rendre cela plus intelligible, considérons le cas de 4 cartes et des 24 cas qui y ont lieu, ceux où B tire au troisieme coup la carte n^{ro}. 3, qui sont les cas marqués 1, 6, 10, 12, 20, 21. Otons de ces cas la carte marquée n^{ro}. 3, et nous aurons

A	B					
1	1	1	2	2	4	4
2	2	4	4	1	1	2
4	4	2	1	4	2	1

qui sont précisément les cas qu'on auroit pour trois cartes marquées des nombres 1, 2, 4.

27. Puisque ce sont les cas où B tire au troisieme coup la carte n$^{\text{ro}}$. 3, et qu'il en faut retrancher ceux qui ont déjà eu une rencontre, ou dans le premier coup ou dans le second, il est clair que ce nombre à retrancher se trouve des cas de trois cartes, en ajoutant ensemble les cas où A gagneroit alors au premier coup et au second.

28. En général donc, si le nombre des cartes est $= m$ et qu'on veuille savoir de combien il faut diminuër le nombre des cas, $\frac{M}{m}$, qui ont une rencontre à un coup quelconque, il faut avoir recours au nombre des cartes $= m - 1$ et en chercher les cas qui feroient gagner A à quelqu'un des coups précédens; et le nombre de tous ces cas ensemble sera celui dont il faut diminuer le nombre $\frac{M}{m}$, pour avoir le nombre des cas qui feront gagner actuellement A à un coup proposé.

29. Posons donc le nombre des cartes $= m$ et le nombre de tous les cas qui lui convient

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m = M,$$

et soit

a le nombre des cas qui font gagner A au premier coup,
b au second coup,
c au troisieme coup,
d au quatrieme coup,
e au cinquieme coup
etc.,

et nous avons vû que $a = \frac{M}{m}$; pour les autres nombres b, c, d, e etc., nous verrons bientôt leur progression.

30. Soit maintenant le nombre des cartes d'une unité plus grand, ou $= m + 1$, et le nombre de tous les cas sera

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (m + 1) = M(m + 1),$$

qui soit $= M'$. Soit ensuite comme auparavant

a' le nombre des cas qui font gagner A au premier coup,

b' au second coup,

c' au troisieme coup,

d' au quatrieme coup,

e' au cinquieme coup

etc.

31. Cela posé, nous aurons

$$a' = \frac{M'}{m+1} = M;$$

et en continuant le jeu, nonobstant les rencontres déjà arrivées, il y aura M cas aussi où arriveroit une rencontre au second coup; mais de ceux-ci, il faut exclure ceux qui ont déjà eu une rencontre au premier coup; et, ce nombre étant $= a$, comme nous avons vû (§ 29), nous aurons

$$b' = M - a$$

pour le nombre des cas qui font actuellement gagner A au second coup.

32. Le nombre des cas où la rencontre arrive au troisieme coup étant aussi $= M$, et qu'il en faut exclure ceux qui ont déjà eu de rencontre dans le premier ou second coup, c'est à dire ceux qui feroient gagner A au premier ou second coup lorsque le nombre des cartes seroit d'une moindre, nous aurons le nombre des cas qui feront actuellement gagner A au troisieme coup

$$c' = M - a - b.$$

33. Il en est de même des cas qui feront gagner A à quelqu'un des coups suivans; et partant, en connoissant les nombres a, b, c, d etc. pour le nombre des cartes $= m$, nous en tirerons aisément les nombres a', b', c', d' etc., lorsque le nombre des cartes est $= m + 1$. Car on aura

$$a' = M,$$
$$b' = M - a,$$
$$c' = M - a - b,$$
$$d' = M - a - b - c,$$
$$e' = M - a - b - c - d$$
etc.

34. Sachant donc que, lorsque le nombre des cartes est $m = 1$ et $M = 1$, il est $a = 1$, on aura pour deux cartes

$$a' = 1 \quad \text{et} \quad b' = 1 - 1 = 0.$$

Soit maintenant $m = 2$; et ayant $M = 2$, $a = 1$, $b = 0$, on aura pour trois cartes

$$a' = 2, \quad b' = 2 - 1 = 1, \quad c' = 2 - 1 - 0 = 1.$$

Posons de plus $m = 3$; et ayant $M = 6$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, nous aurons pour quatre cartes

$$a' = 6, \quad b' = 6 - 2 = 4, \quad c' = 6 - 2 - 1 = 3, \quad d' = 6 - 2 - 1 - 1 = 2.$$

35. De cette façon, nous pourrons continuer ces nombres à des nombres de cartes aussi grands qu'on voudra, et pour en voir mieux la progression, représentons-les de la manière suivante:

NOMBRE DES CARTES

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
a	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
b	—	0	1	4	18	96	600	4320	35280	322560
c	—	—	1	3	14	78	504	3720	30960	287280
d	—	—	—	2	11	64	426	3216	27240	256320
e	—	—	—	—	9	53	362	2790	24024	229080
f	—	—	—	—	—	44	309	2428	21234	205056
g	—	—	—	—	—	—	265	2119	18806	183822
h	—	—	—	—	—	—	—	1854	16687	165016
i	—	—	—	—	—	—	—	—	14833	148329
k	—	—	—	—	—	—	—	—	—	133496

36. Si nous divisons ces nombres par les nombres de tous les cas possibles qui répondent à chaque nombre de cartes, nous en tirerons premierement les espérances de A pour gagner au premier coup:

Nombre des cartes	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	etc.
Espérance de A	1,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{9}$	etc.

D'où nous concluons que, si le nombre des cartes est $= n$, l'espérance de A de gagner au premier coup sera $= \frac{1}{n}$.

37. Si nous considérons les nombres de la table (§ 35), nous voyons d'abord que chaque nombre est la différence de celui qui est au dessus et de celui qui le précède. Ainsi, si pour le nombre des cartes m le nombre des cas qui font gagner A à un certain coup, est p, et le nombre des cas qui le font gagner au même coup, si le nombre des cartes est $= m + 1$, soit $= q$, et le nombre des cas qui le font gagner au coup suivant, $= r$, le nombre des cartes demeurant $= m + 1$, on aura toujours

$$r = q - p.$$

38. Donc, pour le nombre des cartes $= m$, le nombre de tous les cas étant

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m = M,$$

l'espérance de A de gagner à un certain coup sera

$$= \frac{p}{M},$$

que je nommerai $= P$. Or, pour le nombre des cartes $= m + 1$, le nombre de tous les cas étant

$$= M(m + 1),$$

l'espérance de A de gagner au même coup sera

$$= \frac{q}{M(m+1)},$$

qui soit posée $= Q$, et l'espérance de gagner au coup suivant

$$= \frac{r}{M(m+1)},$$

qui soit $=R$. Cela posé, on aura

$$R=\frac{q-p}{M(m+1)},$$

ou bien

$$R=Q-\frac{P}{m+1}$$

39. Donc, posant le nombre des cartes $=n-1$, puisque l'espérance de A de gagner au premier coup est $=\frac{1}{n-1}$, pour le nombre des cartes $=n$ l'espérance de A de gagner au second coup sera

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-2}{(n-1)n}.$$

40. Or, l'espérance de A de gagner au second coup, quand le nombre des cartes est $=n-1$, étant $\frac{n-3}{(n-2)(n-1)}$, nous en concluons que, lorsque le nombre des cartes est $=n$, son espérance de gagner au troisieme coup sera

$$=\frac{n-2}{(n-1)n}-\frac{n-3}{(n-2)(n-1)n}=\frac{nn-5n+7}{(n-2)(n-1)n}=\frac{(n-2)^2-(n-3)}{n(n-1)(n-2)}.$$

41. De là nous concluons de la même maniere que, pour le nombre des cartes $=n$, l'espérance de A de gagner au quatrieme coup sera

$$=\frac{(n-2)^2-(n-3)}{n(n-1)(n-2)}-\frac{(n-3)^2-(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{(n-2)^2(n-3)-2(n-3)^2+(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

et son espérance de gagner au cinquieme coup

$$=\frac{(n-2)^2(n-3)-2(n-3)^2+(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}-\frac{(n-3)^2(n-4)-2(n-4)^2+(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$
$$=\frac{(n-2)^2(n-3)(n-4)-3(n-3)^2(n-4)+3(n-4)^2-(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

42. Pour peu qu'on réfléchisse sur la formation de ces formules, on trouvera que, le nombre des cartes étant $=n$, l'espérance de A de gagner sera

au premier coup

$$=\frac{1}{n},$$

au deuxieme coup

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n-1)},$$

au troisieme coup

$$=\frac{1}{n}-\frac{2}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)n-2)},$$

au quatrieme coup

$$=\frac{1}{n}-\frac{3}{n(n-1)}+\frac{3}{n(n-1)(n-2)}-\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

au cinquieme coup

$$=\frac{1}{n}-\frac{4}{n(n-1)}+\frac{6}{n(n-1)(n-2)}-\frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-4)},$$

au sixieme coup

$$=\frac{1}{n}-\frac{5}{n(n-1)}+\frac{10}{n(n-1)(n-2)}-\frac{10}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{5}{n\cdots(n-4)}-\frac{1}{n\cdots(n-5)}$$

etc.

43. Donc, l'espérance de A de gagner en général, à quelque coup que ce soit, sera exprimée par la somme de toutes ces formules prises ensemble. Or, le nombre de ces formules étant égal au nombre des cartes n, la somme de tous les premiers termes sera

$$=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

Ensuite, la somme des numérateurs des seconds termes étant

$$=1+2+3+4+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},$$

la somme de tous les seconds termes sera

$$=\frac{1}{1\cdot 2}.$$

De plus, parce que

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

la somme des troisiemes termes est

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},$$

et la somme des quatriemes

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

des cinquiemes

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

et ainsi de suite.

44. De là, il s'ensuit donc que

le nombre des cartes étant	l'espérance de gagner de A sera
1	1
2	$1-\frac{1}{1\cdot 2}$
3	$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$
4	$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
5	$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$
6	$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

prenant de cette suite toujours autant de termes qu'il y a de cartes.

45. L'espérance de A est donc la plus grande au cas d'une carte, et la plus petite au cas de deux cartes. Ensuite on voit que, lorsque le nombre des cartes est impair, l'espérance de A est toujours plus grande que pour tout nombre pair de cartes. Or, si le nombre des cartes est pair, alors l'espérance de A est moindre que pour tout nombre impair de cartes.

46. Ayant trouvé l'espérance de A, on n'a qu'à l'ôter de l'unité pour avoir l'espérance de B; car l'espérance de l'un et de l'autre marque la partie du dépôt à laquelle l'un et l'autre peut prétendre en vertu de la probabilité qu'il a de le gagner tout entier. Ainsi, l'espérance de A étant $= x$, celle de B sera $= 1 - x$.

47. Les formules que je viens de trouver pour l'espérance de A se réduiront aisément à des fractions décimales, d'où l'on jugera mieux de leur véritable valeur. Ainsi, ayant fait ce calcul, je trouve:

nombre des cartes	l'espérance de A	l'espérance de B
1	1,000000000	0,000000000
2	0,500000000	0,500000000
3	0,666666666	0,333333333
4	0,625000000	0,375000000
5	0,633333333	0,366666666
6	0,631944444	0,368055555
7	0,632142857	0,367857143
8	0,632118055	0,367881945
9	0,632120811	0,367879189
10	0,632120536	0,367879464
11	0,632120561	0,367879439
12	0,632120558	0,367879442
13	0,632120559	0,367879441
14	0,632120558	0,367879442
15	0,632120558	0,367879442
etc.	etc.	etc.

48. Donc, si nous négligeons les fractions décimales qui suivent après la neuvieme, on peut dire que, dès que le nombre des cartes est plus grand que 12, les espérances de A et de B ne varient plus, quelque grand que soit le nombre des cartes. Ainsi, lorsque le nombre des cartes n'est pas au-dessous de 12, on pourra dire que l'espérance de A est $= 0{,}632120558$ et celle de $B = 0{,}367879442$.

49. Pourvû donc que le nombre des cartes ne soit pas moindre que 12, l'espérance de A sera toujours à celle de B à peu près comme 12 à 7, ou plus exactement comme 122 à 71, ou encore plus exactement comme 1720 à 1001. Ou bien, parmi 19 jeux qu'on jouë, il y en aura probablement 12 qui font gagner A et 7 qui feront gagner B.

50. Si le nombre des cartes étoit infini, l'espérance de A seroit exprimée par cette serie infinie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}+\text{etc.}$$

et l'espérance de B par celle-cy

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\text{etc.}$$

Or, posant e pour marquer le nombre dont le logarithme est $=1$, on sait que $\frac{1}{e}$ exprime cette dernière serie. Donc, pour le cas $n=\infty$, l'espérance de A sera $=1-\frac{1}{e}$ et celle de [B sera] $=\frac{1}{e}$; mais on a

$$e=2{,}718281828459045235360.$$

51. Substituant cette valeur pour e, on trouvera que l'espérance de A est à celle de B comme

$$1{,}718281828459045235360 \quad \text{à } 1,$$

et cette proportion sera juste aussitôt que le nombre des cartes sera plus grand que 20. Par conséquent, elle sera très exacte pour le cas de ce jeu comme il se jouë ordinairement, en y employant un jeu entier de 52 cartes.

SOLUTION D'UNE QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT SOUMISE A AUCUNE ANALYSE

Commentatio 309 indicis Enestroemiani
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [15] (1759), 1766, p. 310—337
Commentationes arithmeticae 1, 1849, p. 337—355

1. Je me trouvai un jour dans une compagnie où, à l'occasion du jeu d'échecs, quelqu'un proposa cette question:

De parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, sans parvenir jamais deux fois à la même, et en commençant par une case donnée.

On mettoit pour cette fin des jettons sur toutes les 64 cases de l'échiquier, à l'exception de celle où le cavalier devoit commencer sa route; et de chaque case où le cavalier passoit conformément à sa marche, on ôtoit le jetton, de sorte qu'il s'agissoit d'enlever de cette façon successivement tous les jettons. Il faloit donc éviter d'un côté que le cavalier ne revînt jamais à une case vuide, et d'un autre côté il faloit diriger en sorte sa course, qu'il parcourût enfin toutes les cases.

2. Ceux qui croyoient cette question assez aisée firent plusieurs essais inutiles sans pouvoir atteindre au but; après quoi celui qui avoit proposé la question, ayant commencé par une case donnée, a sçu si bien diriger la route, qu'il a heureusement enlevé tous les jettons. Cependant, la multitude des cases ne permettoit pas qu'on ait pu imprimer à la mémoire la route qu'il avoit suivie; et ce n'étoit qu'après plusieurs essais, que j'ai enfin rencontré une telle route qui satisfait à la question; encore ne valoit-elle que pour une certaine case initiale. Je ne me souviens plus, si on lui a laissé la liberté de la choisir lui-même; mais il a très positivement assuré qu'il étoit en état de l'exécuter, quelle que soit la case où l'on voulût qu'il commençât.

3. Pour éclaircir mieux cette question, j'ajouterai ici une route où, en commençant par un coin de l'échiquier, on parcourt toutes les cases:

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	43	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

J'ai marqué ici les cases par l'ordre des nombres suivant lequel elles sont successivement parcourues. Ainsi, le cavalier ayant été posé dans la case 1 saute en 2, de là en 3, et depuis en 4, 5, 6 etc., jusqu'à ce que, venant enfin dans la case 64, il aura passé toutes les cases. Il est évident que cette route satisfait également, quand on veut commencer par quelqu'un des autres angles.

4. En retournant par la même route on pourra aussi commencer par la case 64 et de là, en passant successivement par les cases 63, 62, 61 etc., on parviendra enfin, après avoir parcouru toutes les cases, à celle du coin 1. Mais cette route ne servira de rien, quand on doit commencer par quelque autre case; et alors on sera obligé de chercher par des essais une nouvelle route, dont le commencement soit dans la case donnée. Or, on reconnoitra aisément qu'une telle solution du probleme proposé seroit trop pénible, et ne conviendroit pas au but en vue, où il s'agit de trouver promtement la route qu'il faut suivre. D'ailleurs une telle recherche ne merite aucune attention, à moins qu'elle ne soit fondée sur quelques principes, ou qu'on ne la puisse soumettre à quelque espece d'Analyse qui en dirige les opérations.

5. Ce n'est aussi que dans cette vue que j'ose proposer mes recherches sur cette question, auxquelles j'ai été conduit par une idée toute particuliere que

Mr. Bertrand[1]) de Genève m'a fournie; car, quoiqu'elle soit légere en elle-même et tout à fait étrangere à la Géométrie, elle doit être regardée comme très remarquable, dès qu'on aura trouvé moyen d'y appliquer l'Analyse. Or, je ferai voir qu'elle est susceptible d'une analyse toute particuliere, qui doit mériter d'autant plus d'attention que cette analyse demande des raisonnemens peu usités ailleurs. On convient aisément de l'excellence de l'Analyse, mais on la croit communément bornée à de certaines recherches qu'on rapporte aux Mathématiques; et partant, il sera toujours fort important d'en faire usage dans des matieres qui lui semblent refuser tout accès, puisqu'il est certain qu'elle renferme l'art de raisonner dans le plus haut degré. On ne sauroit donc étendre les bornes de l'Analyse sans qu'on ait raison de s'en promettre de très grands avantages.

6. Or, d'abord je remarque qu'on pourroit satisfaire à la question, si l'on trouvoit une telle route, où la derniere case marquée par 64 seroit éloignée de la premiere, 1, d'un saut de cavalier, de sorte qu'il pourroit sauter de la derniere sur la premiere. Car, ayant trouvé une telle route rentrante en elle-même, on pourra commencer par quelque case que ce soit, et de là continuer la course suivant l'ordre des nombres jusqu'à la case marquée par 64, d'où, en sautant à celle qui est marquée par 1, il acheveroit la course jusqu'à retourner à celle d'où il étoit parti. Or, voilà une telle route rentrante en elle-même:

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

1) Louis Bertrand (1731—1812), professeur à l'académie de Genève, vécut longtemps à Berlin; il y devint membre de l'académie des sciences. L. G. D.

7. Ayant donc bien imprimé à la mémoire une telle route, on sera en état de satisfaire à la question en commençant par une case quelconque. Car, soit par exemple la case marquée par 25 d'où le cavalier doit partir, on n'aura qu'à le faire marcher successivement par les cases 26, 27, 28, ... jusqu'à 64, d'où, passant à la case 1, il poursuivra sa route par les cases 2, 3, 4, ..., jusqu'à ce qu'il soit parvenu à celle qui est marquée par 24; et ainsi, il aura parcouru toutes les cases de l'échiquier. J'indiquerai cette route en représentant les nombres qui marquent les cases, en sorte

$$25 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 24,$$

et il est évident qu'on réussira également en commençant par toute autre case; ainsi cette disposition

$$46 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 45$$

servira, quand on doit commencer par la case 46.

8. Il est aussi évident que la même disposition fournit, pour chaque case où l'on doit commencer, une double route; puisqu'on peut également passer de la case marquée contre l'ordre des nombres jusqu'à celle qui contient 1, et de là, sautant en 64, continuer la course par les cases 63, 62, 61 etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à celle où l'on a commencé. Que le nombre 40 indique la case d'où il faut partir, et on aura ces deux routes à poursuivre

$$40 \cdot 41 \cdots 64 \cdot \ 1 \cdot \ 2 \cdots 39$$

et

$$40 \cdot 39 \cdots \ 1 \cdot 64 \cdot 63 \cdots 41,$$

où la premiere finit par la case 39 et l'autre par 41.

Toute autre disposition rentrante en elle-même fournira les mêmes avantages, et il suffit d'en savoir une seule par coeur; mais on comprendra aisément que ce seroit un ouvrage extrêmement embarrassant que de trouver en tâtonnant par plusieurs essais une telle disposition, et qu'on risqueroit de n'y réussir peut être jamais.

9. Je m'en vais donc expliquer une méthode certaine qui nous conduira infailliblement au but proposé, et par le moyen de laquelle on sera en état de découvrir autant de routes satisfaisantes qu'on voudra; car, quoique le

nombre de ces routes ne soit pas infini, il sera toujours si grand qu'on ne le sauroit jamais épuiser. Mais il faut ici distinguer deux especes de routes, l'une qui parcourt simplement toutes les cases de l'échiquier sans que le cavalier puisse sauter de la derniere à la premiere; l'autre espece est celle des routes rentrantes en elles-mêmes, où le cavalier, après avoir parcouru toutes les cases, peut sauter de la derniere à la premiere. J'ai donné un exemple de la premiere espece dans le § 3 et un de la seconde dans le § 6. L'on peut regarder l'un et l'autre comme trouvé par hazard en tâtonnant; mais la méthode que j'expliquerai servira à en trouver autant qu'on voudra, tant de l'une que de l'autre espece.

10. Comme il est beaucoup plus difficile de trouver par les seuls essais une route de la seconde espece, je commencerai par donner une méthode par le moyen de laquelle on pourra, après avoir trouvé une route de la premiere espece, en découvrir non seulement une, mais plusieurs de la seconde espece. Pour cet effet, je remarque d'abord qu'on peut en plusieurs manieres changer la derniere case, celle du commencement demeurant la même. Considérons la route rapportée § 3; et qu'on marque les cases auxquelles le cavalier pourroit passer de la derniere marquée par 64; or, on verra que ces cases sont 63, 31 et 51, dont la premiere, qui renferme le saut dejà employé à 64, n'est d'aucun usage. Mais, puisqu'on peut passer de la case 31 à la case 64, qu'on fasse ce saut après être parvenu de la case 1 par les cases 2, 3, 4 etc. à celle de 31, et depuis, qu'on poursuive la route par les cases 64, 63, 62 etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à la case 32, qui sera à présent la derniere; cette nouvelle route sera représentée en sorte

$$1 \cdot 2 \cdots 31 \cdot 64 \cdot 63 \cdots 32.$$

11. De même, le saut de 64 à 51 nous donne à connoitre qu'on peut passer de la case 51 à 64; et de là en poursuivant la route par les cases 63, 62 etc., la derniere sera celle qui est marquée par 52; cette route entiere sera donc représentée en sorte

$$1 \cdot 2 \cdots 51 \cdot 64 \cdot 63 \cdots 52.$$

Maintenant, puisque cette derniere case 52 fournit un saut à la premiere, cette route se rapporte à la seconde espece et est rentrante en elle-même; et c'est précisément la route décrite au § 6.

Quand on ne seroit pas encore parvenu à une route rentrante, on pourroit de nouveau transformer celle que nous venons de trouver au § précédent

$$1 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 32,$$

où, la derniere [case] étant 32, le cavalier en peut sauter aux cases

$$43,\ 11,\ 31,\ 33;$$

ainsi, on n'aura qu'à renverser la partie de cette route comprise entre l'un de ces nombres et le dernier 32.

12. Le nombre 43 fournira donc cette nouvelle route

$$1 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 43 \cdot 32 \cdots 42,$$

où la case angulaire 42 est la derniere. Le second nombre, 11, donnera cette route

$$1 \cdots 11 \cdot 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 12,$$

où la case marquée de 12 est à présent la derniere. Le troisieme nombre, 31, rend la route principale d'où nous avons tiré ces nouvelles, savoir

$$1 \cdots 31 \cdot 32 \cdots 64;$$

et le quatrieme nombre, 33, ne change rien dans la route que nous traitons.

La route précédente, qui finissoit par 12, puisque le cavalier peut sauter de 12 à ces cases

$$59,\ 41,\ 11 \text{ et } 13,$$

fournira ces transformées

$$1 \cdots 11 \cdot 32 \cdots 59 \cdot 12 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 60,$$

$$1 \cdots 11 \cdot 32 \cdots 41 \cdot 12 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 42,$$

et celle-là, puisque 60 conduit aux cases

$$61,\ 59,\ 9,\ 45,\ 25,\ 27,\ 13 \text{ et } 53,$$

nous ménera à plusieurs nouvelles routes, où les dernieres cases seront

$$10,\ 46,\ 26,\ 28,\ 14 \text{ et } 54.$$

13. Voilà donc une source bien riche d'où l'on peut puiser quantité de nouvelles routes, en ayant une fois trouvé une seule; et le nombre des transformations devient encore plus grand, quand on renverse l'ordre de la premiere route en sorte

$$64 \cdots 1,$$

où la derniere case, tenant à 52, fournit cette transformée

$$64 \cdots 52 \cdot 1 \cdots 51,$$

et puisque 51 donne un saut à 64, cette route est rentrante en elle-même; mais elle n'est que la renversée de celle de dessus [§ 11]. Or, 51 étant lié avec

$$64,\ \ 52,\ \ 54,\ \ 56,\ \ 26\ \text{ et }\ 50,$$

fournit ces transformées

$$64 \cdots 54 \cdot 51 \cdots\cdots 1 \cdot 52 \cdot 53,$$
$$64 \cdots 56 \cdot 51 \cdots 1 \cdot 52 \cdots 55,$$
$$64 \cdots 52 \cdot 1 \cdots 26 \cdot 51 \cdots 27,$$

et de celles-ci, si l'on veut, on peut encore trouver quantité d'autres, parmi lesquelles on ne manquera pas d'en découvrir qui sont rentrantes en elles-mêmes.

14. Or, en ayant déjà trouvé une qui est rentrante en elle-même, comme est celle du § 6, il n'est pas difficile d'en tirer plusieurs autres de même nature; on n'a qu'à arranger les cases en sorte que tant la premiere que la derniere se trouve éloignée des bandes, puisqu'alors l'une et l'autre permet 8 sauts. Ainsi, si nous rangeons les nombres de la route [du] § 6 en sorte

$$31 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 30,$$

la derniere case, 30, étant jointe à celles-ci

$$45,\ \ 59,\ \ 23,\ \ 29,\ \ 31,\ \ 13,\ \ 43,\ \ 41,$$

fournit ces transformées

I. 31 ⋯ 45 · 30 ⋯ 1 · 64 ⋯ 46,
II. 31 ⋯ 59 · 30 ⋯ 1 · 64 ⋯ 60,
III. 31 ⋯ 64 · 1 ⋯ 23 · 30 ⋯ 24,
IV. 31 ⋯ 64 · 1 ⋯ 13 · 30 ⋯ 14,
V. 31 ⋯ 43 · 30 ⋯ 1 · 64 ⋯ 44,
VI. 31 ⋯ 41 · 30 ⋯ 1 · 64 ⋯ 42,

où la II. et la IV. sont rentrantes en elles-mêmes. Et, tant de celles-ci que des autres, on pourra trouver par des transformations ultérieures plusieurs autres. Comme la III. donne

31 ⋯ 64 · 1 ⋯ 13 · 24 ⋯ 30 · 23 ⋯ 14,
31 ⋯ 33 · 24 ⋯ 30 · 23 ⋯ 1 · 64 ⋯ 34,
31 ⋯ 64 · 1 ⋯ 15 · 24 ⋯ 30 · 23 ⋯ 16.

15. Mais, quand on n'a pas encore une route de la premiere espece, voyons comment il faut s'y prendre pour en trouver une sans se livrer au seul hazard. En commençant par une case quelconque, qu'on continue à volonté les sauts du cavalier aussi loin qu'on pourra et qu'on mette dans les cases qui sont restées vuides des lettres qui leur servent de signes, comme dans cette figure:

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	*a*	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	*b*	13	26	3	44	15	28

Ici, j'ai pu continuer la route jusqu'à la case marquée par 62, et dans [les deux cases qui sont restées vuides, j'ai mis] les lettres *a* et *b*.

16. Maintenant, ayant 62 cases parcourues par le cavalier, je les représente de cette maniere

$$1 \cdots 62;$$

et regardant la case 62 comme la derniere, je cherche des transformées qui finissent par d'autres cases, d'où il y ait un passage sur l'une des cases a ou b. Or, la case 62 communique avec celles-ci

9, 53, 59, 61, 23, 11, 55 et 21,

d'où nous tirons ces transformées

I. $1 \cdots 9 \cdot 62 \cdots 10,$

d'où l'on passe en a,

II. $1 \cdots 53 \cdot 62 \cdots 54,$

d'où l'on passe en a,

III. $1 \cdots 59 \cdot 62 \cdots 60,$

IV. $1 \cdots 23 \cdot 62 \cdots 24,$

V. $1 \cdots 11 \cdot 62 \cdots 12,$

VI. $1 \cdots 55 \cdot 62 \cdots 56,$

d'où l'on passe en a,

VII. $1 \cdots 21 \cdot 62 \cdots 22.$

Donc, les routes I, II et VI s'étendent déjà jusqu'à la case a, et il n'y reste plus vuide que la seule case b; et pour la lier avec les autres, on n'a qu'à transformer une de ces trois routes par la même méthode. On opéreroit semblablement, s'il étoit resté plusieurs cases vuides.

17. Prenons la premiere transformée

$$1 \cdots 9 \cdot 62 \cdots 10 \cdot a,$$

dont la derniere case, a, conduit à

32, 8, 52, 42, 58, 56, 10 et 54,

parmi lesquelles 58 fournit cette transformée

$$1 \cdots 9 \cdot 62 \cdots 58 \cdot a \cdot 10 \cdots 57,$$

dont la derniere, 57, conduit à la case b, de sorte qu'à présent le cavalier aura parcouru toutes les cases, ayant commencé sa course en 1 et fini en b,

$$1 \cdots 9 \cdot 62 \cdots 58 \cdot a \cdot 10 \cdots 57 \cdot b.$$

Mais cette route n'est pas rentrante en elle-même. Pour lui procurer cet avantage, cherchons de nouvelles transformées. La derniere, b, conduisant à ces cases

$$57, \quad 25, \quad 43,$$

dont 25 donne cette transformée

$$1 \cdots 9 \cdot 62 \cdots 58 \cdot a \cdot 10 \cdots 25 \cdot b \cdot 57 \cdots 26,$$

où la derniere conduit à

$$37, \quad 25, \quad 51 \quad \text{et} \quad 27.$$

Or, aucune ne fournit une route de la seconde espece. Prenons donc 43, [qui donne cette transformée]

$$1 \cdots 9 \cdot 62 \cdots 58 \cdot a \cdot 10 \cdots 43 \cdot b \cdot 57 \cdots 44,$$

dont la derniere, 44, conduit à

$$43, \quad 51, \quad 29 \quad \text{et} \quad 45,$$

dont aucune ne donne immédiatement une route rentrante en elle-même.

18. Il faudra donc passer à de nouvelles transformées; et pour que cela se puisse faire plus aisément, il sera bon de représenter la route trouvée de la premiere espece par l'ordre naturel des nombres.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

où, la route étant représentée en sorte

$$1 \cdots 64$$

et la derniere, 64, conduisant à

$$63, \quad 31, \quad 49,$$

on aura deux transformées

$$\text{I.} \quad 1 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 32,$$

$$\text{II.} \quad 1 \cdots 49 \cdot 64 \cdots 50,$$

car la case 63 ne change rien dans la proposée.

19. Puisqu'il n'y a que deux cases qui aboutissent à la premiere, 1, renversons ces deux transformées pour avoir

$$\text{I.} \quad 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 1,$$

$$\text{II.} \quad 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 1;$$

et maintenant, la derniere, 1, conduisant à

$$2 \quad \text{et} \quad 18,$$

nous en tirons ces deux nouvelles

$$A. \quad 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 17,$$

$$B. \quad 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 17,$$

où, la derniere, 17, conduisant à

$$16, \quad 10, \quad 14, \quad 18,$$

nous obtiendrons

$$C. \quad 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11,$$

$$D. \quad 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11,$$

$$E. \quad 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 14 \cdot 17 \cdots 15,$$

$$F. \quad 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 14 . 17 \cdots 15.$$

La derniere, 11, conduit à

$$46,\ 58,\ 12,\ 20,\ 2,\ 18,\ 62,\ 10,$$

et donne

$$\begin{array}{ll}
G. & 32 \cdots 46 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 47, \\
H. & 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 46 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 45, \\
I. & 32 \cdots 58 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 59, \\
K. & 50 \cdots 58 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 49 \cdot 64 \cdots 59, \\
L. & 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 20 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots\cdots 1 \cdot 18 \cdot 19, \\
M. & 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 20 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots\cdots 1 \cdot 18 \cdot 19, \\
N. & 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdots\cdots 17 \cdot 10 \cdots 3, \\
O. & 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdots\cdots 17 \cdot 10 \cdots 3, \\
P. & 32 \cdots 62 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots 1 \cdot 18 \cdots\cdots 31 \cdot 64 \cdot 63, \\
Q. & 50 \cdots 62 \cdot 11 \cdots 17 \cdot 10 \cdots 1 \cdot 18 \cdots\cdots 49 \cdot 64 \cdot 63.
\end{array}$$

20. Or E et F, dont la derniere, 15, conduit à

$$38,\ 8,\ 58,\ 48,\ 14,\ 62,\ 16,\ 60,$$

donneront ces transformées

$$\begin{array}{ll}
g. & 32 \cdots 38 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 39, \\
h. & 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 38 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 37, \\
i. & 32 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 8 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 9, \\
k. & 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 8 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 9, \\
l. & 32 \cdots 58 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 59, \\
m. & 50 \cdots 58 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 49 \cdot 64 \cdots 59, \\
n. & 32 \cdots 48 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 49, \\
o. & 50 \cdots 64 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots\cdots 1 \cdot 18 \cdots 47, \\
p. & 32 \cdots 62 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots\cdots 31 \cdot 64 \cdot 63, \\
q. & 50 \cdots 62 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots\cdots 49 . 64 \cdot 63, \\
r. & 32 \cdots 60 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 31 \cdot 64 \cdots 61, \\
s. & 50 \cdots 60 \cdot 15 \cdots 17 \cdot 14 \cdots 1 \cdot 18 \cdots 49 \cdot 64 \cdots 61.
\end{array}$$

Mais, parmi toutes ces transformées, il ne s'en trouve pas encore une qui soit rentrante en elle-même; mais leurs transformées ultérieures en fourniront assez.

21. Prenons la route indiquée par la lettre *G*, où, la derniere case, 47, communiquant avec celles-ci

26, 46, 48, 44, 18, 42, 28, 16,

les dernieres cases qu'on aura par ces transformations seront

27, 11, 47, 45, 19, 43, 29, 17,

dont 43 communique avec la premiere, 32, et donne par conséquent cette route rentrante

32 · · · 42 · 47 · · · · 64 · 31 · · · 18 · 1 · · · 10 · 17 · · · 11 · 46 · · · 43,

laquelle pourra donc être représentée en sorte

1 · · · 10 · 17 · · · 11 · 46 · · · 43 · 32 · · · 42 · 47 · · · 64 · 31 · · · 18,

et, marquant les cases par l'ordre naturel des nombres, on aura cette route rentrante:

30	55	46	9	28	57	40	7
47	12	29	56	45	8	27	58
54	31	10	13	18	41	6	39
11	48	33	42	15	44	59	26
32	53	14	17	34	19	38	5
49	64	51	20	43	16	25	60
52	21	2	35	62	23	4	37
1	50	63	22	3	36	61	24

22. La route indiquée par la lettre H ayant 45 pour sa derniere case, les cases communiquantes sont

6, 36, 22, 4, 20, 44, 56, 46,

et les dernieres seront

5, 37, 23, 3, 21, 45, 57, 11,

où 57 communique avec la premiere, 50, d'où résulte cette route rentrante

$$50 \cdots 56 \cdot 45 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 46 \cdots 49 \cdot 64 \cdots 57,$$

qui pourra aussi être représentée en sorte

$$1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 46 \cdots 49 \cdot 64 \cdots 57 \cdot 50 \cdots 56 \cdot 45 \cdots 18,$$

42	55	26	9	44	57	34	7
25	12	43	56	27	8	45	58
54	41	10	13	18	35	6	33
11	24	19	36	15	28	59	46
40	53	14	17	20	37	32	5
23	64	51	38	29	16	47	60
52	39	2	21	62	49	4	31
1	22	63	50	3	30	61	48

qui ne diffère pas beaucoup de la précédente.

23. Les routes indiquées par J et K ayant la derniere case 59, on aura les cases communiquantes

54, 6, 58, 56, 10, 60,

les dernieres pour J seront

55, 5, 11, 57, 9, 59,

et les dernieres pour K

55, 5, 11, 57, 9, 59,

d'où nous tirons encore deux rentrantes, puisque 57 communique tant avec 32 que 50, savoir

$$32 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57,$$

$$50 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57,$$

qui pourront être représentées en sorte

$$1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 32 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18,$$

$$1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 50 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18.$$

De même, les routes L et M finissant par 19, on aura les cases communiquantes avec 19

30, 18, 44, 20,

de là, les dernieres pour L

29, 19, 45, 11,

pour M

29, 19, 43, 11,

où il n'y a aucune rentrante.

Les routes N et O finissant par 3, on aura par rapport à cette derniere les cases communiquantes

2, 44, 12, 4;

alors, la derniere devient pour N

11, 45, 13, 3,

pour O

11, 43, 13, 3,

où il n'y en a point non plus.

24. S'il valoit la peine, on pourroit, en poursuivant ces transformations, trouver plusieurs autres routes rentrantes en elles-mêmes, et on ne manqueroit pas de découvrir des moyens pour abréger les opérations, en achevant deux ou plusieurs à la fois, afin qu'on arrive plus tôt au but proposé. Aussi n'est-ce pas mon dessein d'assigner toutes les routes possibles qui soient rentrantes en elles-mêmes, ce qui seroit un ouvrage aussi pénible qu'inutile; et je me contente d'avoir donné une méthode sure pour trouver

autant de routes qu'on voudra, méthode dont l'application n'est pas difficile en chaque cas. Mais on peut ajouter à la question principale encore des conditions qui la rendent plus curieuse, comme si l'on exigeoit que les nombres qui se trouvent dans des cases opposées ayent la même différence, qui doit être 32, comme la moitié du nombre de toutes les cases. Or, chaque case en a une qui lui est opposée, de sorte que la ligne droite tirée par les centres de ces deux cases divise le quarré en deux parties égales. On demande donc que les nombres 33, 34, 35, 36, $\cdots$ 64 se trouvent à l'opposite des nombres 1, 2, 3, 4, $\cdots$ 32.

25. Pour trouver de telles routes diagonales, on n'a qu'à commencer par écrire les nombres 1, 2, 3, 4 etc. conformément à la marche du cavalier, et à mesure qu'on écrit ces nombres, mettre les nombres 33, 34, 35, 36 etc. dans les cases opposées, et poursuivre cet arrangement tant qu'on pourra, comme on peut le voir par la figure ci-jointe:

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58·
28	11	*A*	*C*	*f*	45	32	19·
37	50	*B*	*D*	*e*	6	59	44
12	27	38	*E*	*d*	*b*	18	5
51·	64	13	*F*	*c*	*a*	43	60
26·	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Ici, j'ai pu continuer la suite des nombres 1, 2, 3 jusqu'à 19, et celle des nombres 33, 34, 35 jusqu'à 51.

Mais en rétrogradant, je suis passé de 1 par 64, 63 jusqu'à 58; et de 33 j'ai pu reculer jusqu'à 26. Douze cases sont restées vuides, que j'ai remplies des lettres A, a, B, b, C, c, D, d, E, e, F, f, disposées par des cases opposées.

d'où nous tirons encore deux rentrantes, puisque 57 communique tant avec 32 que 50, savoir

$$32 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57,$$

$$50 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18 \cdot 1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57,$$

qui pourront être représentées en sorte

$$1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 32 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 31 \cdots 18,$$

$$1 \cdots 10 \cdot 17 \cdots 11 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 50 \cdots 56 \cdot 59 \cdots 64 \cdot 49 \cdots 18.$$

De même, les routes L et M finissant par 19, on aura les cases communiquantes avec 19

$$30,\ 18,\ 44,\ 20,$$

de là, les dernieres pour L

$$29,\ 19,\ 45,\ 11,$$

pour M

$$29,\ 19,\ 43,\ 11,$$

où il n'y a aucune rentrante.

Les routes N et O finissant par 3, on aura par rapport à cette derniere les cases communiquantes

$$2,\ 44,\ 12,\ 4;$$

alors, la derniere devient pour N

$$11,\ 45,\ 13,\ 3,$$

pour O

$$11,\ 43,\ 13,\ 3,$$

où il n'y en a point non plus.

24. S'il valoit la peine, on pourroit, en poursuivant ces transformations, trouver plusieurs autres routes rentrantes en elles-mêmes, et on ne manqueroit pas de découvrir des moyens pour abréger les opérations, en achevant deux ou plusieurs à la fois, afin qu'on arrive plus tôt au but proposé. Aussi n'est-ce pas mon dessein d'assigner toutes les routes possibles qui soient rentrantes en elles-mêmes, ce qui seroit un ouvrage aussi pénible qu'inutile; et je me contente d'avoir donné une méthode sure pour trouver

autant de routes qu'on voudra, méthode dont l'application n'est pas difficile en chaque cas. Mais on peut ajouter à la question principale encore des conditions qui la rendent plus curieuse, comme si l'on exigeoit que les nombres qui se trouvent dans des cases opposées ayent la même différence, qui doit être 32, comme la moitié du nombre de toutes les cases. Or, chaque case en a une qui lui est opposée, de sorte que la ligne droite tirée par les centres de ces deux cases divise le quarré en deux parties égales. On demande donc que les nombres 33, 34, 35, 36, ... 64 se trouvent à l'opposite des nombres 1, 2, 3, 4, ... 32.

25. Pour trouver de telles routes diagonales, on n'a qu'à commencer par écrire les nombres 1, 2, 3, 4 etc. conformément à la marche du cavalier, et à mesure qu'on écrit ces nombres, mettre les nombres 33, 34, 35, 36 etc. dans les cases opposées, et poursuivre cet arrangement tant qu'on pourra, comme on peut le voir par la figure ci-jointe:

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58·
28	11	*A*	*C*	*f*	45	32	19·
37	50	*B*	*D*	*e*	6	59	44
12	27	38	*E*	*d*	*b*	18	5
51·	64	13	*F*	*c*	*a*	43	60
26·	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Ici, j'ai pu continuer la suite des nombres 1, 2, 3 jusqu'à 19, et celle des nombres 33, 34, 35 jusqu'à 51.

Mais en rétrogradant, je suis passé de 1 par 64, 63 jusqu'à 58; et de 33 j'ai pu reculer jusqu'à 26. Douze cases sont restées vuides, que j'ai remplies des lettres *A*, *a*, *B*, *b*, *C*, *c*, *D*, *d*, *E*, *e*, *F*, *f*, disposées par des cases opposées.

26. Nous avons donc deux séries séparées de cases qui se suivent selon la marche du cavalier,

$$58 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 19,$$
$$26 \cdots\cdots\cdots\cdots 51.$$

La case 19 aboutissant à 6 [et la case 51 communiquant avec 38], nous aurons ces transformées, qui pourront être continuées plus loin:

$$58 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 6 \cdot 19 \cdots\ 7,\ f,\ B,\ d,\ C,$$
$$26 \cdots\cdots\cdots 38 \cdot 51 \cdots 39,\ F,\ b,\ D,\ c.$$

Maintenant, la case C, communiquant aux cases de la premiere suite 8, 6, d, ne fournit pas de nouvelles transformations. Mais retranchons les deux dernieres, et puisqu'il suffit de transformer une seule suite, parce que l'autre en est déterminée, prenons la premiere

$$58 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 6 \cdot 19 \cdots 7,\ f,\ B,$$

où B, aboutissant à 12, donne cette transformation à continuer

$$58 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 6 \cdot 19 \cdots 12 \cdot B \cdot f \cdot 7 \cdots 11 \cdot D \cdot c.$$

Or, c étant communicable à 16, on aura

$$58 \cdots 64 \cdot 1 \cdots 6 \cdot 19 \cdots 16 \cdot c \cdot D \cdot 11 \cdots 7 \cdot f \cdot B \cdot 12 \cdots 15 \cdot a \cdot E$$

et l'autre suite sera

$$26 \cdots 38 \cdot 51 \cdots 48 \cdot C \cdot d \cdot 43 \cdots 39 \cdot F \cdot b \cdot 44 \cdots 47 \cdot A \cdot e,$$

où toutes les cases sont comprises.

27. Maintenant, il faut lier ces deux suites ensemble, en sorte que la fin de l'une aboutisse au commencement de l'autre. Pour cet effet, transformons la premiere, dont la fin E communique avec la case 62, et la fin, devenant alors 63, sera cohérente avec le commencement de l'autre, 26. Cette transformation donne donc

$$58 \cdots 62 \cdot E \cdot a \cdot 15 \cdots 12 \cdot B \cdot f \cdot 7 \cdots 11 \cdot D \cdot c \cdot 16 \cdots 19 \cdot\ 6 \cdots 1 \cdot 64 \cdot 63,$$
$$26 \cdots 30 \cdot e \cdot A \cdot 47 \cdots 44 \cdot b \cdot F \cdot 39 \cdots 43 \cdot d \cdot C \cdot 48 \cdots 51 \cdot 38 \cdots\cdots 31,$$

et on a en même tems une route rentrante en elle-même et douée de la condition prescrite:

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

28. Ayant trouvé une seule route de cette nature, il est aisé de la transformer en plusieurs manieres différentes en lui conservant la même propriété. Car, de quelque maniere qu'on partage la suite rentrante des nombres $1 \cdots 64$ en deux moitiés, l'une contient toujours les cases opposites de l'autre, comme on peut voir par ces bissections

$1 \cdots 32$	$2 \cdots 33$	$3 \cdots 34$	$4 \cdots 35$
$33 \cdots 64$	$34 \cdots 64 \cdot 1$	$35 \cdots 64 \cdot 1 \cdot 2$	$36 \cdots 64 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$

où les deux moitiés sont toujours cohérentes. Maintenant, on n'a qu'à prendre une telle bissection à volonté et transformer les deux moitiés semblablement, jusqu'à ce qu'elles redeviennent cohérentes. Ainsi, prenons la moitié $3 \cdots 34$, dont le bout 34, communiquant à 7, donne la transformée

$$3 \cdots 7 \cdot 34 \cdots 8,$$

et par renversement

$$8 \cdots 34 \cdot 7 \cdots 3,$$

dont le bout 3, communiquant à 24, donne

$$8 \cdots 24 \cdot 3 \cdots 7 \cdot 34 \cdots 25;$$

et l'autre moitié sera

$$40 \cdots 56 \cdot 35 \cdots 39 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 64 \cdots 57,$$

qui sont cohérentes par leurs bouts 25, 40 et 8, 57. Nous pourrons donc représenter en sorte cette nouvelle route

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot 39 \cdots 35 \cdot 56 \cdots 40 \cdot 25 \cdots 32, \\ 33 \cdot 34 \cdot 7 \cdots \ 3 \cdot 24 \cdots \ 8 \cdot 57 \cdots 64. \end{array}$$

29. La même moitié $3 \cdots 34$, puisque le premier bout, 3, communique à 24, donne par la transformation

$$23 \cdots 3 \cdot 24 \cdots 34,$$

et 34, communiquant à 7, donne

$$23 \cdots 7 \cdot 34 \cdots 24 \cdot 3 \cdots 6,$$

et l'autre moitié sera

$$55 \cdots 39 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 64 \cdots 56 \cdot 35 \cdots 38,$$

qui est cohérente. Par conséquent, nous aurons une route représentée par ces deux moitiés

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot 39 \cdots 55 \cdot 6 \ \cdots \ 3 \cdot 24 \cdots 32, \\ 33 \cdot 34 \cdot 7 \cdots 23 \cdot 38 \cdots 35 \cdot 56 \cdots 64. \end{array}$$

La moitié $4 \cdots 35$, à cause de la communication du bout 35 avec 18, donne

$$4 \cdots 18 \cdot 35 \cdots 19,$$

qui est déjà cohérente avec

$$36 \cdots 50 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 64 \cdots 51,$$

d'où nous tirons cette route

$$\begin{array}{l} 1 \cdot \ 2 \cdot \ 3 \cdot 50 \cdots 36 \cdot 19 \cdots 32, \\ 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 18 \cdots \ 4 \cdot 51 \cdots 64, \end{array}$$

et d'autres transformations de la même moitié donnent

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 50 \cdots 43 \cdot 36 \cdot 19 \cdots 23 \cdot 10 \cdots 5 \cdot 24 \cdots 32,$$

$$33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 18 \cdots 11 \cdot 4 \cdot 51 \cdots 55 \cdot 42 \cdots 37 \cdot 56 \cdots 64.$$

30. Voilà donc 4 autres routes qui ont la même propriété que celle du § 27.

50	59	22	7	48	31	10	33
23	6	49	58	9	34	47	30
60	51	8	21	46	11	32	35
5	24	45	52	57	36	29	12
44	61	4	25	20	13	56	37
3	64	43	14	53	40	19	28
62	15	2	41	26	17	38	55
1	42	63	16	39	54	27	18

42	59	6	55	44	31	18	33
5	54	43	58	19	34	45	30
60	41	56	7	46	17	32	35
53	4	47	40	57	20	29	16
48	61	52	25	8	15	36	21
3	64	49	14	39	24	9	28
62	13	2	51	26	11	22	37
1	50	63	12	23	38	27	10

40	59	12	35	38	31	54	33
13	18	39	58	55	34	37	30
60	41	56	11	36	53	32	47
17	14	19	42	57	48	29	52
20	61	16	25	10	51	46	49
15	64	21	4	43	24	9	28
62	5	2	23	26	7	50	45
1	22	63	6	3	44	27	8

40	59	50	35	38	31	48	33
51	12	39	58	49	34	37	30
60	41	56	11	36	47	32	21
55	52	13	42	57	22	29	46
14	61	54	25	10	45	20	23
53	64	15	4	43	24	9	28
62	5	2	17	26	7	44	19
1	16	63	6	3	18	27	8

31. A cette condition des cases opposées, on peut encore ajouter celle-ci, que la premiere moitié des nombres, $1 \cdots 32$, remplisse seule la moitié du quarré, en partageant le quarré par une ligne parallele à un côté

								33	
α									β
	1	a	b	28	7	14	19	16	
	24	27	8	c	20	17	6	13	
	9	2	25	22	11	4	15	18	
	26	23	10	3	d	21	12	5	

en sorte que les nombres $1 \cdots 32$ se trouvent tous au dessous de la ligne $\alpha\beta$, et les autres, $33 \cdots 64$, au dessus. Il faut donc que l'unité se trouve près de la ligne $\alpha\beta$, afin qu'elle puisse communiquer avec le nombre 64, qui se trouve au dessus.

32. Commençons donc par mettre l'unité à une telle case quelconque; et, en vertu de l'opposition, la case du nombre 33 sera aussi déterminée; et il faudra faire en sorte qu'elle communique avec celle qui contiendra le nombre 32 au dessous de la ligne $\alpha\beta$. En essayant une telle disposition, je suis parvenu jusqu'au nombre 28, et j'ai écrit dans les cases vuides les lettres a, b, c, d, pour l'arrangement desquelles je fais les transformations suivantes.

La suite $1 \cdots 28$, puisque 28 aboutit à

$$27,\ 25,\ 11,\ 17,$$

donne ces transformées

$$\text{I. } 1 \cdots 25 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26,$$

$$\text{II. } 1 \cdots 11 \cdot 28 \cdots 12$$

et

$$\text{III. } 1 \cdots 17 \cdot 28 \cdots 18,$$

dont aucune ne s'étend à une des cases vuides. Mais, après plusieurs transformations, on parvient à celle-ci, qui comprend toutes les cases,

$$1 \cdots 8 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot b \cdot 24 \cdots 28 \cdot 17 \cdots 9 \cdot a \cdot c \cdot d,$$

qui se transforme enfin en celle-ci

$$1 \cdots 8 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot b \cdot 24 \cdots 28 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot d \cdot c \cdot a \cdot 9 \cdots 14,$$

dont la fin 14 communique avec le commencement 33 de l'autre moitié au dessus de la ligne $\alpha\beta$; et la fin de celle-ci, 64, communiquera d'elle-même avec la case 1.

33. Voici donc cette route représentée en son entier

	37	62	43	56	35	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	34	59	
	63	38	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	39	52	47	58	33	
α									β
	1	26	15	20	7	32	13	22	
	16	19	8	25	14	21	6	31	
	27	2	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	3	24	11	30	5	

et il est non seulement aisé d'en trouver par la même méthode plusieurs autres, mais on peut aussi transformer celle-ci en plusieurs manieres, dont voici quelques unes:

$$7 \cdots 1 \cdot 8 \cdots 32,$$

$$7 \cdots 1 \cdot 8 \cdots 25 \cdot 32 \cdots 26,$$

$$15 \cdots 10 \cdot 7 \cdots 1 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16 \cdots 21 \cdot 24 \cdots 32 \cdot 23 \cdot 22,$$

qu'on peut encore renverser, de même que la primitive, en la représentant en sorte

$$32 \cdots 1.$$

34. Voilà donc encore quelques routes de cette espece:

35	62	43	56	37	60	41	50
44	55	36	61	42	49	38	59
63	34	53	46	57	40	51	48
54	45	64	33	52	47	58	39
7	26	15	20	1	32	13	22
16	19	8	25	14	21	2	31
27	6	17	10	29	4	23	12
18	9	28	5	24	11	30	3

35	60	43	56	37	62	41	50
44	55	36	61	42	49	38	63
59	34	53	46	57	40	51	48
54	45	58	33	52	47	64	39
7	32	15	20	1	26	13	22
16	19	8	25	14	21	2	27
31	6	17	10	29	4	23	12
18	9	30	5	24	11	28	3

41	60	37	54	43	58	47	50
36	63	42	59	38	49	44	57
61	40	53	34	55	46	51	48
64	35	62	39	52	33	56	45
13	24	1	20	7	30	3	32
16	19	14	23	2	21	8	29
25	12	17	6	27	10	31	4
18	15	26	11	22	5	28	9

62	37	56	41	60	35	54	47
57	42	61	36	55	48	51	34
38	63	44	59	40	53	46	49
43	58	39	64	45	50	33	52
20	1	18	13	32	7	26	11
17	14	21	8	27	12	31	6
2	19	16	23	4	29	10	25
15	22	3	28	9	24	5	30

35 Jusqu'ici j'ai considéré la question telle qu'elle avoit été proposée: pour l'échiquier ordinaire divisé en 64 cases. Or, comme ce nombre est trop grand pour qu'on puisse concevoir toutes les variétés qui y peuvent avoir lieu, il sera bon de considérer aussi quelques figures plus simples, qui contiennent un moindre nombre de cases que le cavalier d'echec doive parcourir. Or, d'abord il est évident que ni un quarré de 4 ni un de 9 cases n'y est propre: mais on verra qu'on ne sauroit réussir non plus dans un quarré de

16 cases. Car, de quelque maniere qu'on s'y prenne, il restera toujours une case angulaire vuide; et on s'appercevra bientôt que toutes les transformations

1	8	13	10
14	11	4	7
5	2	9	12
	15	6	3

qu'on puisse faire ne sont pas capables de la remplir. Il est clair qu'on devroit commencer et finir par un coin; et partant, deux des quatre cases du milieu seront d'abord remplies, et les deux autres devroient être gardées jusqu'à la fin, ce qui ne se peut pas.

36. Le premier quarré donc que le cavalier puisse parcourir est celui de 25 cases, qu'on pourra remplir moyennant les mêmes regles, en cas qu'on

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

ne réussisse point au premier essai. Or, la marche du cavalier produit toujours cette propriété, que les nombres pairs et impairs se suivent alternativement, comme on peut voir par toutes les figures rapportées jusqu'ici. D'où il est évident que la derniere case, contenant 25, se sauroit jamais communiquer avec la premiere, 1; et partant, il est impossible de trouver une route rentrante en elle-même dans le quarré de 25, ni dans aucune autre figure qui contient un nombre impair de cases. On comprend de là aussi qu'on ne sauroit jamais commencer par une case qui contient un nombre pair; car, de quelque maniere qu'on transforme cette route, les nombres pairs tom-

beront toujours dans les mêmes cases, et les cases angulaires contiendront des nombres impairs. Dans ce quarré de 25, il est aussi clair qu'il faut absolument ou commencer ou finir par une case angulaire.

37. Mais voyons aussi les transformations qu'on peut tirer de cette route $1 \cdots 25$ trouvée du quarré de 25 cases. Or, la derniere communiquant aux cases

$$20,\ 10,\ 16,\ 22,\ 12,\ 18,\ 24,\ 14$$

fournit ces transformées

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & 1 \cdots 20 \cdot 25 \cdots 21, \\
\text{II.} & 1 \cdots 10 \cdot 25 \cdots 11, \\
\text{III.} & 1 \cdots 16 \cdot 25 \cdots 17, \\
\text{IV.} & 1 \cdots 22 \cdot 25 \cdots 23, \\
\text{V.} & 1 \cdots 12 \cdot 25 \cdots 13, \\
\text{VI.} & 1 \cdots 18 \cdot 25 \cdots 19, \\
\text{VII.} & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 25, \\
\text{VIII.} & 1 \cdots 14 \cdot 25 \cdots 15.
\end{array}$$

Donc, commençant par la case angulaire, on peut finir par quelcune de ces cases

$$21,\ 11,\ 17,\ 23,\ 13,\ 19,\ 25,\ 15.$$

Mais la premiere donne encore ces transformées

$$\begin{array}{rl}
a. & 1 \cdots 6 \cdot 21 \cdots 25 \cdot 20 \cdots 7, \\
b. & 1 \cdot 2 \cdot 21 \cdots\cdots 25 \cdot 20 \cdots 3,
\end{array}$$

et les autres celles-ci

$$\begin{array}{rl}
c. & 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdots\cdots 25 \cdot 10 \cdots 3, \\
d. & 1 \cdots 8 \cdot 11 \cdots 25 \cdot 10 \cdots 9, \\
e. & 1 \cdots 4 \cdot 17 \cdots 25 \cdot 16 \cdots 5, \\
f. & 1 \cdots 8 \cdot 17 \cdots 25 \cdot 16 \cdots 9,
\end{array}$$

g. 1 · · · 4 · 23 · 24 · 25 · 22 · · · 5,

h. 1 · 2 · 23 · 24 · 25 · 22 · · · 3,

i. 1 · · · 6 · 13 · · · 25 · 12 · · · 7,

k. 1 · 2 · 13 · · · · · 25 · 12 · · · 3,

l. 1 · · · 6 · 19 · · · 25 · 18 · · · 7,

m. 1 · · · 4 · 19 · · · 25 · 18 · · · 5,

n. 1 · · · 6 · 15 · · · 25 · 14 · · · 7,

o. 1 · · · 8 · 15 · · · 25 · 14 · · · 9,

où les dernieres cases sont 3, 5, 7, 9.

38. Puisque les cases angulaires 3, 5, 7 ne communiquent qu'à deux autres, elles ne fournissent par notre méthode point de nouvelles transformées. Considérons donc celles qui finissent par 9, et nous tirerons ces transformées

p. 1 · · · 4 · 9 · 10 · 25 · · · 11 · 8 · · · 5,

q. 1 · · · 8 · 11 · · · 24 · 9 · 10 · 25,

r. 1 · · · 4 · 9 · · · 16 · 25 · · · 17 · 8 · · · 5,

s. 1 · · · 8 · 17 · · · 24 · 9 · · · 16 · 25,

t. 1 · · · 4 · 9 · · · 14 · 25 · · · 15 · 8 · · · 5,

u. 1 · · · 8 · 15 · · · 24 · 9 · · · 14 · 25.

Maintenant, ces nouvelles routes qui finissent par 25 nous conduisent à d'autres transformées; et nous parviendrons à plusieurs autres routes qui finissent par quelqu'une des cases qui sont marquées des nombres impairs; d'où l'on voit qu'en commençant par la case angulaire 1, on peut finir par quelque case marquée d'un nombre impair qu'on voudra, et cela en plusieurs manieres différentes. Ensuite, chaque route pouvant être renversée, le nombre de toutes les routes possibles deviendra extrêmement grand.

39. Ici, on peut encore ajouter cette condition, que les nombres qui se trouvent en deux cases opposées fassent partout la même somme, savoir 26.

Il faut donc que la premiere et derniere case se trouvent en des angles opposés; et pour trouver une telle route, on n'a qu'à commencer à remplir le quarré et mettre à l'opposite de chaque nombre son complément à 26, et

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

continuer aussi loin qu'on pourra. Mais, puisqu'on sait que la case du milieu doit contenir 13, on ne sauroit presque manquer; et alors, en conservant la même propriété, on en peut tirer plusieurs formes différentes, dont voici quelques unes.

I. 1 · · · 4 · 11 · · · · · · · · 5 · 14 · 13 · 12 · 21 · · · · · · · 15 · 22 · · · 25,

II. 1 · · · 4 · 7 · 6 · 5 · 14 · · · 18 · 13 · 8 · · · 12 · 21 · 20 · 19 · 22 · · · 25,

III. 1 · · · 4 · 21 · · · · · · · · · 14 · 13 · 12 · · · · · · · · · · · · 5 · 22 · · · 25,

IV. 1 · · · 4 · 5 · 14 · · · · · · · · · 20 · 13 · 6 · · · · · · · · · 12 · 21 · 22 · · · 25,

V. 1 · · · 4 · 11 · 12 · 21 · · · · 16 · 13 · 10 · · · · · 5 · 14 · 15 · 22 · · · 25,

VI. 1 · · · 4 · 7 · · · · · 12 · 21 · 20 · 13 · 6 · 5 · 14 · · · · · · 19 · 22 · · · 25,

VII. 1 · · · 4 · 21 · 12 · · · · · · · 6 · 13 · 20 · · · · · · · · · 14 · 5 · 22 · · · 25.

40. Dans toutes ces variations, tant les quatre premiers nombres, 1, · · · 4, que les quatre derniers, 22, · · · 25, avec celui du milieu, 13, demeurent invariables, de sorte que les variations ne s'étendent que sur les autres. D'où il semble aussi que la route trouvée avec les 7 variations épuisent entierement cette espece. Voici donc toutes ces 8 routes représentées à la fois.

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

23	18	11	6	25
10	5	24	17	12
19	22	13	4	7
14	9	2	21	16
1	20	15	8	3

23	12	7	16	25
6	17	24	21	8
11	22	13	4	15
18	5	2	9	20
1	10	19	14	3

23	8	21	16	25
20	15	24	7	12
9	22	13	4	17
14	19	2	11	6
1	10	5	18	3

23	10	5	18	25
14	19	24	11	6
9	22	13	4	17
20	15	2	7	12
1	8	21	16	3

23	10	19	14	25
18	5	24	9	20
11	22	13	4	15
6	17	2	21	8
1	12	7	16	3

23	20	15	8	25
14	9	24	21	16
19	22	13	4	7
10	5	2	17	12
1	18	11	6	3

23	16	21	8	25
12	7	24	15	20
17	22	13	4	9
6	11	2	19	14
1	18	5	10	3

41. Les routes trouvées ci-dessus pour un quarré de 25 cases se peuvent ainsi disposer qu'elles remplissent un quarré de 100 cases, en sorte que la route devienne rentrante en elle-même. Voici un tel quarré de 100 cases

30	41	46	37	32	53	60	67	72	55
47	36	31	40	45	68	73	54	61	66
42	29	38	33	50	59	52	63	56	71
35	48	27	44	39	74	69	58	65	62
28	43	34	49	26	51	64	75	70	57
7	20	25	14	1	76	99	84	93	78
12	15	8	19	24	89	94	77	98	85
21	6	13	2	9	100	83	88	79	92
16	11	4	23	18	95	90	81	86	97
5	22	17	10	3	82	87	96	91	80

où les nombres sont disposés en quatre quartiers, dont chacun contient la même route.

42. Avant que de finir, j'ajouterai encore quelques autres figures; et parmi les rectangulaires, la plus simple que le cavalier puisse parcourir est de 12 cases, la largeur contenant 3 et la longueur 4, dont voici quelques routes:

10	7	2	5
1	4	9	12
8	11	6	3

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

12	9	6	3
1	4	11	8
10	7	2	5

Mais on voit aisément que des routes rentrantes ne sauroient ici avoir lieu.

Si la largeur contient 3 cases et la longueur 5 ou 6, il est impossible de les parcourir; mais, donnant à la longueur 7 ou plusieurs cases, on pourra réussir, pourtant sans rentrer:

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

15	18	21	2	5	8	11
20	1	16	13	10	3	6
17	14	19	4	7	12	9

Or, si nous donnons 4 cases à la largeur et 5 ou plusieurs à la longueur, on aura ces routes:

14	7	20	3	16
19	2	15	8	11
6	13	10	17	4
1	18	5	12	9

16	7	22	3	18	11
23	2	17	12	21	4
8	15	6	19	10	13
1	24	9	14	5	20

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

43. Jusqu'ici les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent avoir lieu; mais donnant 5 cases à la largeur et 6 à la longueur, on pourra aussi remplir cette condition, de même que dans tous les autres rectangles dont le nombre des cases est pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 cases dans un côté. En voici des exemples:

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

où cette autre figure est un quarré de 36 cases, et la route est non seulement rentrante en elle-même, mais les nombres dans les cases opposées ont partout la même différence de 18.

44. Mais, sans se borner aux figures rectangulaires, on peut former, à volonté, quantité d'autres figures où le cavalier peut passer par toutes les cases, dont j'ajouterai quelques unes, qui sont plus simples et qui admettent même des routes rentrantes en elles-mêmes.

	10	7	
12	5	2	9
3	8	11	6
	1	4	

		14	19		
		7	12		
6	13	20	15	18	11
1	8	5	10	3	16
		2	17		
		9	4		

	1	14	7	22	
15	8	21	32	13	24
2	31	26	23	6	19
9	16	29	20	25	12
30	3	10	27	18	5
	28	17	4	11	

	1	20	7	26	
21	8	27	32	19	14
2	29	12	15	6	25
9	22	31	28	13	18
30	3	16	11	24	5
	10	23	4	17	

SUR L'AVANTAGE DU BANQUIER AU JEU DE PHARAON [1]

Commentatio 313 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [20] (1764), 1766, p. 144—164

Pour rendre la recherche plus générale, je marquerai le nombre des cartes que le Banquier a en main par la lettre n. Parmi ces cartes, il y en aura ou une ou deux ou trois ou quatre semblables à celle sur laquelle le Ponte aura mis. Je nommerai ces cartes *signifiantes*, pour les distinguer des autres dont l'espece n'entre pas en considération.

Quoique le nombre des cartes signifiantes ne surpasse pas quatre, pour rendre le calcul plus complet, je passerai à des nombres plus grands; un tel cas pourroit avoir lieu si, par exemple, le Ponte mettoit sans distinction sur un roi ou une dame à la fois, de sorte qu'il gagne ou perde, soit qu'un roi ou une dame sorte la premiere; dans ce cas, le nombre des cartes signifiantes pourroit monter jusqu'à huit. J'aurai donc autant de cas à examiner qu'il y a de cartes signifiantes, et je déterminerai pour chacun l'avantage du Banquier; pour cet effet, je marquerai par l'unité la mise du Ponte, et je chercherai la prétention que le Banquier y pourra faire conformément aux regles de la probabilité. Car, si le jeu étoit égal, le Banquier n'y sauroit former aucune prétention; et ce n'est qu'à cause de son avantage qu'il peut prétendre à une certaine partie.

---

1) Voir aussi les mémoires 201, 811 et 813 de ce volume. L. G. D.

PROBLEME 1

1. *Le nombre de toutes les cartes étant* $=n$, *s'il n'y a qu'une seule carte signifiante, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Que le Banquier tire une carte après l'autre; et la probabilité que la premiere carte soit la signifiante est $\frac{1}{n}$; et qu'elle ne la soit pas, la probabilité sera $\frac{n-1}{n}$. Au premier cas, il gagne la mise $=1$, ce qui vaut $\frac{1}{n}\cdot 1=\frac{1}{n}$; au second cas, il faut passer outre.

Supposons donc que l'avantage du Banquier, quand il va tirer la seconde carte, lui vaille a; et puisque la probabilité que ce cas arrive est $\frac{n-1}{n}$, son avantage au commencement est

$$x=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}a,$$

posant x pour l'avantage du Banquier au commencement du jeu.

Maintenant, pour trouver a, je considere la seconde carte; et à cause du nombre des cartes $=n-1$, la probabilité que la seconde carte soit la signifiante est $\frac{1}{n-1}$, et qu'elle ne la soit pas, $=\frac{n-2}{n-1}$; là, il perd 1, et ici, il passe à l'espérance qu'il aura à la troisieme carte, laquelle soit posée $=b$; de là, nous aurons

$$a=-\frac{1}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}b$$

et partant

$$x=\frac{n-2}{n}b.$$

Qu'il tire à présent la troisieme carte; et pour qu'elle soit la signifiante, la probabilité est $\frac{1}{n-2}$, et qu'elle ne la soit pas, $=\frac{n-3}{n-2}$; le premier cas lui fait gagner 1, et l'autre le met à l'espérance qu'il aura à la quatrieme carte, laquelle soit $=c$; d'où nous aurons

$$b=\frac{1}{n-2}+\frac{n-3}{n-2}c$$

et partant

Qu'il tire la quatrieme carte; et la probabilité qu'elle soit la signifiante étant $=\frac{1}{n-3}$, et qu'elle ne la soit pas, $=\frac{n-4}{n-3}$; il perdra 1 dans le premier cas, et dans l'autre, il obtient l'espérance qu'il peut avoir à la cinquieme, laquelle soit $=d$; de là, nous aurons

$$c=-\frac{1}{n-3}+\frac{n-4}{n-3}d$$

et

$$x=\frac{n-4}{n}d.$$

De la même maniere, si nous posons l'espérance du Banquier

$$\begin{array}{ll} \text{au commencement} & =x, \\ \text{à la seconde carte} & =a, \\ \text{à la troisieme carte} & =b, \\ \text{à la quatrieme carte} & =c, \\ \text{à la cinquieme carte} & =d, \\ \text{à la sixieme carte} & =e \\ & \text{etc.,} \end{array}$$

nous aurons les valeurs suivantes:

$$x=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}a,$$

$$x=\frac{n-2}{n}b,$$

$$x=\frac{1}{n}+\frac{n-3}{n}c,$$

$$x=\frac{n-4}{n}d,$$

$$x=\frac{1}{n}+\frac{n-5}{n}e,$$

$$x=\frac{n-6}{n}f$$

etc.

Mais il faut remarquer que le nombre n de toutes les cartes est pair et que le Banquier ne perd rien, quand la carte signifiante est la derniere, quoiqu'elle soit paire en ordre. Donc, s'il étoit $n=2$, il seroit $a=0$; si $n=4$, il seroit $c=0$: si $n=6$, il seroit $e=0$ et ainsi de suite; d'où l'on voit qu'il y aura en général $x=\frac{1}{n}$, quelque nombre pair que soit n.

REMARQUE 1

2. Il est évident que cet avantage du Banquier, $x=\frac{1}{n}$, vient uniquement de la loi que la derniere carte ne fait pas gagner au Ponte; car, si sans cette exception toutes les cartes paires lui étoient favorables, comme toutes les impaires le sont au Banquier, le parti seroit parfaitement égal, et l'avantage de celui-ci seroit $x=0$.

REMARQUE 2

3. Cette seule considération m'auroit pu d'abord conduire à la solution du probleme. Car, puisque la probabilité que la carte signifiante soit la derniere est $=\frac{1}{n}$, et que dans ce cas le Banquier ne perd pas 1, comme il devroit si le parti étoit égal, il est autant que si ce cas lui rapportoit 1, outre l'égalité; d'où son avantage est estimé

$$x=\frac{1}{n}\cdot 1=\frac{1}{n}.$$

REMARQUE 3

4. Puisqu'un entier jeu de cartes, qui en contient 52, renferme quatre cartes signifiantes, ce cas ne sauroit avoir lieu que lorsque la taille est déjà diminuée au dessous de 49 cartes. Mais, puisqu'on tire les cartes toujours deux à deux, le nombre des cartes dans ce cas, n, sera 48 tout au plus, ou quelqu'autre nombre pair plus petit. Donc, le plus petit avantage du Banquier dans ce cas, qu'il aura quand $n=48$, sera $=\frac{1}{48}$, ou vaudra un peu plus que deux pour 100; et si le Banquier n'avoit plus que 10 cartes en main, son avantage vaudroit $\frac{1}{10}$ ou 10 pour cent.

PROBLEME 2

5. *Le nombre de toutes les cartes étant* $=n$, *s'il y a deux cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Soit x l'avantage du Banquier au commencement du jeu; et puisqu'il tire les cartes deux à deux, soit a son avantage après qu'il aura tiré deux cartes (supposé qu'aucune des cartes signifiantes ne soit sortie), et b celui après qu'il aura tiré 4 cartes, c celui après qu'il aura tiré 6, d celui après qu'il aura tiré 8, et ainsi de suite jusqu'à la fin.

Maintenant, pour la premiere paire de cartes, il faut considérer 4 cas:

1°. lorsque la premiere et la seconde sont signifiantes; où le jeu finit et le Banquier gagne la moitié de la mise, ou $\frac{1}{2}$, selon les regles du jeu;

2°. lorsque la premiere est signifiante et l'autre non; dans ce cas, le Banquier gagne toute la mise 1;

3°. lorsque la premiere n'est pas signifiante, mais que la seconde est signifiante; dans ce cas, le Banquier perd 1;

4°. lorsque ni la premiere ni la seconde n'est signifiante; dans ce cas, on continue le jeu et le Banquier arrive à l'avantage que j'ai marqué par la lettre a.

Or, puisqu'il y a 2 cartes signifiantes parmi toutes, dont le nombre est n, la probabilité que la premiere soit signifiante est $=\frac{2}{n}$, et qu'elle ne le soit pas, $=\frac{n-2}{n}$.

Soit la premiere signifiante; et puisque dans le reste des cartes, dont le nombre est $n-1$, il n'y a plus qu'une signifiante, la probabilité qu'elle soit la seconde est $=\frac{1}{n-1}$, et qu'elle ne le soit pas, $=\frac{n-2}{n-1}$; donc, pour que le premier cas arrive, la probabilité est

$$=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n-1},$$

et que le second arrive, la probabilité est

$$=\frac{2}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}.$$

Que la premiere ne soit pas signifiante; et puisqu'il y a encore 2 cartes signifiantes parmi les autres, dont le nombre est $n-1$, la probabilité que la seconde soit signifiante est $=\frac{2}{n-1}$, et qu'elle ne le soit pas, $=\frac{n-3}{n-1}$. Donc, qu'il arrive le troisieme cas, la probabilité est

$$=\frac{2(n-2)}{n(n-1)},$$

le quatrieme cas, la probabilité est

$$=\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}.$$

La probabilité de l'arrivée de ces quatre cas, avec le profit ou la perte que chacun apporte au Banquier, est donc

$$x=\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2(n-2)}{n(n-1)}\cdot 1-\frac{2(n-2)}{n(n-1)}\cdot 1+\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}a,$$

ou bien

$$x=\frac{1}{n(n-1)}+\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}a.$$

De la même maniere, nous trouverons l'avantage du Banquier, a, qu'il aura après avoir déjà tiré 2 cartes; car, ayant alors encore $n-2$ cartes, parmi lesquelles se trouvent deux signifiantes, mettant $n-2$ au lieu de n et b au lieu de a, nous aurons

$$a=\frac{1}{(n-2)(n-3)}+\frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)}b,$$

et continuant le même raisonnement, nous trouverons

$$b=\frac{1}{(n-4)(n-5)}+\frac{(n-6)(n-7)}{(n-4)(n-5)}c,$$

$$c=\frac{1}{(n-6)(n-7)}+\frac{(n-8)(n-9)}{(n-6)(n-7)}d,$$

$$d=\frac{1}{(n-8)(n-9)}+\frac{(n-10)(n-11)}{(n-8)(n-9)}e$$

etc.

Mais il faut ici avoir égard à une exception que les regles du jeu renferment, qui est que, lorsque les deux cartes signifiantes sont les dernieres,

le Banquier gagne la mise toute entiere, et non pas seulement la moitié, comme il arrive lorsque les deux cartes signifiantes se rencontrent dans une autre paire quelconque. Or, la probabilité que les deux cartes signifiantes soient les dernieres étant $=\frac{2}{n(n-1)}$, et ce cas lui rapportant un gain d' $\frac{1}{2}$ au dessus de l'ordinaire, nous n'aurons qu'à ajouter encore

$$\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n-1)}$$

à l'avantage que nous fournissent les déterminations précédentes.

Substituons donc successivement les valeurs trouvées pour a, b, c, d etc. et nous trouverons

$$x=\frac{1+1+(n-4)(n-5)b}{n(n-1)},$$

$$x=\frac{1+1+1+(n-6)(n-7)c}{n(n-1)},$$

$$x=\frac{1+1+1+1+(n-8)(n-9)\,d}{n(n-1)}$$

etc.

Donc, s'il étoit $n=4$, nous aurions

$$x=\frac{2}{n(n-1)};$$

s'il étoit $n=6$, nous aurions

$$x=\frac{3}{n(n-1)};$$

s'il étoit $n=8$, nous aurions

$$x=\frac{4}{n(n-1)}$$

etc.,

et partant en général, quelque nombre pair que puisse être n, nous aurons

$$x=\frac{n:2}{n(n-1)}=\frac{1}{2(n-1)}.$$

Nous n'avons donc qu'à ajouter l'avantage qui résulte du cas lorsque les deux cartes signifiantes sont les dernieres, et nous obtiendrons l'avantage entier du Banquier

$$x = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n+2}{2n(n-1)}.$$

REMARQUE 1

6. Lorsque, parmi les n cartes, il n'y a qu'une seule carte signifiante, l'avantage du Banquier vaut

$$\frac{1}{n} = \frac{2n-2}{2n(n-1)};$$

donc, à moins que n ne soit quatre ou deux, l'avantage du Banquier est plus grand lorsqu'il n'y a qu'une carte signifiante que lorsqu'il y en a deux.

REMARQUE 2

7. Il est donc, au contraire, plus profitable pour le Ponte qu'il y ait encore deux cartes signifiantes dans la taille, pourvu que la taille contienne encore plus de 4 cartes.

REMARQUE 3

8. Ce cas peut avoir lieu lorsque $n = 50$, et alors l'avantage du Banquier sera $\frac{52}{100 \cdot 49} = \frac{13}{1225}$, ou vaudra un peu plus qu'un pour 100. Mais, si le nombre des cartes, n, n'étoit que 10, son avantage seroit $\frac{12}{20 \cdot 9} = \frac{1}{15}$, ou vaudroit presque 7 pour cent.

PROBLEME 3

9. *Le nombre de toutes les cartes étant* $= n$, *s'il y a trois cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$, et que a, b, c, d etc. marquent ses avantages, qu'il aura après avoir tiré 2, 4, 6, 8 etc. cartes; nous aurons à considérer les mêmes quatre cas qui sont exposés dans la solution du second probleme.

Donc, puisqu'il y a 3 cartes signifiantes parmi n cartes, la probabilité que la premiere tirée soit signifiante sera $=\frac{3}{n}$, et qu'elle ne le soit pas, $=\frac{n-3}{n}$.

Soit la premiere signifiante; et puisqu'il y en a encore 2 parmi $n-1$ cartes, la probabilité que la seconde soit signifiante sera $\frac{2}{n-1}$, et qu'elle ne le soit pas, $=\frac{n-3}{n-1}$; donc, qu'il arrive le premier cas, la probabilité est

$$=\frac{3\cdot 2}{n(n-1)},$$

le second cas, la probabilité est

$$=\frac{3(n-3)}{n(n-1)}.$$

Or, si la premiere n'est pas signifiante, puisque parmi les $n-1$ cartes restantes il y a 3 cartes signifiantes, la probabilité que la seconde soit signifiante est $=\frac{3}{n-1}$, et qu'elle ne le soit pas, $=\frac{n-4}{n-1}$.

Donc, pour qu'il arrive le troisieme cas, la probabilité est

$$=\frac{3(n-3)}{n(n-1)},$$

le quatrieme cas, la probabilité est

$$=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$

De là, nous concluons l'avantage du Banquier

$$x=\frac{3\cdot 2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3(n-3)}{n(n-1)}\cdot 1-\frac{3(n-3)}{n(n-1)}\cdot 1+\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}a$$

ou bien

$$x=\frac{3+(n-3)(n-4)a}{n(n-1)}.$$

Par un raisonnement tout semblable, nous déterminerons la valeur de a, en posant le nombre des cartes $=n-2$,

$$a = \frac{3+(n-5)(n-6)b}{(n-2)(n-3)},$$

et ensuite

$$b = \frac{3+(n-7)(n-8)c}{(n-4)(n-5)},$$

$$c = \frac{3+(n-9)(n-10)d}{(n-6)(n-7)}$$

etc.

Substituons ces valeurs trouvées, et nous en tirerons

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}b,$$

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{3(n-6)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)}c,$$

et poursuivant ces substitutions jusqu'à la fin

$$x = \frac{3}{n(n-1)(n-2)}\big((n-2)+(n-4)+(n-6)+(n-8)+\cdots+0\big);$$

nous avons donc une progression arithmétique à sommer, dont le nombre des termes est $\frac{n}{2}$ et la somme du premier et dernier $= n-2$; d'où la somme de la progression est

$$= \frac{n(n-2)}{4},$$

et partant

$$x = \frac{3}{4(n-1)}.$$

C'est aussi la véritable valeur de l'avantage du Banquier, puisque le cas irrégulier des deux dernieres cartes ne sauroit ici avoir lieu. Donc, l'avantage cherché du Banquier est dans ce cas en général

$$x = \frac{3}{4(n-1)}.$$

REMARQUE 1

10. Si, parmi les n cartes, il n'y en a qu'une signifiante, l'avantage du Banquier est

$$= \frac{1}{n};$$

et s'il n'y en a que deux, son avantage est

$$= \frac{n+2}{2n(n-1)}.$$

Donc, selon qu'il y a une ou deux ou trois cartes signifiantes, l'avantage du Banquier suit le rapport de ces trois nombres

$$4n - 4, \quad 2n + 4, \quad 3n.$$

Donc, pourvu qu'il soit $n > 4$, l'avantage du Banquier est le plus petit lorsque la taille contient encore deux cartes signifiantes.

REMARQUE 2

11. Or, si $n > 4$, l'avantage du Banquier est plus grand si la taille contient une carte signifiante que si elle en contient trois. Donc, le nombre des cartes de la taille demeurant le même, le Ponte agira le plus avantageusement lorsqu'il met sur une carte qui se trouve encore deux fois dans la taille.

REMARQUE 3

12. Lorsque la taille contient trois cartes signifiantes, l'avantage du Banquier est d'autant plus petit plus le nombre des cartes est grand. Le plus petit avantage sera donc lorsque $n = 50$, qui vaut $\frac{3}{4 \cdot 49} = \frac{3}{196}$, ou $1\frac{1}{2}$ pour cent à peu près.

Lorsque la taille ne contient plus que 10 cartes, l'avantage du Banquier sera $= \frac{3}{4 \cdot 9} = \frac{1}{12}$, ou $8\frac{1}{3}$ pour cent.

PROBLEME 4

13. *Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a quatre cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

En opérant de la maniere précédente; puisqu'il y a 4 cartes signifiantes, la probabilité que la premiere tirée en soit une sera $\frac{4}{n}$, et qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-4}{n}$.

Soit donc la premiere signifiante; et puisqu'il y en a encore 3 parmi les $n-1$ cartes restantes, la probabilité que la seconde soit signifiante est $\frac{3}{n-1}$, et qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-4}{n-1}$.

Donc, pour qu'il arrive le premier cas, la probabilité est

$$= \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)},$$

le second cas, la probabilité est

$$= \frac{4(n-4)}{n(n-1)}.$$

Or, si la premiere n'est pas signifiante, puisqu'il y en a encore 4 parmi les $n-1$ restantes, la probabilité que la seconde soit signifiante est $= \frac{4}{n-1}$, et qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-5}{n-1}$.

Donc, pour qu'il arrive le troisieme cas, la probabilité est

$$= \frac{4(n-4)}{n(n-1)},$$

le quatrieme cas, la probabilité est

$$= \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}.$$

De là, nous concluons

$$x = \frac{12}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} a$$

ou bien

$$x = \frac{6}{n(n-1)} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} a;$$

et de la même maniere

$$a = \frac{6 + (n-6)(n-7)b}{(n-2)(n-3)},$$

$$b = \frac{6 + (n-8)(n-9)c}{(n-4)(n-5)},$$

$$c = \frac{6 + (n-10)(n-11)d}{(n-6)(n-7)}$$

etc.

De là, nous tirerons la valeur de x cherchée:

$$x = \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \big((n-2)(n-3) + (n-4)(n-5) + (n-6)(n-7) + \cdots + 0\big).$$

Cette progression étant algébrique, si nous en cherchons la somme par les regles connues, nous la trouvons

$$= \frac{n(n-2)(2n-5)}{12},$$

et partant, l'avantage du Banquier sera

$$x = \frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}.$$

L'AVANTAGE DU BANQUIER

vaut autant pour cent que la table suivante montre

Nombre de toutes les cartes	Pour une carte signifiante	Pour deux cartes signifiantes	Pour trois cartes signifiantes	Pour quatre cartes signifiantes
2	50,000	100,000	—	—
4	25,000	25,000	25,000	50,000
6	16,667	13,333	15,000	23,333
8	12,500	8,929	10,714	15,714
10	10,000	6,667	8,333	11,905
12	8,333	5,303	6,818	9,596
14	7,143	4,395	5,769	8,042
16	6,250	3,750	5,000	6,923
18	5,556	3,268	4,412	6,078
20	5,000	2,895	3,947	5,418
22	4,545	2,597	3,571	4,887
24	4,167	2,355	3,261	4,451
26	3,846	2,154	3,000	4,087
28	3,571	1,984	2,778	3,777
30	3,333	1,839	2,586	3,512
32	3,125	1,714	2,419	3,281 [1])
34	2,941	1,604	2,273	3,079 [2])
36	2,778	1,508	2,143	2,900 [3])
38	2,632	1,422	2,027	2,741
40	2,500	1,346	1,923	2,599
42	2,381	1,277	1,829	2,470
44	2,273	1,216	1,744	2,354
46	2,174	1,160	1,667	2,248
48	2,083 [4])	1,109 [5])	1,596	2,151
50	—	1,061	1,531	2,062 [6])
52	—	—	—	1,981

1) . . . 6) Edition originale:

3,272; 3,078; 2,901; 2,084; 1,108; 2,061. L. G. D.

REMARQUE 1

14. En considérant cette table, on peut donner aux Pontes cette regle, afin qu'ils risquent le moins:

Qu'ils attendent jusqu'à ce que deux cartes d'une espece soient sorties, et aussitôt que cela est arrivé, qu'ils choisissent cette carte pour leur mise.

REMARQUE 2

15. Le cas le plus avantageux pour les Pontes est donc, lorsque le Banquier tire au premier coup deux cartes semblables, de sorte qu'il lui reste encore 50 cartes dans la main. Car alors, quand le Ponte met sur cette carte, l'avantage du Banquier sera le plus petit possible.

REMARQUE 3

16. Cependant, s'il n'arrivoit pas que deux cartes semblables sortissent avant que le Banquier eût tiré 16 cartes, il vaudroit autant que le Ponte mette d'abord, au second coup, sur une carte qui seroit sortie au premier coup; mais, comme il n'y a que 13 cartes de chaque espece, ce cas ne sauroit arriver.

REMARQUE 4

17. Quand le Banquier n'a plus que 28 cartes dans la main, ou encore moins, il n'est plus à propos de mettre sur une carte, quoiqu'elle ne se trouve que 2 fois dans la taille. Il vaudra mieux d'attendre que le Banquier recommence, et de mettre alors sur une carte quelconque; mais le plus seur moyen est toujours d'attendre encore alors le second coup, et de mettre sur une carte qui sera sortie au premier.

REMARQUE 5

18. C'est encore une regle fort essentielle pour les Pontes, qu'ils ne mettent jamais sur une carte, quelle qu'elle soit, lorsque la taille a déjà fort diminué. Il n'est aussi jamais bon de mettre sur une carte qui ne se trouve plus qu'une seule fois dans la taille. Car, quand même cela arriveroit déjà au troisieme coup, le Banquier auroit plus que 2 pour cent d'avantage sur lui. Or, un prudent Ponte peut toujours faire en sorte que l'avantage du Banquier surpasse à peine un pour cent.

PROBLEME 5

19. *Le nombre des cartes étant* $= n$, *s'il y a cinq cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$ et faisant le même raisonnement comme auparavant, on parviendra enfin à cette équation[1])

$$x = \frac{10\big((n-2)(n-3)(n-4) + (n-4)(n-5)(n-6) + (n-6)(n-7)(n-8) + \cdots + 0\big)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Or, la somme de la progression qui fait ici partie du numérateur se trouve

$$= \frac{n(n-2)^2(n-4)}{8},$$

d'où nous tirons l'avantage du Banquier

$$x = \frac{5(n-2)}{4(n-1)(n-3)}.$$

PROBLEME 6

20. *Le nombre des cartes étant* $= n$, *s'il y a six cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Pour trouver cet avantage, que je nomme $= x$, on parvient à cette progression

$$s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + (n-4)(n-5)(n-6)(n-7) + \cdots + 0,$$

---

1) L'édition originale porte par erreur, au numérateur,

$$10\,((n-2)(n-3)(n-4) + (n-4)(n-5)(n-6) + (n-5)(n-6)(n-7) + \cdots + 0).$$

L. G. D.

dont on trouve la valeur

$$s = \frac{n(n-2)(n-4)(2nn-13n+16)}{20},$$

et celle de x sera

$$x = \frac{15s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}.$$

Par conséquent, l'avantage du Banquier sera

$$x = \frac{3(2nn-13n+16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}.$$

PROBLEME 7

21. *Le nombre des cartes étant* $= n$, *s'il y a sept cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

On parviendra à cette équation

$$x = \frac{21s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}$$

et

$$s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) + (n-4)\cdots(n-8) + \cdots + 0.$$

Or, la somme est

$$s = \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(2nn-12n+13)}{24}.$$

Donc

$$x = \frac{7(2nn-12n+13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)},$$

ce qui est l'avantage du Banquier.

PROBLEME 8

22. *Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a huit cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Maintenant, il s'agit de trouver la somme de cette progression

$$s = (n-2)\cdots(n-7) + (n-4)\cdots(n-9) + (n-6)\cdots(n-11) + \cdots + 0.$$

Or, les regles connues nous fournissent cette somme [1])

$$s = \tfrac{1}{56} n(n-2)(n-4)(n-6)(4n^3 - 50nn + 176n - 151),$$

et alors on aura

$$x = \frac{28s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}.$$

Par conséquent, l'avantage du Banquier sera

$$x = \frac{4n^3 - 50nn + 176n - 151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}.$$

REMARQUE 1

23. Si l'on veut aller plus loin et supposer le nombre des cartes signifiantes plus grand, tout revient à la sommation de semblables progressions; qui étant algébriques, on n'a qu'à faire l'application des regles connues pour en trouver la somme.

REMARQUE 2

24. Pour mettre devant les yeux tout ce que nous venons de trouver, en marquant le nombre de toutes les cartes par n, on a

1) Dans l'édition originale, le premier facteur de s est $\frac{1}{12}$, au lieu de $\frac{1}{56}$. L. G. D.

l'avantage du Banquier

pour 1 carte signifiante $\frac{1}{n}$,

pour 2 cartes signifiantes $\frac{n+2}{2n(n-1)}$,

pour 3 cartes signifiantes $\frac{3}{4(n-1)}$,

pour 4 cartes signifiantes $\frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}$,

pour 5 cartes signifiantes $\frac{5n-10}{4(n-1)(n-3)}$,

pour 6 cartes signifiantes $\frac{3(2nn-13n+16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}$,

pour 7 cartes signifiantes $\frac{7(2nn-12n+13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)}$,

pour 8 cartes signifiantes $\frac{4n^3-50nn+176n-151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}$

etc.

REMARQUE 3

25. Il est difficile de découvrir une loi dans ces expressions; aussi n'en faut-il pas chercher parmi toutes, puisque la premiere et la seconde sont assujetties à des irrégularités qui n'ont pas lieu dans les suivantes. Or, si nous négligeons ces anomalies des cas d'une et deux cartes signifiantes, l'avantage se trouve au premier $=0$ et au second $=\frac{1}{2(n-1)}$; et ce sont les formules qui, avec les suivantes, doivent observer une certaine loi de progression.

REMARQUE 4

26. Quelque embrouillée que paroisse cette loi, elle paroitra assés clairement, si nous décomposons les fractions trouvées en des fractions simples, selon les facteurs du dénominateur de chacune. Par ce moyen, on changera ces expressions dans les suivantes:

Nombre des cartes signifiantes	Avantage du Banquier
...	0
...	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}$
3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{n-1}$
4	$\frac{1}{8}\left(\frac{6}{n-1}+\frac{2}{n-3}\right)$
5	$\frac{1}{16}\left(\frac{10}{n-1}+\frac{10}{n-3}\right)$
6	$\frac{1}{32}\left(\frac{15}{n-1}+\frac{30}{n-3}+\frac{3}{n-5}\right)$
7	$\frac{1}{64}\left(\frac{21}{n-1}+\frac{70}{n-3}+\frac{21}{n-5}\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(\frac{28}{n-1}+\frac{140}{n-3}+\frac{84}{n-5}+\frac{4}{n-7}\right)$

En considérant ces formules, on y découvrira aisément la loi de la progression; et posant en général le nombre des cartes signifiantes $=\nu$, le nombre de toutes les cartes étant $=n$, l'avantage du Banquier sera

$$\frac{1}{2^{\nu-1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{2\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n-3}\\ +\frac{3\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{1}{n-5}+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

qui se change en celle-ci

$$\frac{\nu}{2^\nu}\left(\frac{\nu-1}{1(n-1)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3(n-3)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(n-5)}+\text{etc.}\right).$$

PROBLEME GENERAL

27. *Le nombre de toutes les cartes étant $=n$, si le nombre des cartes signifiantes est $=\nu$, trouver l'avantage du Banquier.*

SOLUTION

Nous venons de voir que l'avantage du Banquier sera

$$\frac{\nu}{2^\nu}\left(\frac{\nu-1}{1(n-1)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3(n-3)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(n-5)}+\text{etc.}\right),$$

excepté les cas où l'on a $\nu=1$ ou $\nu=2$. Or, si nous considérons cette progression, nous verrons aisément qu'elle peut être renfermée dans une expression finie intégrale

$$\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-1}dz\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\nu-1}-\int z^{n-1}dz\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\nu-1}\right).$$

Car, ayant pris ces intégrales en sorte qu'elles évanouissent posant $z=0$, on n'a qu'à mettre ensuite $z=1$.

En observant cette regle dans les intégrations, l'avantage du Banquier pourra aussi être exprimé en sorte

$$\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-\nu}dz(z+1)^{\nu-1}-\int z^{n-\nu}dz(z-1)^{\nu-1}\right),$$

posant après l'intégration $z=1$.

On voit d'abord que cette formule ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne soit $n>\nu$, puisqu'on ne sauroit rendre l'intégrale $=0$, au cas $z=0$, ce qui est conforme à la nature de la question.

REMARQUE 1

28. Suivant la méthode directe, nous aurions eu à sommer cette progression

$$s=(n-2)(n-3)\cdots(n-\nu+1)+(n-4)(n-5)\cdots(n-\nu-1)+\cdots+0,$$

et l'avantage du Banquier auroit été[1])

$$x=\frac{\nu(\nu-1)s}{2n(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu+1)}.$$

Donc, réciproquement, on obtiendra la somme de la progression

$$s=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu+1)}{(\nu-1)2^{\nu}}\left(\int z^{n-\nu}dz(z+1)^{\nu-1}-\int z^{n-\nu}dz(z-1)^{\nu-1}\right).$$

---

1) Dans l'édition originale, le facteur 2 manque au dénominateur de la fraction qui donne x, et cette erreur se répercute dans les formules suivantes. Nous avons opéré les modifications nécessaires. L. G. D.

REMARQUE 2

29. Or, posant $n-2=2t$ ou $n=2t+2$, la quantité s marque la somme d'une progression algébrique dont le terme général, ou celui qui répond à l'exposant t, est

$$T=2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\cdots(2t-\nu+3).$$

Et partant, nous pourrons assigner la somme $S.\,T$ qui convient à ce terme général par l'expression intégrale suivante:

$$S.\,T=\frac{(t+1)(2t+1)}{(\nu-1)2^{\nu-1}}T\int z^{2t+2-\nu}dz((z+1)^{\nu-1}-(z-1)^{\nu-1}).$$

REMARQUE 3

30. Mais, en développant cette formule intégrale, nous aurons

$$S.\,T=\frac{(2t+2)(2t+1)}{2^{\nu-1}}T\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot3(2t-1)}+\frac{(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,(2t-3)}+\text{etc.}\right),$$

et cette sommation est juste, quelques nombres entiers qu'on mette pour les lettres t et ν en sorte que $\nu<2t+2$, ou plutôt que ν ne soit pas plus grand que $2t+2$. Cette somme répond donc au terme général

$$T=2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\cdots(2t-\nu+3),$$

l'exposant du dernier terme de la progression étant $=t$.

RECHERCHES GENERALES SUR LA MORTALITE ET LA MULTIPLICATION DU GENRE HUMAIN

Commentatio 334 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [16] (1760), 1767, p. 144—164

1. Les régistres des naissans et des morts à chaque âge, qu'on publie en plusieurs endroits tous les ans, fournissent tant de questions différentes sur la mortalité et la multiplication du genre humain, qu'il seroit trop long de les rapporter toutes. Or, les unes dépendent pour la plûpart en sorte des autres, qu'en ayant développé une ou deux, toutes les autres se trouvent pareillement déterminées. Comme les solutions doivent être tirées des régistres mentionnés, il est à remarquer que ces régistres différent beaucoup, selon la diversité des villes, villages et provinces où ils ont été dressés; et par la même raison, les solutions de toutes ces questions se trouvent fort différentes selon les régistres sur lesquels elles sont fondées. C'est pourquoi je me propose de traiter ici en général la plupart de ces questions, sans me borner aux résultats que les régistres d'un certain endroit fournissent; et ensuite, il sera aisé de faire l'application à chaque endroit qu'on voudra.

2. Or, j'observe d'abord que toutes ces questions prises en général dépendent de deux hypotheses; lesquelles étant bien fixées, il est aisé d'en tirer la solution de toutes. Je nommerai la premiere *l'hypothese de la mortalité*, par laquelle on détermine combien, d'un certain nombre d'hommes qui sont nés à la fois, seront encore en vie après chaque nombre d'années écoulées. Ici, la considération de la multiplication n'entre point du tout en compte, et par-

tant il faut constituer la seconde hypothese, que je nommerai celle *de la multiplication*, et par laquelle je marque de combien le nombre de tous les hommes est augmenté ou diminué pendant le cours d'un an. Cette hypothese dépend donc de la quantité des mariages et de la fécondité, pendant que la premiere est fondée sur la vitalité ou le pouvoir de vivre, qui est propre aux hommes.

I. HYPOTHESE DE LA MORTALITE

3. Pour la premiere hypothese, concevons un nombre quelconque N d'enfans qui soient nés en même tems; et je marquerai le nombre de ceux qui seront encore en vie au bout d'un an par $(1)N$, de ceux qui le seront encore au bout de deux ans par $(2)N$, de trois ans par $(3)N$, de quatre ans par $(4)N$ et ainsi de suite. Ce sont des signes généraux que j'emploie pour marquer comment le nombre des hommes nés en même tems décroit successivement; qui auront pour chaque climat et chaque maniere de vivre des valeurs particulieres. Cependant, on peut remarquer que les nombres indiqués par [1])

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5)\quad \text{etc.}$$

constituent une progression décroissante de fractions, dont la plus grande, (1), est moindre que l'unité; et quand on continue ces termes au de là de 100, ils décroitront si fort qu'ils évanouissent presque entierement. Car, si de 100 millions d'hommes aucun n'atteint l'âge de 125 ans, il faut que le terme (125) soit moindre que $\frac{1}{100000000}$.

4. Ayant établi pour un certain lieu par un assez grand nombre d'observations les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4) etc., on peut résoudre quantité de questions qu'on propose ordinairement sur la probabilité de la vie humaine. D'abord il est évident, si le nombre des enfans nés en même tems est $= N$, que, selon la probabilité, il en mourra tous les ans autant que cette table en marque:

1) Euler utilise ces mêmes symboles dans plusieurs autres travaux, mais il leur attribue parfois une signification différente. Voir à ce propos la note 1 p. 103 du présent volume et la préface de l'éditeur. L. G. D.

depuis	0	ans	à	1	il	en	mourra	$N-(1)N$,
„	1	„	„	2	„	„	„	$(1)N-(2)N$,
„	2	„	„	3	„	„	„	$(2)N-(3)N$,
„	3	„	„	4	„	„	„	$(3)N-(4)N$,
„	4	„	„	5	„	„	„	$(4)N-(5)N$

etc.

Et comme de ce nombre N il y aura encore probablement en vie $(n)N$ au bout de n ans, il faut que le nombre des morts avant ce terme de n ans soit $=N-(n)N$. Après cette remarque, je donnerai la solution des questions suivantes.

1. QUESTION

5. *Un certain nombre d'hommes, dont tous soient du même âge, étant donné, trouver combien en seront probablement encore en vie après un certain nombre d'années.*

Supposons qu'il y ait M hommes qui ayent le même âge de m ans et qu'on demande, combien en vivront probablement encore après n ans. Qu'on pose

$$M=(m)N,$$

pour avoir $N=\frac{M}{(m)}$, où N marque le nombre de tous les enfans nés en même tems, dont il reste encore en vie M après m ans. Or, de ce même nombre seront probablement encore en vie $(m+n)N$ après $m+n$ ans depuis leur naissance et partant après n ans depuis le tems proposé. Donc, le nombre cherché dans la question est

$$=\frac{(m+n)}{(m)}M;$$

ou après n ans, il y aura probablement encore autant de vivans de M hommes qui ont tous à présent m ans.

Donc, il est probable que du nombre d'hommes, M, âgés tous de m ans, il en mourra

$$\left(1-\frac{(m+n)}{(m)}\right)M,$$

avant qu'il s'en écoulent n ans.

2. QUESTION

6. *Trouver la probabilité qu'un homme d'un certain âge soit encore en vie après un certain nombre d'années.*

Que l'homme en question soit âgé de m ans, et qu'on cherche la probabilité que cet homme soit encore en vie au bout de n ans. Concevons M hommes du même âge, et puisque, après n ans, il y en aura probablement encore vivans $\frac{(m+n)}{(m)}M$, la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera

$$=\frac{(m+n)}{(m)}.$$

Donc, la probabilité que cet homme vienne à mourir avant le bout de ces n ans est

$$1-\frac{(m+n)}{(m)}.$$

Et partant, l'espérance que cet homme peut avoir de ne pas mourir dans l'intervalle des $m+n$ années prochaines est à la crainte de mourir dans ce même intervalle comme $(m+n)$ à $(m)-(m+n)$. Donc, l'espérance surpassera la crainte si $(m+n)>\frac{1}{2}(m)$, et la crainte sera plus fondée si $(m+n)<\frac{1}{2}(m)$. Or, la crainte égalera l'espérance si $(m+n)=\frac{1}{2}(m)$.

3. QUESTION

7. *On demande la probabilité qu'un homme d'un certain âge mourra dans le cours d'une année donnée.*

Que l'homme en question soit âgé de m ans, et qu'on demande la probabilité qu'il atteigne l'âge de n ans[1]), mais qu'il meure avant qu'il parvienne à l'âge de $n+1$ ans. Pour trouver cette probabilité, concevons un grand nombre M d'hommes du même âge, et ayant $M=(m)N$ et $N=\frac{M}{(m)}$, il y aura $\frac{(n)}{(m)}M$ hommes qui atteignent l'âge de n ans et $\frac{(n+1)}{(m)}M$ qui atteignent celui de $n+1$ ans; il en mourra donc probablement dans le cours de cette année

$$\frac{(n)-(n+1)}{(m)}M;$$

1) D'après le manuscrit. Les mots *et qu'on demande . . . de n ans* ne se trouvent pas dans l'édition originale. L. G. D.

et partant, la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera

$$=\frac{(n)-(n+1)}{(m)}.$$

De là il est évident, pour que ce même homme meure entre l'année n et l'année $n+\nu$ de son âge, la probabilité sera

$$=\frac{(n)-(n+\nu)}{(m)}.$$

Or, pour que cet homme meure un jour marqué de l'année proposée, la probabilité sera

$$=\frac{(n)-(n+1)}{365\,(m)}.$$

Si la question est d'un enfant nouvellement né, on n'a qu'à écrire 1 au lieu de la fraction (m).

4. QUESTION

8. *Trouver le terme auquel un homme d'un âge donné peut espérer de parvenir, de sorte qu'il est également probable qu'il meure avant ce terme qu'après.*

Soit l'âge de l'homme en question de m ans et celui qu'il peut espérer d'attendre de z ans, qu'il s'agit de trouver. Or, la probabilité qu'il parvienne à cet âge étant $=\frac{(z)}{(m)}$, la probabilité qu'il meure avant ce terme sera $=1-\frac{(z)}{(m)}$. Donc, puisque l'une et l'autre probabilité doit être la même, nous aurons cette équation

$$\frac{(z)}{(m)}=1-\frac{(z)}{(m)},$$

et partant $(z)=\frac{1}{2}(m)$, dont il est aisé de trouver le nombre z, dès qu'on a déterminé par les observations les valeurs de toutes ces fractions

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5),\quad (6)\quad \text{etc.};$$

car on verra d'abord laquelle, (z), sera la moitié de la proposée (m).

Ayant trouvé ce nombre z, on nomme l'intervalle $z-m$ *la force de la vie* d'un homme de m ans.

5. QUESTION

9. *Déterminer les rentes viageres qu'il est juste de payer à des hommes d'un âge quelconque tous les ans, jusqu'à leur mort, pour une somme qu'ils auront avancée d'abord.*

Concevons M hommes qui ayent tous le même âge de m ans, et que chacun paye d'abord la somme a; ce qui fournira un fond $= Ma$. Soit x la somme qu'on doit payer à chacun tous les ans, tant qu'il est en vie; et après un an le fond doit payer

$$\frac{(m+1)}{(m)} Mx,$$

après deux ans

$$\frac{(m+2)}{(m)} Mx,$$

après trois

$$\frac{(m+3)}{(m)} Mx$$

et ainsi de suite.

Or, comptant que le fond soit placé à 5 pour cent, une somme S payable après n ans ne vaut à présent que $\left(\frac{20}{21}\right)^n S$; mais, pour rendre notre détermination plus générale, supposons qu'une somme S croisse par les intérêts dans un an à λS; et $\frac{1}{\lambda}$ sera ce que nous avons marqué par $\frac{20}{21}$, et une somme S payable au bout de n ans ne vaudra à présent que $S:\lambda^n$. De là, on dressera le calcul suivant:

	on doit payer	ce qui vaut à présent
après 1 an	$\frac{(m+1)}{(m)} Mx,$	$\frac{(m+1)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda},$
après 2 ans	$\frac{(m+2)}{(m)} Mx,$	$\frac{(m+2)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^2},$
après 3 ans	$\frac{(m+3)}{(m)} Mx$	$\frac{(m+3)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^3}$
	etc.;	etc.

Or, l'équité exige que toutes ces sommes réduites au tems présent soient égales au fond entier Ma, d'où l'on tire cette équation

$$a = \frac{x}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \text{ etc.}\right),$$

et partant, ce que le fond doit payer par an à chaq'un des intéressans est

$$x = \frac{(m)a}{\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \text{etc.}}.$$

Sachant donc les valeurs de toutes ces fractions (1), (2), (3) etc., il est aisé de trouver la somme x qui convient à chaque âge de m ans, rapportée à un intérêt donné.

6. QUESTION

10. *Quand les intéressans sont des enfans nouvellement nés et que le payement des rentes viageres ne doit commencer que lorsqu'ils auront atteint un certain âge, déterminer la quantité de ces rentes.*

Supposons qu'on paye la somme a pour chaque enfant nouvellement né et qu'il ne doive recevoir des rentes que lorsqu'il aura atteint l'âge de n ans; que depuis ce tems, on lui paye tous les ans la somme x qu'il faut déterminer. Comptant donc les intérêts comme auparavant, on parviendra à cette équation

$$a = x\left(\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \text{etc.}\right),$$

qui fournit

$$x = \frac{a}{\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \text{etc.}}.$$

D'où il est évident qu'une telle rente peut devenir fort avantageuse et qu'un homme, lorsqu'il aura atteint un certain âge, peut jouir de rentes considérables à peu de fraix, pendant toute sa vie.

11. Toutes ces questions se résoudront donc facilement, dès qu'on connoitra les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4) etc., qui dépendent tant du climat que de la maniere de vivre; aussi a-t-on remarqué que ces valeurs sont différentes pour les deux sexes[1]), de sorte qu'on ne sauroit rien déter-

1) Euler fait ici allusion aux travaux de Nicolaas Struyck. Voir l'Addition de l'éditeur à la fin de ce mémoire. L. G. D.

miner en général. Or, pour les conclure des observations, on comprend aisément qu'il en faut employer un grand nombre, qui s'étend même sur toutes sortes de personnes; et à cet égard, on ne sauroit se servir des régistres des rentes viageres, qui commencent par des enfans au dessous d'un an. Car d'abord, on ne peut pas regarder ces enfans comme nouvellement nés, et la plupart est sans doute déjà échappée aux dangers des premiers mois; et ensuite, on ne s'engagera gueres souvent pour des enfans d'une complexion foible, de sorte qu'on doit regarder comme choisis les enfans pour lesquels on prend des rentes viageres. Ainsi, les valeurs de nos fractions (1), (2), (3) etc. qu'on conclura des régistres des rentes viageres seront infailliblement trop grandes, surtout à l'égard des premiers ans. Cependant, puisqu'il faut régler les rentes sur de tels régistres plutôt que sur la véritable mortalité, j'ajoûterai les valeurs de nos fractions telles qu'on les tire des observations de M. Kersseboom.[1])

1) Voir l'Addition de l'éditeur à la fin de ce mémoire. De la table que dressa Kersseboom, on déduit des taux qui en quatre endroits diffèrent légèrement de ceux utilisés par Euler; ce sont: (5) = 0,68857, qu'on devrait donc abréger en 0,689; puis (8) = 0,652; (30) = 0,508; (90) = 0,007; (91) = 0,005. L. G. D.

(1) = 0,804	(25) = 0,552	(49) = 0,370	(73) = 0,145
(2) = 0,768	(26) = 0,544	(50) = 0,362	(74) = 0,135
(3) = 0,736	(27) = 0,535	(51) = 0,354	(75) = 0,125
(4) = 0,709	(28) = 0,525	(52) = 0,345	(76) = 0,114
(5) = 0,688	(29) = 0,516	(53) = 0,336	(77) = 0,104
(6) = 0,676	(30) = 0,507	(54) = 0,327	(78) = 0,093
(7) = 0,664	(31) = 0,499	(55) = 0,319	(79) = 0,082
(8) = 0,653	(32) = 0,490	(56) = 0,310	(80) = 0,072
(9) = 0,646	(33) = 0,482	(57) = 0,301	(81) = 0,063
(10) = 0,639	(34) = 0,475	(58) = 0,291	(82) = 0,054
(11) = 0,633	(35) = 0,468	(59) = 0,282	(83) = 0,046
(12) = 0,627	(36) = 0,461	(60) = 0,273	(84) = 0,039
(13) = 0,621	(37) = 0,454	(61) = 0,264	(85) = 0,032
(14) = 0,616	(38) = 0,446	(62) = 0,254	(86) = 0,026
(15) = 0,611	(39) = 0,439	(63) = 0,245	(87) = 0,020
(16) = 0,606	(40) = 0,432	(64) = 0,235	(88) = 0,015
(17) = 0,601	(41) = 0,426	(65) = 0,225	(89) = 0,011
(18) = 0,596	(42) = 0,420	(66) = 0,215	(90) = 0,008
(19) = 0,590	(43) = 0,413	(67) = 0,205	(91) = 0,006
(20) = 0,584	(44) = 0,406	(68) = 0,195	(92) = 0,004
(21) = 0,577	(45) = 0,400	(69) = 0,185	(93) = 0,003
(22) = 0,571	(46) = 0,393	(70) = 0,175	(94) = 0,002
(23) = 0,565	(47) = 0,386	(71) = 0,165	(95) = 0,001
(24) = 0,559	(48) = 0,378	(72) = 0,155	

Or, puisque cette table est dressée sur des enfans choisis et qui ont même déjà survécu quelques mois depuis leur naissance, si l'on veut l'appliquer à tous les enfans nouvellement nés dans une ville ou province, il faut diminuer tous ces nombres d'une certaine partie, pour tenir compte de la grande mortalité à laquelle les enfans sont assujettis aussitôt après leur naissance. Mais nous tirerons cette correction plus seurement des observations qui renferment déjà la multiplication, que je m'en vai considérer.

II. HYPOTHESE DE LA MULTIPLICATION

12. C'est le principe de la propagation sur lequel cette hypothese est fondée; d'où il est d'abord évident que, s'il naît tous les ans autant d'enfans qu'il meurt d'hommes, le nombre de tous les hommes demeurera toujours le même et qu'il n'y aura point alors de multiplication. Mais, si le nombre des enfans qui naissent tous les ans surpasse le nombre des morts, chaque année produira une augmentation dans le nombre des vivans, qui sera égale à l'excès des naissans sur les morts. Or, cette augmentation se changera en diminution, lorsque le nombre des morts surpasse celui des naissans. De là, nous aurons trois cas à considérer: le premier, où le nombre des hommes demeure constamment le même; le second, où il augmente tous les ans; et le troisieme, où il diminue tous les ans. Donc, si M marque le nombre de tous les hommes qui vivent à présent et mM le nombre de ceux qui vivent l'année suivante, le premier cas aura lieu si $m = 1$, le second si $m > 1$, et le troisieme si $m < 1$; de sorte que tous les cas peuvent être compris dans le coëfficient général m.

13. Or, ayant fixé le principe de la propagation qui dépend des mariages et de la fécondité, il est évident que le nombre des enfans qui naissent pendant le cours d'une année, doit tenir un certain rapport au nombre de tous les hommes vivans. D'où il s'ensuit que, si le nombre des vivans demeure toujours le même, il naitra tous les ans le même nombre d'enfans; et si le nombre des vivans croît ou décroît, le nombre des naissances doit croître ou décroître dans la même raison. Donc, en comparant ensemble le nombre de tous les naissans pendant plusieurs années consécutives, selon que ce nombre demeure le même, ou qu'il augmente ou diminue, on en pourra conclure si le nombre de tous les hommes demeure le même, ou s'il va en croissant ou en décroissant. En y joignant le principe de mortalité, il est aussi clair que le nombre des mourans pendant un an doit tenir un certain rapport tant à celui de tous les vivans qu'à celui des naissans.

14. Puisque ces deux principes de la mortalité et de la propagation sont indépendans l'un de l'autre et que j'ai considéré le premier indépendamment de l'autre, on peut aussi représenter celui-ci, sans que le premier y soit mêlé. Car, supposant le nombre de tous les vivans à la fois $= M$, le nombre des enfans qui en sont produits dans l'espace d'un an pourra être posé

$= \alpha M$, de sorte que α est la mesure de la propagation ou de la fécondité. Mais il est difficile de tirer de cette position les conséquences qui regardent la multiplication et les autres phénomenes qui en dépendent. Le raisonnement deviendra plus clair, si nous introduisons d'abord dans le calcul le nombre des enfans qui naissent tous les ans, auquel si nous joignons l'hypothese de la mortalité, nous en pourrons conclure la valeur de α. Donc réciproquement, le nombre des naissances dépend à la fois des deux hypotheses de la mortalité et de la fécondité; et de là, on tirera ensuite sans difficulté la solution de toutes les autres questions qu'on propose ordinairement en traitant cette matiere.

15. Comme je suppose que la regle de la mortalité demeure toujours la même, je supposerai une semblable constance dans la fécondité; de sorte que le nombre des enfans qui naissent tous les ans soit toujours proportionnel au nombre de tous les vivans. Donc, si le nombre de tous les vivans demeure le même, on aura aussi tous les ans le même nombre de naissances; et si le nombre de tous les vivans va en augmentant ou en diminuant, le nombre des naissances annuelles croîtra ou décroîtra dans la même raison.

Soit donc N le nombre des enfans nés pendant le cours d'une année et nN celui des enfans nés l'année suivante; et puisque la raison qui a changé le nombre N en nN subsiste encore, il faut que d'une année quelconque à la suivante le nombre des naissances croisse dans la raison de 1 à n. Par conséquent, la troisieme année il naitra n^2N, la quatrieme n^3N, la cinquieme n^4N et ainsi de suite; ou bien, les nombres des naissances annuelles constitueront une progression géométrique, ou croissante ou décroissante ou d'égalité, selon que $n > 1$ ou $n < 1$ ou $n = 1$.

16. Posons donc que, dans une ville ou province, le nombre des enfans nés dans cette année soit $= N$, et de ceux qui naitront l'année prochaine $= nN$, et ainsi de suite selon cette progression:

le nombre des naissances

à présent	N,
après un an	nN,
après deux ans	n^2N,
après 3 ans	n^3N,
après 4 ans	n^4N

etc.,

et si nous supposons qu'après 100 ans aucun des hommes qui existent à présent ne soit plus en vie, il n'y aura point, après 100 ans, d'autres vivans que ceux qui resteront encore en vie de ces naissances. Donc, joignant l'hypothese de la mortalité, on pourra déterminer le nombre de tous les hommes qui vivront après 100 ans. Or, puisqu'il naitra cette année $n^{100}N$, on aura le rapport des naissances au nombre de tous les vivans.

17. Pour rendre cela plus clair, voyons combien d'hommes seront encore en vie, après cent ans, des naissances de toutes les années précédentes.

	Nombre des naissances	Après 100 ans, il en vivra encore
à présent	N	$(100)\,N$
après 1 an	nN	$(99)\,nN$
après 2 ans	n^2N	$(98)\,n^2N$
après 3 ans	n^3N	$(97)\,n^3N$
⋮	⋮	⋮
après 98 ans	$n^{98}N$	$(2)\,n^{98}N$
après 99 ans	$n^{99}N$	$(1)\,n^{99}N$
après 100 ans	$n^{100}N$	$n^{100}N$

Donc, le nombre de tous les vivans après 100 ans sera

$$=n^{100}N\left(1+\frac{(1)}{n}+\frac{(2)}{n^2}+\frac{(3)}{n^3}+\frac{(4)}{n^4}+\frac{(5)}{n^5}+\text{etc.}\right).$$

18. Les termes de cette série évanouiront enfin, en vertu de l'hypothese de mortalité; et puisque le nombre de tous les vivans a un certain rapport au nombre des naissances pendant le cours d'une année, la multiplication d'une année à l'autre, qui vient d'être supposée comme 1 à n, nous découvre ce rapport. Car, si le nombre de tous les vivans est $= M$ et le nombre des enfans qui en sont procréés pendant le cours d'une année est posé $= N$, nous aurons[1])

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \text{etc.}$$

Donc, si nous connoissons le rapport $\frac{M}{N}$ et que nous y joignons l'hypothese de mortalité ou les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4) etc., cette équation détermine réciproquement la raison de la multiplication, $1:n$, d'une année à l'autre. Cependant, on voit bien que cette détermination ne sauroit être développée en général; mais, pour chaque hypothese de mortalité, si l'on calcule le rapport $\frac{M}{N}$ pour plusieurs valeurs de n et qu'on en dresse une table, il sera aisé d'assigner réciproquement pour chaque rapport donné $M:N$, qui exprime la fécondité, l'augmentation annuelle de tous les vivans, qui est la même que celle des naissances.

19. Supposons donc que l'hypothese de mortalité ou les fractions

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5)\quad \text{etc.}$$

soient connues, de même que l'hypothese de fécondité ou le rapport de tous les vivans, M, au nombre des enfans, N, qui en sont procréés pendant un an; on en reconnoîtra si le nombre des hommes demeure invariable, ou s'il va en augmentant ou en diminuant. Car, si nous posons le nombre de tous les vivans l'année prochaine $= nM$, celui des vivans à présent étant $= M$, il faut tirer la valeur de n de l'équation trouvée

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \text{etc.},$$

et supposant connue la résolution de cette équation, il est indifférent si l'on connoit la fécondité $\frac{M}{N}$ ou la multiplication $1:n$, l'une étant déterminée par l'autre, moyennant l'hypothese de la mortalité.

1) L'édition originale porte, dans l'équation suivante, M au lieu de la fraction $\frac{M}{N}$ du manuscrit. L. G. D.

1. QUESTION

20. *Les hypotheses de mortalité et fécondité étant données, si l'on connoît le nombre de tous les vivans, trouver combien il y en aura de chaque âge.*

Soit M le nombre de tous les vivans et N le nombre des enfans qui en sont procréés dans un an; et par l'hypothese de mortalité, on connoîtra la raison de la multiplication annuelle $1:n$. Or, connoissant la valeur de n, il est aisé de conclure du § 17 qu'il y aura, parmi le nombre M,

N enfans nouvellement nés,

$\frac{(1)}{n}N$ âgés d'un an,

$\frac{(2)}{n^2}N$ âgés de deux ans,

$\frac{(3)}{n^3}N$ âgés de 3 ans,

$\frac{(4)}{n^4}N$ âgés de 4 ans

et en général

$\frac{(a)}{n^a}N$ âgés de a ans.

Or, la somme de tous ces nombres pris ensemble est $= M$.

2. QUESTION

21. *Les mêmes choses étant données, trouver le nombre des hommes qui mourront dans un an.*

Soit M le nombre des hommes qui vivent à présent, y compris les enfans qui sont nés cette année, dont le nombre soit $= N$; et le quotient $\frac{M}{N}$ déterminera l'augmentation annuelle, qui soit $1:n$. Donc, l'année prochaine, le nombre des vivans sera $= nM$, parmi lequel se trouve le nombre des nouvellement nés $= nN$; les autres, dont le nombre est $nM - nN$, sont ceux qui sont encore en vie de l'année précédente, dont le nombre étoit $= M$; d'où il s'ensuit qu'il en est mort

$$(1-n)M + nN.$$

Donc, si le nombre des vivans est $= M$, il en meurent pendant le cours d'une année $(1-n)M + nN$, tandis que dans ce même tems il en naissent N enfans.

3. QUESTION

22. *Connoissant tant le nombre des naissances que des enterremens qui arrivent pendant le cours d'une année, trouver le nombre de tous les vivans et leur augmentation annuelle, pour une hypothese de mortalité donnée.*

Soit N le nombre des naissances et O le nombre des enterremens qui arrivent dans une année; ensuite, posons le nombre de tous les vivans $= M$ et l'augmentation annuelle $= 1:n$, et la solution précédente nous fournit cette équation

$$O = (1-n)M + nN.$$

Or, l'hypothese de mortalité donne

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \text{ etc.}$$

Donc, ayant par la premiere

$$M = \frac{O - nN}{1-n},$$

cette valeur, étant substituée dans l'autre équation, donne[1])

$$\frac{O-N}{N(1-n)} = \frac{N-O}{N(n-1)} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \text{etc.},$$

d'où il faut trouver la valeur du nombre n.

23. Si le nombre des enterremens, O, est égal à celui des naissances, N, de sorte que

$$N = (1-n)M + nN,$$

1) L'édition originale (aussi bien que le manuscrit) porte, dans l'équation suivante,

$$\frac{O-N}{1-n} = \frac{N-O}{n-1} \text{ au lieu de } \frac{O-N}{N(1-n)} = \frac{N-O}{N(n-1)}.$$ L. G. D.

il faut absolument qu'il soit $n = 1$ ou que le nombre des vivans demeure toujours le même; et dans ce cas, ce nombre sera

$$M = N\big(1 + (1) + (2) + (3) + (4) + \text{etc.}\big)$$

Or, si le nombre des naissances, N, surpasse celui des enterremens, O, de sorte que $N - O$ soit un nombre positif, l'équation[1])

$$\frac{N-O}{N(n-1)} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \text{etc.}$$

donnera pour n une valeur > 1, qui marque que le nombre des vivans va en croissant. Mais, si le nombre des naissances, N, est plus petit que celui des enterremens, O, notre équation doit être représentée sous cette forme[1])

$$\frac{O-N}{N(1-n)} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \text{etc.},$$

d'où l'on tire pour n une valeur plus petite que 1, qui marque que le nombre des vivans va en décroissant.

4. QUESTION

24. *Le nombre des naissances et des enterremens d'une année étant donné, trouver combien de chaque âge il y aura parmi les morts.*

Soit N le nombre des enfans nés pendant un an et O le nombre des morts; et par la question précédente on aura le nombre de tous les vivans, M, avec la multiplication $1:n$ d'une année à l'autre. De là, considérons combien d'hommes il y aura en vie de chaque âge, tant cette année que l'année prochaine.

---

1) Voir la note précédente. L. G. D.

Nombre	cette année	l'année suivante
des nouvellement nés	N	nN
de l'âge d'un an	$\frac{(1)}{n}N$	$(1)N$
de l'âge de deux ans	$\frac{(2)}{n^2}N$	$\frac{(2)}{n}N$
de l'âge de trois ans	$\frac{(3)}{n^3}N$	$\frac{(3)}{n^2}N$
etc.		etc.

D'où il est évident qu'il en est mort pendant le cours de cette année:

	le nombre des morts
au dessous d'un an	$(1-(1))N$,
de 1 an à deux ans	$((1)-(2))\frac{N}{n}$,
de 2 ans à 3 ans	$((2)-(3))\frac{N}{n^2}$,
de 3 ans à 4 ans	$((3)-(4))\frac{N}{n^3}$,
de 4 ans à 5 ans	$((4)-(5))\frac{N}{n^4}$
etc.	

25. Le nombre de tous les morts de cette année étant $= O$, on aura cette équation

$$\frac{O}{N} = 1 - (1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(3)}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \text{etc.},$$

qui convient avec celle-ci

$$O = (1-n)M + nN,$$

à cause de

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \text{etc.}$$

Donc, connoissant l'hypothese de la mortalité avec la multiplication annuelle

$1:n$ et le nombre N des naissances d'une année, on peut déterminer combien d'hommes de chaque âge mourront probablement pendant le cours d'une année.

5. QUESTION

26. *Connoissant le nombre de tous les vivans, de même que le nombre des naissances avec les nombres des morts de chaque âge pendant le cours d'une année, trouver la loi de la mortalité.*

Soit M le nombre de tous les vivans, N celui des naissances et O des enterremens pendant le cours d'une année; et de là on connoîtra d'abord la multiplication annuelle

$$n = \frac{M-O}{M-N};$$

soit ensuite pour cette année le nombre des morts par la précédente question

au dessous d'un an	$\alpha = (1-(1))N,$
de 1 an à 2 ans	$\beta = ((1)-(2))\frac{N}{n},$
de 2 ans à 3 ans	$\gamma = ((2)-(3))\frac{N}{n^2},$
de 3 ans à 4 ans	$\delta = ((3)-(4))\frac{N}{n^3}$

etc.,

et de là on trouvera les fractions (1), (2), (3) etc. qui contiennent la loi de la mortalité,

$$(1) = 1 - \frac{\alpha}{N},$$

$$(2) = (1) - \frac{n\beta}{N} = 1 - \frac{\alpha + n\beta}{N},$$

$$(3) = (2) - \frac{n^2\gamma}{N} = 1 - \frac{\alpha + n\beta + n^2\gamma}{N},$$

$$(4) = (3) - \frac{n^3\delta}{N} = 1 - \frac{\alpha + n\beta + n^2\gamma + n^3\delta}{N}$$

etc.

27. Voilà une maniere plus seure que celles des rentes viageres pour déterminer la loi de la mortalité; et cette détermination deviendra la plus aisée, si l'on choisit une ville ou province où le nombre des enterremens égale celui des bâtemes, de sorte que $n = 1$; car alors, il suffit de savoir le nombre des morts de chaque âge. Mais il faut bien remarquer qu'une telle loi de mortalité ne doit être étendue que sur la ville ou province dont on l'a tirée. En d'autres pays pourroit avoir lieu une loi tout à fait différente; et on a observé, en particulier, que dans les grandes villes la mortalité est plus grande que dans les petites et dans celles-ci plus grande qu'aux villages. Si l'on se donnoit la peine de bien établir tant la loi de mortalité que celle de fécondité pour plusieurs endroits, on en pourroit tirer quantité de conclusions fort importantes.

28. Mais il faut encore remarquer que, dans ce calcul que je viens de déveloper, j'ai supposé que le nombre de tous les vivans d'un endroit demeure le même, ou qu'il croît ou décroît uniformément, de sorte qu'il en faut exclure tant des ravages extraordinaires, comme la peste, guerre, famine, que des accroissemens extraordinaires, comme de nouvelles colonies. Il sera aussi bon de choisir un tel endroit où tous les naissans demeurent dans le pays et où des étrangers ne viennent pas pour y vivre et mourir, ce qui renverseroit les principes sur lesquels j'ai fondé les calculs précédens. Pour des endroits assujettis à de telles irrégularités, il y faudroit tenir des régistres exactes tant de tous les vivans que des morts, et alors, en suivant les principes que je viens d'établir, on seroit en état d'appliquer le même calcul. Tout revient toujours à ces deux principes, celui de la mortalité et celui de la fécondité, qui étant une fois bien établis pour un certain endroit, il ne sera pas difficile de résoudre toutes les questions qu'on peut proposer sur cette matiere, dont je me contente d'avoir rapporté les principales.

29. Je n'ai aussi traité ces questions qu'en général, sans les borner à quelque endroit particulier; or, pour en tirer tous les avantages, tout dépend d'un grand nombre d'observations faites en plusieurs endroits différens, tant du nombre de tous les vivans et des naissans pendant un ou plusieurs ans, que du nombre des morts avec leurs âges. Comme c'est un article fort

difficile à bien exécuter, nous devons être très redevables à Mr. SUSSMILCH,[1]) Conseiller du Consistoire Supérieur, qui, après avoir surmonté des obstacles presque invincibles, vient de nous fournir un si grand nombre de telles observations, qui paroissent suffisantes pour décider la plupart des questions qui se présentent dans cette recherche. Et en effet, il en a déjà tiré luimême tant de conclusions importantes, que nous pouvons espérer qu'il portera par ses soins cette science au plus haut degré de perfection dont elle est susceptible.

ADDITION DE L'EDITEUR

Nous donnons ci-après la table de mortalité dressée par le Hollandais WILLEM KERSSEBOOM (1691—1771) et résultant d'observations faites sur des rentiers. WILLEM KERSSEBOOM occupait une place en vue dans les postes et les finances des Pays-Bas. C'est grâce à ses nombreuses démarches que les Etats-Généraux, en 1735, décidèrent de procurer à l'Etat la somme de 3 millions de florins par la vente de rentes viagères. Se basant sur les résultats de KERSSEBOOM, on vendit ces rentes à un prix constant et unique, indépendant de l'âge du rentier, en supposant qu'une rente viagère aurait en moyenne une durée de 30 ans. Mais l'Etat n'en tira pas les 300000 florins de gain net que les calculs de KERSSEBOOM avaient fait prévoir.

KERSSEBOOM n'a pas compris la grande importance qu'il y a à faire des observations de longévité séparément pour hommes et pour femmes. Et pourtant son compatriote et contemporain NICOLAAS STRUYCK (1687—1769) avait non seulement découvert le premier, et proclamé, qu'en moyenne les femmes vivent plus longtemps que les hommes, mais avait aussi construit une table de mortalité à sexes séparés, mettant en évidence cette influence du sexe sur la longévité.[2]) EULER connaissait également la différence des taux de la mortalité

1) EULER fait ici allusion à un ouvrage dont il a calculé plusieurs tables et inspiré tout un chapitre. C'est l'ouvrage principal de JEAN-PIERRE SUSSMILCH (1707—1767), l'un de ses confrères de l'Académie des sciences de Berlin. Il porte le titre *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen.* Première édition, Berlin, 1741—1742, deuxième édition 1761—1762. Le chapitre VIII de la deuxième, édition de cet ouvrage se trouve dans le présent volume; voir aussi la préface de l'éditeur. L. G. D.

2) *Inleiding tot de algemeene Geographie, benevens eenige Sterrekundige en andere Verhandelingen, door NICOLAAS STRUYCK.* Amsterdam 1740. Voir surtout l'annexe qui termine cette *Géographie générale,* science qui a, pour STRUYCK, des cadres très larges, puisqu'il y traite, outre la géographie ordinaire, aussi l'astronomie, la météorologie, la navigation, la démographie et les assurances de rentes viagères.

masculine et féminine et la mentionne à plusieurs reprises. Le fait de ne pas tenir compte des travaux d'un savant comme STRUYCK, travaux qu'il connaissait pourtant, le fait de ne pas même faire entrer en ligne de compte l'âge du rentier pour évaluer le prix d'une rente viagère, ne jettent pas une lumière favorable sur les méthodes de KERSSEBOOM. Et cependant, pour des raisons d'ordre personnel, ses recherches furent beaucoup plus connues, au 18ième siècle, que les travaux de STRUYCK, plus modeste, quoique ces derniers a ient plus de valeur intrinsèque.

Les détails que donne KERSSEBOOM sur ses recherches relatives à la mortalité se trouvent dans trois écrits *Pour connaître la population probable dans les provinces de Hollande et de la Frise occidentale*[1]). Le premier parut en 1738, les deux autres en 1742. Ils donnèrent lieu à de vives polémiques. Tous les trois furent réunis en 1748 en une nouvelle édition sous le titre *Proeven van politique rekenkunde.*

La table de mortalité „Tafel van Levenskracht" ne parut que dans la *Tweede verhandeling etc.* (1742), p. 56. La voici. (Nous désignons, conformément aux notations modernes, par x l'âge et par l_x le nombre des survivants d'âge x.)

TABLE DE MORTALITE DE KERSSEBOOM

Age x	Nombre des survivants l_x	Age x	Nombre des survivants l_x	Age x	Nombre des survivants l_x	Age x	Nombre des survivants l_x
0	1400						
1	1125	11	886	21	808	31	699
2	1075	12	878	22	800	32	687
3	1030	13	870	23	792	33	675
4	993	14	863	24	783	34	665
5	964	15	856	25	772	35	655
6	947	16	849	26	760	36	645
7	930	17	842	27	747	37	635
8	913	18	835	28	735	38	625
9	904	19	826	29	723	39	615
10	895	20	817	30	711	40	605

1) *Eerste verhandeling tot een proeve om te weeten de probable menigte des volks in de provintie van Hollandt en West-Vrieslandt.* 's Gravenhage, 1738. *Tweede verhandeling tot een proeve om te weeten etc.* 1742. *Derde verhandeling tot een proeve etc.* 1742.

Age x	Nombre des survivants l_x	Age x	Nombre des survivants i_x	Age x	Nombre des survivants l_x	Age x	Nombre des survivants l_x
41	596	56	434	71	231	86	36
42	587	57	421	72	217	87	28
43	578	58	408	73	203	88	21
44	569	59	395	74	189	89	15
45	560	60	382	75	175	90	10
46	550	61	369	76	160	91	7
47	540	62	356	77	145	92	5
48	530	63	343	78	130	93	3
49	518	64	329	79	115	94	2
50	507	65	315	80	100	95	1
51	495	66	301	81	87		
52	482	67	287	82	75		
53	470	68	273	83	64		
54	458	69	259	84	55		
55	446	70	245	85	45		

En contrôlant avec ces chiffres la table que donne EULER, on constate qu'il n'y a d'écart que d'une unité dans la 3$^{\text{ième}}$ décimale aux quatre endroits mentionnés dans la note p. 86. Nous avons maintenu la table EULERIENNE telle quelle, parcequ'elle a servi de base à ses calculs numériques.[1]) L. G. D.

1) Sous une forme un peu modifiée, EULER reproduit la table de KERSSEBOOM dans les mémoires 335, 473 et 599 de ce volume et dans le fragment qui le termine. Voir aussi la préface de l'éditeur.

SUR LES RENTES VIAGERES[1]

Commentatio 335 indicis Enestroemiani
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [16] (1760), 1767, p. 165—175

1. Ayant établi le véritable principe sur lequel il faut fonder le calcul des rentes viageres, je crois que le dévelopement de ce calcul ne manquera pas d'être fort intéressant, tant pour ceux qui voudront entreprendre un tel établissement que pour ceux qui en voudront profiter. J'ai ébauché cette matiere dans mes *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, où j'ai exposé la juste méthode de déterminer, par le calcul, combien un homme d'un certain âge doit payer, pour jouir pendant toute sa vie d'une rente annuelle donnée.[2] Mais, puisque le calcul me paroissoit alors fort embarrassant, je ne pouvois pas me résoudre à l'exécuter. Or, une certaine occasion m'obligea dernierement d'entreprendre ce travail dont, moyennant quelques artifices pour abréger le calcul, je suis heureusement venu à bout.[3]

2. Il y a deux choses sur lesquelles la détermination des rentes viageres doit être fondée: l'une est une bonne liste de mortalité, qui nous montre,

1) Voir aussi les mémoires 403, 473 et 599 de ce volume et le fragment qui le termine. L. G. D.

2) Voir le mémoire précédent, en particulier les § 9 à 11. Voir aussi la préface de l'éditeur de ce volume. L. G. D.

3) On sait que le roi de Prusse Frédéric le Grand, qui avait appelé Euler de St. Pétersbourg à Berlin pour y réorganiser l'Académie des sciences, eut souvent recours aux lumières du grand mathématicien. En particulier, il lui demanda plusieurs expertises relatives à des caisses de pensions et de retraites. Voir G. Valentin, *Leonhard Euler in Berlin*. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, herausgegeben vom Vorstande der Berliner mathem. Gesellschaft. Mit zwei Bildnissen Eulers. Leipzig und Berlin 1907, p. 15. L. G. D.

pour chaque âge, combien il en mourra probablement pendant le cours d'une ou plusieurs années; l'autre est la maniere dont l'entrepreneur peut faire valoir l'argent qu'il aura reçu des rentiers, ou à quels intérêts il est en état de le placer. Ces deux articles concourent très essentiellement à déterminer les rentes auxquelles l'entrepreneur pourra s'engager, tant par rapport à la somme qui lui a été payée d'abord que par rapport à l'âge du rentier. Car il est évident que, plus l'entrepreneur peut retirer de profit du capital qu'il a entre ses mains, plus il sera aussi en état de payer de fortes rentes.

3. Pour la liste de mortalité, l'entrepreneur risqueroit sans doute beaucoup s'il vouloit se régler sur la mortalité des hommes en général, qu'on conclut des observations faites dans une grande ville ou dans un pays tout entier, où l'on tient également compte de tous les hommes tant vigoureux qu'infirmes. Or, quand il s'agit de se procurer des rentes viageres, il est très naturel qu'il en faut exclure tous ceux dont la constitution ne semble pas promettre une longue vie; ainsi, on a raison de regarder les rentiers comme une espece plus robuste. C'est aussi dans cette vue que j'ai choisi dans mon mémoire allégué la liste de M. Kersseboom[1]), qu'il a tirée des observations faites uniquement sur des personnes qui ont joui de rentes viageres; et partant aussi, cette même liste me servira de fondement dans les calculs suivans.

4. Si l'entrepreneur n'étoit pas en état de placer assez bien le capital qui lui est payé par les rentiers, il ne sauroit accorder que des rentes si médiocres, que personne ne voudroit les acquérir. Autrefois, la ville d'Amsterdam a payé dix pour cent de rentes à toutes les personnes au dessous de vingt ans, ou bien pour 1000 florins, ils leur ont payé 100 par an; ce qui est une rente si riche, que la ville en auroit souffert une perte très considérable si elle n'avoit gagné presque 10 pour cent par an du fonds que cette entreprise lui avoit procuré. Ainsi, si l'on ne peut compter que sur 5 pour cent d'intérêts, les rentes doivent devenir beaucoup moins considérables; cependant, c'est là dessus qu'il semble qu'il faut à présent régler les rentes viageres,

1) Voir le § 11 du mémoire précédent. L. G. D.

attendu que ceux qui auront occasion d'en faire un plus grand profit ne se mêleront gueres d'une telle entreprise, qui ne sauroit s'achever qu'après un grand nombre d'années.

5. Pour déterminer le prix de ces rentes, on fixe pour chaque âge un terme moyen de vie, qu'il est aussi probable de survivre que de mourir avant que de l'avoir atteint; ou bien, ce terme est pris tel que, d'un grand nombre d'hommes du même âge, il en meurt autant avant ce terme qu'après. Alors, on suppose que tous les hommes de cet âge atteignent précisément ce terme et qu'ils meurent ensuite tous à la fois; là dessus on croit pouvoir fixer surement le prix des rentes, puisqu'il s'agit de trouver la valeur présente d'une rente annuelle payable pendant un certain nombre d'années consécutives; et l'on estime que le profit que l'entrepreneur retire du côté de ceux qui meurent avant le dit terme est précisément récompensé par la perte que lui causent ceux des rentiers qui survivent à ce terme. Mais on comprendra aisément que ce raisonnement cloche, puisqu'on ne tient pas compte de la diminution du prix présent d'une rente qui ne sera payée qu'après plusieurs années. A cause de cette circonstance, il sera nécessaire de fonder le calcul sur ses véritables principes, comme je l'ai enseigné dans mon mémoire mentionné, sans se servir d'aucun raisonnement qui pourroit paroitre suspect.

6. Pour cet effet, considérons le nombre de 1000 enfans nés à la fois, et que ces caracteres

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4)\ \text{etc.}$$

marquent les nombres de ceux qui vivront encore au bout de

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\quad \text{etc.}$$

ans, de sorte qu'en général (m) représente le nombre de ceux qui atteindront l'âge de m ans.[1]) Soit maintenant r la rente annuelle qu'un homme âgé de m ans voudroit acquérir et x le prix qu'il en doit payer à présent à l'entrepre-

1) Les symboles (1), (2), (3), ... (m) ont ici une signification différente de celle qui leur est attribuée dans le § 3 du mémoire précédent. Là, ces symboles représentent des fractions inférieures à 1; ici, ces mêmes symboles représentent des nombres entiers positifs Toutefois, le rapport de ces deux valeurs différentes attribuées au même symbole (m) est exactement 1000.

L. G. D.

neur; lequel doit être un juste équivalent de la dépense dont l'entrepreneur se charge par cette convention. Pour déterminer ce prix x, il faut considérer plusieurs hommes du même âge de m ans et qui entrent dans la même condition. Soit (m) le nombre de ces hommes, et la somme qu'ils payeront à présent à l'entrepreneur sera $= (m)x$, qui doit être suffisante pour fournir toutes les rentes qu'il aura à payer dans la suite.

7. Or, de ces (m) hommes, il y en aura en vie: après un an $(m+1)$, après deux ans $(m+2)$, après trois ans $(m+3)$ et ainsi de suite; donc l'entrepreneur aura à payer: après un an $(m+1)r$, après deux ans $(m+2)r$, après trois ans $(m+3)r$ etc., jusqu'à ce que tous ces rentiers seront éteints. On n'a donc qu'à réduire chacun de ces payemens au tems présent, à raison de 5 pour cent, et en égaler la somme à $(m)r$, pour en conclure la juste valeur de x. Or, pour rendre le calcul plus général, au lieu de $\frac{105}{100}$ ou $\frac{21}{20}$ écrivons la lettre λ; et la somme de toutes les rentes que l'entrepreneur doit payer successivement vaudra à présent

$$\frac{(m+1)r}{\lambda} + \frac{(m+2)r}{\lambda^2} + \frac{(m+3)r}{\lambda^3} + \frac{(m+4)r}{\lambda^4} + \text{etc.},$$

laquelle étant égale à $(m)x$ donnera

$$x = \frac{r}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \text{etc.}\right).$$

8. Voilà donc le juste prix qu'un homme âgé de m ans doit payer pour être mis dans la jouissance d'une rente annuelle r pendant toute sa vie, et laquelle [somme], étant d'abord placée à 5 pour cent, met l'entrepreneur précisément en état de payer dans la suite les rentes, pourvu que le nombre des rentiers soit assez considérable. On comprend bien qu'ayant ainsi placé d'abord tout le capital que l'entrepreneur aura reçu, l'année suivante les intérêts ne seront pas suffisans à payer les rentes, mais qu'il y faudra employer une partie du capital; d'où le capital souffrira tous les ans une diminution; cependant, il ne sera entierement éteint que lorsque tous les rentiers seront morts. Par cette raison, l'entrepreneur sera bien obligé de hausser le prix des rentes que je viens de trouver, selon les circonstances et les dépenses particulieres qu'un tel établissement exige.

9. On voit bien que la détermination de ce prix nommé x demande un calcul aussi long qu'ennuyant, surtout pour les bas âges, où le nombre des termes à ajoûter ensemble est fort considérable. Mais il n'est pas difficile de s'appercevoir qu'ayant déjà fait ce calcul pour un certain âge, on en pourra aisément tirer celui qui répond à une année de plus ou moins. Pour expliquer plus clairement cet artifice, je me servirai de ce caractere

$$\overline{m}\,r$$

pour marquer le prix qu'un homme âgé de m ans doit payer pour la rente viagere r; de sorte que

$$\overline{m} = \frac{1}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \text{etc.}\right);$$

de là, pour les hommes âgés de $m+1$ ans, nous aurons

$$\overline{m+1} = \frac{1}{(m+1)}\left(\frac{(m+2)}{\lambda} + \frac{(m+3)}{\lambda^2} + \frac{(m+4)}{\lambda^3} + \frac{(m+5)}{\lambda^4} + \text{etc.}\right),$$

d'où nous concluons

$$\lambda(m)\overline{m} = (m+1) + (m+1)\overline{m+1}$$

et partant

$$\overline{m} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(m+1)}{(m)}\left(1 + \overline{m+1}\right),$$

de sorte qu'ayant trouvé la valeur de $\overline{m+1}$, on en calculera assez aisément celle de $\overline{m}$.

10. A l'aide de cet artifice, après avoir commencé par l'âge de 90 ans, j'ai calculé le prix de la rente r successivement pour tous les âges inférieurs, jusqu'aux enfans nouvellement nés; d'où j'ai obtenu la table suivante, en fixant la rente r à 100 écus et les intérêts à 5 pour cent.

TABLE
QUI MARQUE LES PRIX D'UNE RENTE VIAGERE DE 100 ECUS POUR TOUS LES AGES.

âge années	nombre des vivans	prix de la rente	âge années	nombre des vivans	prix de la rente
0	1000	1155,25[3]			
1	804	1408,73	21	577	1450,15[4]
2	768	1448,51	22	571	1438,66
3	736	1487,06	23	565	1426,64
4	709	1520,88	24	559	1414,05
5	688[1]	1545,67	25	552	1403,58
6	676	1551,77	26	544	1395,43
7	664	1558,81	27	535	1389,85
8	653[2]	1564,32	28	525	1387,14
9	646	1560,33	29	516	1381,90
10	639	1556,29	30	507	1376,75
11	633	1549,59	31	499	1368,76
12	627	1542,64	32	490	1363,60
13	621	1535,42	33	482	1355,55
14	616	1525,28	34	475	1344,30
15	611	1514,65	35	468	1332,63
16	606	1503,50	36	461	1320,51
17	601	1491,81	37	454	1307,92
18	596	1479,54	38	446	1297,95
19	590	1469,31	39	439	1284,58
20	584	1458,63	40	432	1270,67
m	(m)	$\overline{m}$	m	(m)	$\overline{m}$

1) Edition originale: 690. 2) Edition originale: 654. L. G. D.

3) L'édition originale porte pour les neuf premiers nombres de cette colonne les valeurs 1155,50; 1409,04; 1448,84; 1487,43; 1521,27; 1541,32; 1551,90; 1558,94; 1561,92. L. G. D.

4) L'édition originale porte pour les nombres de cette colonne les valeurs 1450,18; 1438,68; 1426,66; 1414,07; 1403,60; 1395,45; 1389,87; 1387,16; 1382,54; 1376,82; 1368,84; 1363,68; 1355,63; 1344,38; 1332,71; 1320,60; 1308,01; 1298,04; 1284,67; 1270,76. L. G. D.

âge années	nombre des vivans	prix de la rente	âge années	nombre des vivans	prix de la rente
41	426	1252,97 [1])	66	215	741,80 [2])
42	420	1234,42	67	205	716,88
43	413	1218,12	68	195	691,33
44	406	1201,08	69	185	665,14
45	400	1180,06	70	175	638,31
46	393	1161,13	71	165	610,83
47	386	1141,30	72	155	582,75
48	378	1123,73	73	145	554,09
49	370	1105,43	74	135	524,89
50	362	1086,35	75	125	495,22
51	354	1066,45	76	114	470,16
52	345	1048,99	77	104	441,13
53	336	1030,94	78	93	417,98
54	327	1012,27	79	82	397,75
55	319	989,54	80	72	375,64
56	310	969,18	81	63	350,17 [3])
57	301	948,07	82	54	329,69
58	291	929,69	83	46	306,38
59	282	907,33	84	39	279,44
60	273	884,16	85	32	257,60
61	264	859,96	86	26	232,90
62	254	838,51	87	20	217,91
63	245	812,78	88	15	205,07
64	235	789,74	89	11	193,62
65	225	766,08	90	8	179,54
m	(m)	$\overline{m}$	m	(m)	$\overline{m}$

1) L'édition originale porte pour les nombres de cette colonne les valeurs 1253,09; 1234,54; 1218,24; 1201,21; 1180,19; 1161,27; 1141,44; 1123,88; 1105,59; 1086,52; 1066,62; 1049,17; 1031,14; 1012,49; 989,78; 969,44; 948,35; 929,98; 907,64; 884,44; 860,32; 838,90; 813,21; 790,20; 766,59. L. G. D.

2) Edition originale: 742,30; 717,43; 691,93; 665,14; 638,30. L. G. D.

3) Edition originale: 350,77. L. G. D.

11. M. Kerseboom n'a continué sa table sur la mortalité que jusqu'à 95 ans, et par cette raison je n'ai pas jugé convenable de continuer celle-ci au de là de 90 ans, puisque personne à cet âge n'aura probablement plus de vues pour les rentes viageres. Du moins, presque dans tous les plans, ces vieillards se trouvent rangés à la même classe que ceux de 60 ou de 70 ans; nonobstant qu'il seroit fort injuste, si l'on vouloit exiger d'un nonagénaire plus que le tiers du prix que doit payer un septuagénaire et plus que le quart d'un sexagénaire. Cependant, si l'on est curieux de voir la continuation de ma table, la voici:

m	90	91	92	93	94
(m)	8	6	4	3	2
$\overline{m}$	179,54	151,35	138,38	93,73	47,62

Mais je ne voudrois pas conseiller à un entrepreneur de se mêler avec de tels vieillards, à moins que leur nombre ne fût assez considérable; ce qui est une regle générale pour tous les établissemens fondés sur les probabilités.[1])

12. De là, on conclura aisément combien l'entrepreneur devroit payer d'intérêt à chaque âge, pour une somme quelconque qu'on auroit mise d'abord entre ses mains. Il n'est pas nécessaire d'entrer ici dans le même détail et il suffira de marquer de 5 en 5 ans les *procents* que les rentiers pourroient exiger.

1) Dans le mémoire 473 de ce volume, au § 30 de la première partie, se trouve une table analogue, mais où l'on a pris 6 pour cent comme taux annuel de l'intérêt. L. G. D.

âge	procents[1]	âge	procents[2]
0	$8\frac{2}{3}$	50	$9\frac{1}{5}$
5	$6\frac{1}{2}$	55	$10\frac{1}{10}$
10	$6\frac{2}{5}$	60	$11\frac{1}{3}$
15	$6\frac{3}{5}$	65	13
20	$6\frac{4}{5}$	70	$15\frac{2}{3}$
25	$7\frac{1}{10}$	75	$20\frac{1}{5}$
30	$7\frac{1}{4}$	80	$26\frac{3}{5}$
35	$7\frac{1}{2}$	85	$38\frac{4}{5}$
40	$7\frac{4}{5}$	90	$55\frac{7}{10}$
45	$8\frac{1}{2}$		

Sur ce pied, l'entrepreneur n'auroit aucun profit, à moins qu'il ne fût en état de faire valoir son argent à plus de 5 pour cent.

13. Donc, si un Etat avoit besoin d'argent et qu'il en pût trouver à 5 pour cent d'intérêts autant qu'il lui en faut, il feroit assurément fort mal, s'il vouloit établir de telles rentes viageres que je viens de déterminer sur ce même pied de 5 pour cent, puisqu'eu égard à l'embarras qu'un tel établissement exige nécessairement, il seroit toujours mieux d'emprunter la somme dont il a besoin à 5 pour cent, qu'il pourroit ensuite acquitter selon les circonstances, au lieu que les rentes viageres lui resteroient à charge pendant très longtems. Ou bien, il faudroit hausser le prix des rentes au delà de ce que je les ai fixées, pour lui procurer quelque bénéfice; mais alors, il seroit fort à craindre qu'il ne se trouvât plus de rentiers, à moins que ce ne fussent des vieillards au delà de 60 ans, que les intérêts de 10 et plus pour cent pourroient éblouir.

1) L'édition originale porte les valeurs $8\frac{2}{3}$, $6\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$, 7, $7\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 8, $8\frac{1}{2}$. L. G. D.

2) L'édition originale porte les valeurs 9, 10, $11\frac{1}{3}$, 13, $15\frac{2}{3}$, 20, $25\frac{2}{3}$, $38\frac{1}{2}$, $55\frac{1}{2}$. L. G. D.

14. Mais vouloir établir des rentes viageres plus avantageuses pour les rentiers, ce seroit un projet peu propre à soulager un Etat; puisque cela reviendroit au même que si l'on vouloit se charger de dettes à six et davantage pour cent, pendant qu'on pourroit faire des emprunts à 5 pour cent sans s'assujettir à l'embarras que des rentes viageres demandent. En effet, si un Etat vouloit établir les rentes exposées ici et calculées sur le pied de 5 pour cent, il ne sauroit regarder cette charge que comme un emprunt pris à 6 pour 100, à cause de tant d'arrangemens qui y seroient requis. Ainsi, je ne vois presque plus de cas où l'établissement des rentes viageres pourroit être avantageux à un Etat, tant qu'on peut emprunter de l'argent à 5 pour cent et peut-être moins.

Mais on peut imaginer une autre espece de rentes, qui seroit peut-être plus goûtée, quoi qu'elle soit également fondée sur le pied de 5 pour cent. Je veux parler de rentes qui ne doivent commencer à courir qu'après 10 ou même 20 ans; et on comprend aisément que le prix de telles rentes sera fort médiocre et partant capable d'attirer le public.

15. Concevons donc cette question aussi en général, et cherchons combien un homme âgé de m ans doit payer à présent, pour s'acquérir une rente annuelle r qui ne commencera à lui être payée qu'après n ans, de sorte que depuis ce tems il en puisse jouir régulierement jusqu'à sa mort. Soit x le prix présent de cette rente; et nous trouverons comme ci-dessus

$$x = \frac{r}{(m)}\left(\frac{(m+n)}{\lambda^n} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^{n+2}} + \text{etc.}\right).$$

Or, par le calcul des rentes ordinaires expliqué auparavant, nous aurons

$$\overline{m+n-1} = \frac{1}{(m+n-1)}\left(\frac{(m+n)}{\lambda} + \frac{(m+n+1)}{\lambda^2} + \frac{(m+n+2)}{\lambda^3} + \text{etc.}\right),$$

d'où nous concluons

$$x = \frac{r}{(m)} \cdot \frac{(m+n-1)}{\lambda^{n-1}} \overline{m+n-1} = \frac{r}{\lambda^{n-1}} \cdot \frac{(m+n-1)}{(m)} \overline{m+n-1},$$

où $\overline{m+n-1}\,r$ exprime le prix présent de la rente ordinaire pour un homme âgé de $m+n-1$ ans.

16. Donc, si l'on demande le prix présent d'une rente annuelle de 100 écus, qui ne commencera à être payée qu'au bout de 10 ans pour un homme âgé de m ans, on prendra de la table dévelopée au § 10 le prix de la rente ordinaire qui convient à l'âge de $m+9$ ans, et on le multipliera par $\left(\frac{20}{21}\right)^9 \frac{(m+9)}{(m)}$, pour avoir la valeur cherchée de x. De là, j'ai calculé les tables suivantes de 5 en 5 ans.

TABLE
DES PRIX D'UNE RENTE VIAGERE DE 100 ECUS
QUI NE DOIT COMMENCER A COURIR QU'AU BOUT DE 10 ANS.

âge ans	prix de la rente [1])	âge ans	prix de la rente [2])
0	649,73	45	533,45
5	880,27	50	455,62
10	874,50	55	375,02
15	833,91	60	290,55
20	787,06	65	203,01
25	745,67	70	120,14
30	725,31	75	56,20
35	671,67	80	19,07
40	610,29		

TABLE
DES PRIX D'UNE RENTE VIAGERE DE 100 ECUS
QUI NE DOIT COMMENCER A COURIR QU'AU BOUT DE 20 ANS.

âge ans	prix de la rente [3])	âge ans	prix de la rente [4])
0	343,06	40	234,39
5	454,23	45	183,61
10	441,60	50	134,52
15	413,57	55	87,91
20	386,53	60	47,28
25	349,60	65	19,17
30	319,24	70	4,82
35	279,91		

1) Edition originale: 649,75; 877,77; 874,50; 833,95; 787,43; 745,72; 717,05; 671,73; 610,40. 2) 533,55; 455,78; 375,25; 290,55; 203,11. 3) 343,06; 453,36; 441,81; 413,60; 382,17; 349,63; 319,30; 272,96. 4) 234,47; 183,72. L. G. D.

17. Peut-être qu'un tel projet de rentes viageres réussiroit mieux, nonobstant qu'elles sont fixées sur le pied de 5 pour cent. Il semble qu'il seroit toujours avantageux pour un enfant nouvellement né de lui pouvoir assurer, moyennant le prix de 343 ou bien de 350 écus, une rente fixe de 100 écus par an, quoiqu'elle ne commence à être payée que lorsque l'enfant aura atteint l'âge de 20 ans; et si l'on y vouloit employer la somme de 3500 écus, ce seroit toujours un bel établissement que de jouir dès l'âge de 20 ans d'une pension fixe de 1000 écus. Cependant, il est encore douteux s'il se trouveroit plusieurs parens qui voudroient bien faire un tel sacrifice pour le bien de leurs enfans. Peut-être se trouveroit-il plus d'hommes de 60 ans qui ne balanceroient point de payer d'abord 3000 écus, pour être assurés de jouir d'une pension fixe de 1000 écus par an dès qu'ils auroient passé leur 70$^{\text{ième}}$ année.

SUR LA PROBABILITE DES SEQUENCES DANS LA LOTTERIE GENOISE[1]

Commentatio 338 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [21] (1765), 1767, p. 191—230

Depuis l'établissement d'une telle Lotterie dans cette ville, tous les arrangemens en sont si généralement connus qu'il seroit tout à fait superflu d'en donner une description. Aussi la plûpart des questions qu'on peut former sur la probabilité des événemens qui ont lieu dans cette Lotterie ne sont plus inconnues, vu que leur solution se déduit aisément des principes établis dans la science des probabilités. Mais, quand on demande la probabilité des *séquences* qui peuvent se trouver dans les cinq nombres qu'on tire chaque fois, la question est si difficile qu'on rencontre les plus grands obstacles pour parvenir à la solution.

Or, on nomme *séquence*, quand deux ou plusieurs des cinq nombres qu'on tire chaque fois se suivent immédiatement selon l'ordre naturel des nombres; d'où l'on comprend ce qu'il faut entendre sous une séquence de deux ou trois ou quatre ou tous les cinq nombres. Ainsi, quand parmi les cinq nombres tirés il y a, par exemple, ces deux: 7 et 8, c'est une *séquence de deux*; s'il y avoit ces trois nombres 25, 26, 27, ce seroit une *séquence de trois*; et ainsi de plusieurs. On pourroit penser que, puisqu'il n'y a dans cette Lotterie que 90 nombres, il conviendroit de regarder ces deux: 90 et 1,

---

1) EULER s'est occupé à réitérées fois de la loterie génoise; voir les mémoires 600 et 812 de ce volume et la préface de l'éditeur. Voir aussi le numéro 821 (suivant l'Index D'ENESTRÖM): *Duae litterae ad FREDERICUM II, Regem Borussorum, datae annis 1749 et 1763. Opera postuma* 1, 1862, p. 550; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. L. G. D.

comme une séquence de deux; mais il est plus naturel de les en exclure et de s'en tenir uniquement à l'ordre naturel des nombres.

Or, il est bon de rendre cette question plus générale, et partant, je supposerai qu'au lieu de 90 billets il y a en tout n billets marqués des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n,$$

et qu'on en tire au hazard un nombre quelconque qui soit $=m$. Cela posé, on demande quelle est la probabilité qu'il se trouve parmi ces m nombres tirés ou une séquence de deux, ou une de trois, ou une de quatre etc., ou même à la fois deux séquences de deux, ou une de deux et une de trois etc., ou enfin, qu'il ne s'y trouve point du tout de séquences. Voilà donc plusieurs questions que chaque cas fournit, dont le nombre sera d'autant plus grand que le nombre m des billets tirés sera grand.

Mais, pour parvenir à la solution de toutes ces questions, il est absolument nécessaire de commencer par le cas $m=2$, où l'on ne tire des n billets que deux; de là je passerai à celui où l'on en tire 3, de sorte que $m=3$; ensuite à ceux où $m=4$ et $m=5$ et $m=6$ etc., jusques où les difficultés du calcul me permettront de pousser ces recherches.

PROBLEME 1

1. *Le nombre des billets marqués des nombres* 1, 2, 3, 4 etc. *étant* $=n$, *quand on en tire deux billets, quelle est la probabilité qu'il y aura une séquence, ou non?*

SOLUTION

On sait que le nombre de tous les cas possibles qui peuvent avoir lieu dans les deux nombres tirés est

$$=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},$$

où l'on ne regarde point à l'ordre de ces deux nombres, de sorte que, par exemple, les nombres tirés 7 et 10 font le même cas que s'ils étoient tirés 10 et 7. Dans ce nombre des cas, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, sont compris tant ceux où il y a une séquence que ceux où il n'y en a point. Or, il est aisé de faire le dénombrement de tous les cas qui renferment une séquence, qui sont: 1, 2;

2, 3; 3, 4; 4, 5; etc., jusqu'au dernier $n-1$, n; dont le nombre est évidemment $= n-1$. Mais la probabilité d'un événement quelconque est exprimée par une fraction dont le numérateur est le nombre des cas où cet événement arrive, et le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles; d'où l'on tire la probabilité que les deux nombres tirés renferment une séquence

$$= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

Donc, qu'il n'y ait point de séquence, la probabilité sera

$$= 1 - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n}.$$

COROLLAIRE 1

2. Donc, la multitude des nombres qui se suivent dans leur ordre naturel étant $= n$, si l'on en tire deux, de sorte que le nombre de tous les cas possibles est $= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, le nombre des cas qui contiennent une séquence est

$$= n-1,$$

et le nombre des cas qui n'en ont point

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}.$$

COROLLAIRE 2

3. Et partant, la probabilité que les deux nombres tirés renferment une séquence est

$$= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n},$$

et la probabilité que les deux nombres tirés ne donnent point de séquence est

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n}.$$

COROLLAIRE 3

4. Donc, si le nombre des billets, n, étoit 90 et qu'on n'en tirât que deux, la probabilité d'une séquence seroit $= \frac{1}{45}$, et celle qu'il n'y eût point de séquence $= \frac{44}{45}$. Ou bien, on pourroit parier 1 contre 44 qu'il n'y aura point de séquence.

REMARQUE

5. Il est évident que le nombre des cas qui donnent une séquence, étant ajoûté au nombre des cas qui n'en donnent point, doit produire le nombre de tous les cas possibles, qui est $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$; et de là j'ai conclu que, puisque le nombre des cas d'une séquence étoit

$$= n - 1,$$

le nombre des cas contraires devoit être

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

Mais on peut aussi trouver le même nombre par le dénombrement actuel. Qu'on suppose l'un des nombres tirés a; et puisque l'autre ne sauroit être ni $a - 1$ ni $a + 1$, il doit être un des autres, dont le nombre est $= n - 3$; de sorte que chaque nombre donne $n - 3$ cas, d'où le nombre de tous les cas seroit $= n(n-3)$; mais il faut considérer que, si l'on prend pour a ou le premier, 1, ou le dernier, n, le nombre des cas devient d'une unité plus grand, puisque dans le premier cas le nombre $a - 1$ et dans l'autre le nombre $a + 1$ ne donne point d'exclusion. Par conséquent, le nombre trouvé $n(n-3)$ doit être augmenté de deux, d'où il devient

$$= nn - 3n + 2 = (n-1)(n-2).$$

Mais ici chaque cas est compté deux fois, puisque, posant les deux nombres tirés a et b, ce même cas est rapporté tant au nombre a qu'au nombre b; d'où je conclus que le nombre des cas exempts de séquence n'est que la moitié de $(n-1)(n-2)$ et partant

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

J'ai ajoûté exprès cette opération, pour mieux faire connoître les précautions qu'il faut prendre dans la suite.

PROBLEME 2

6. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4 etc. *étant quelconque* $= n$, *si l'on en tire trois au hazard, trouver toutes les probabilités à l'égard des séquences.*

SOLUTION

Il y a ici trois cas à développer par rapport aux séquences, que je représenterai de la maniere suivante:

$$\text{I.} \quad a, \quad a+1, \quad a+2,$$

ce qui est une séquence de trois.

$$\text{II.} \quad a, \quad a+1, \quad b,$$

ce qui est une séquence de deux, le troisieme nombre, b, n'étant ni $a+2$ ni $a-1$.

$$\text{III.} \quad a, \quad b, \quad c,$$

où les nombres a, b, c ne renferment aucune séquence.

Ces trois cas ensemble doivent produire tous les cas possibles dont le nombre est

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Faisons donc le dénombrement de tous les cas de chacune de ces trois especes.

Pour la premiere, a, $a+1$, $a+2$, le dénombrement est le plus aisé, puisque tous ces cas sont

$$(1,\ 2,\ 3), \quad (2,\ 3,\ 4), \quad (3,\ 4,\ 5) \quad \text{etc.},$$

jusqu'au dernier

$$(n-2, \quad n-1, \quad n),$$

dont le nombre est $= n-2$; et partant, la probabilité qu'une séquence de trois ait lieu

$$= \frac{2 \cdot 3}{n(n-1)}.$$

Pour la seconde espece, a, $a+1$, b, nous n'avons qu'à considérer toutes les séquences de deux, qui sont au nombre de $n-1$, et à remarquer que chacune reçoit encore un des autres nombres à l'exception des quatre $a-1$, a, $a+1$, $a+2$, de sorte que le nombre des valeurs de b seroit $n-4$. Mais il faut considérer que pour la premiere séquence, 1, 2, et la derniere, $n-1$, n, le nombre des valeurs de b est $n-3$; et partant, le nombre de tous les cas est

$$(n-1)(n-4)+2 = nn-5n+6 = (n-2)(n-3);$$

lequel nombre est déjà juste, puisqu'aucun de ces cas ne se rencontre deux fois. Donc, la probabilité que cette espece arrive est

$$=\frac{2\cdot 3(n-3)}{n(n-1)}.$$

Pour la troisieme espece, a, b, c, prenant le nombre a à volonté, les deux autres, b et c, doivent être pris dans cette série interrompue de nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a-2,\ \mid\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ \ldots\ n,$$

où le nombre des termes de la premiere partie est $=a-2$ et de l'autre $=n-a-1$; mais en sorte que b et c ne fassent pas une séquence. Supposons que tous les deux soient pris de la premiere partie, dont le nombre de termes est $=a-2$; et puisque la série des nombres 1, 2, 3, 4, ... n fournit $\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}$ combinaisons de deux sans séquence, le nombre de ces cas est

$$=\frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2}.$$

De la même maniere, si tous les deux sont pris de l'autre partie $a+2$, $a+3$, ... n, dont le nombre de termes est $=n-a-1$, le nombre des cas est

$$=\frac{(n-a-2)(n-a-3)}{1\cdot 2}.$$

Or, si l'on prend l'un de la premiere et l'autre de la seconde partie, chaque combinaison est exemte de séquence, et partant le nombre des cas sera $=(a-2)(n-a-1)$; d'où le nombre de tous les cas pour chaque nombre a sera

$$\frac{(a-3)(a-4)+(n-a-2)(n-a-3)+2(a-2)(n-a-1)}{1\cdot 2},$$

qui se réduit à

$$\frac{nn-9n+22}{2}.$$

Mais ce dénombrement n'a pas lieu lorsque le nombre a est ou 1 ou 2 ou n ou $n-1$, qu'il faut considérer séparément. Ayant donc lieu pour $n-4$ valeurs de a, le nombre des cas sera

$$=\frac{(n-4)(nn-9n+22)}{2}.$$

Or, les deux cas $a=1$ et $a=n$ donnent chacun tant de cas

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2},$$

et les deux cas $a=2$ et $a=n-1$ donnent chacun

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2};$$

donc, le nombre des cas qui répondent à ces quatre valeurs ensemble sera

$$\frac{2(n-3)(n-4)}{2}+\frac{2(n-4)(n-5)}{2}=\frac{2(n-4)(2n-8)}{2}=\frac{(n-4)(4n-16)}{2},$$

qui, étant joint au nombre précédent, produit

$$\frac{(n-4)(nn-5n+6)}{2}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}.$$

Enfin, il faut observer que chaque triade de nombres a, b, c est comptée ici trois fois, puisque chacun peut tenir lieu de a, et partant le juste nombre de tous les cas de cette troisieme espece se réduit à

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

D'où la probabilité que parmi les trois nombres tirés il n'y ait aucune séquence, sera

$$=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$

COROLLAIRE 1

7. Ayant donc trois especes à considérer, quand on tire trois de n billets, qui sont

$$\text{I. } a,\ a+1,\ a+2, \quad \text{II. } a,\ a+1,\ b \quad \text{et} \quad \text{III. } a,\ b,\ c,$$

le nombre des cas pour chacune de ces especes est:

pour la premiere, a, $a+1$, $a+2$,

$$n-2,$$

pour la seconde, a, $a+1$, b,

$$\frac{2(n-2)(n-3)}{1\cdot 2},$$

pour la troisieme, a, b, c,

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

COROLLAIRE 2

8. Donc, pour qu'il se trouve dans les trois nombres tirés une séquence de trois, a, $a+1$, $a+2$, la probabilité est

$$=\frac{2\cdot 3}{n(n-1)}.$$

Pour qu'il ne s'y trouve qu'une séquence de deux, la probabilité est

$$=2\cdot\frac{3(n-3)}{n(n-1)},$$

et pour qu'il n'y ait aucune séquence, la probabilité est

$$=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$

COROLLAIRE 3

9. Si l'on demande les cas où il se trouve au moins une séquence de deux dans les trois nombres tirés, le nombre des cas favorables est

$$=n-2+(n-2)(n-3)=(n-2)^2$$

et partant la probabilité

$$=\frac{2\cdot 3(n-2)}{n(n-1)}.$$

REMARQUE

10. Il est ici évident que les nombres des cas qui conviennent à chacune de nos trois especes, étant ajoûtés ensemble, produisent le nombre de tous les cas possibles, qui est

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

tout comme la nature de la question le demande, puisqu'il est en effet

$$n-2+\frac{2(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

et de la même maniere, la somme des probabilités qui répondent à ces trois especes devient égale à l'unité, qui est le caractere d'une certitude complette.

Par cette raison, j'aurois bien pu me passer du raisonnement embarrassant par lequel j'ai fait le dénombrement des cas de la troisieme espece. Mais je l'ai ajoûté exprès pour en mieux faire voir la justesse, vu qu'il porte ouvertement l'empreinte de la vérité, afin qu'il ne paroisse point suspect, quand je serai obligé d'y recourir dans la suite. Cependant, puisque je suis enfin parvenu à une expression fort simple, on ne sauroit presque douter qu'il n'y eût aussi une autre route assez simple qui conduise à la même conclusion, ce qui mérite principalement l'attention de ceux qui s'appliquent à cette espece de recherches.

PROBLEME 3

11. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4 etc. *étant* $= n$, *si l'on en tire* 4 *au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION

Parmi les quatre nombres tirés, il faut distinguer 5 especes différentes par rapport aux séquences, dont la nature peut être représentée de la maniere suivante:

I. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3$; II. $a,\ a+1,\ a+2,\ b$; III. $a,\ a+1,\ b,\ b+1$;

IV. $a,\ a+1,\ b,\ c$; V. $a,\ b,\ c,\ d$;

de sorte que la premiere contient une séquence de 4, la seconde une de 3, la III. deux séquences de 2, la IV. une seule séquence de 2 et la V. ne contient aucune séquence. Il s'agit donc de faire le dénombrement des cas pour chacune de ces especes, dont la somme doit être égale au nombre de tous les cas possibles, qui est

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

I. Le nombre des cas où la premiere espece a lieu est

$$= n - 3,$$

puisque ces cas sont

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5),\ \ldots\ (n-3,\ n-2,\ n-1,\ n),$$

et partant la probabilité que cette espece arrive sera

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n-1)(n-2)}.$$

II. Pour l'espece a, $a+1$, $a+2$, b, le nombre de toutes les séquences possibles de trois étant $= n-2$ [§ 7], le nombre b doit être pris ou de cette progression

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a-2,$$

ou de celle-ci

$$a+4,\ a+5,\ \ldots\ n;$$

donc, le nombre des valeurs convenables pour b est

$$= a - 2 + n - a - 3 = n - 5,$$

pourvu que a ne soit ni 1 ni $a+2=n$. Mettons à côté ces deux cas; et le nombre des autres étant $= n-4$, dont chacun peut exister en $n-5$ diverses manieres différentes, le nombre des cas est

$$= (n-4)(n-5).$$

Mais la premiere séquence, 1, 2, 3, peut être combinée avec $n-4$ différens nombres b, et de même aussi la derniere, $n-2$, $n-1$, n; d'où le nombre de tous les cas pour cette espece est

$$= (n-4)(n-5) + 2(n-4) = (n-3)(n-4),$$

dont tous sont différens, et partant la probabilité que cette espece existe est

$$= 2 \cdot \frac{3 \cdot 4 (n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4 (n-4)}{n(n-1)(n-2)}.$$

III. Pour la troisieme espece, a, $a+1$, b, $b+1$, la premiere séquence, a, $a+1$, étant prise à volonté, ce qui se peut faire en $n-1$ manieres différentes [§ 2], la seconde séquence, b, $b+1$, doit être prise ou de cette progression

$$1, 2, 3, \ldots a-2,$$

ce qui peut arriver en $a-3$ manieres, ou de celle-ci

$$a+3, a+4, a+5, \ldots n,$$

ce qui peut arriver en $n-a-3$ manieres, pourvu que le nombre a ne soit 1 ou 2, et $a+1$ ni n, ni $n-1$; mettons à côté ces 4 cas; et le nombre des autres étant $= n-5$, dont chacun peut arriver en $n-6$ manieres, le nombre des cas sera $= (n-5)(n-6)$. Mais la premiere séquence, 1, 2, peut être combinée avec $n-4$ autres semblables séquences, de même que la derniere, $n-1$, n; et la seconde, 2, 3, avec $n-5$, de même que l'avant-derniere, $n-2$, $n-1$; donc, au nombre des cas déjà trouvé, il faut encore ajoûter

$$2(n-4) + 2(n-5) = 4n - 18,$$

de sorte que le nombre entier des cas est

$$nn - 11n + 30 + 4n - 18 = nn - 7n + 12 = (n-3)(n-4).$$

Mais ici chaque cas se rencontre deux fois, selon qu'on considere en premier lieu ou l'une ou l'autre séquence. Par conséquent, le juste nombre des cas qui produisent cette troisieme espece est

$$= \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}$$

et la probabilité que ce cas existe

$$= \frac{3 \cdot 4 (n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3 \cdot 4 (n-4)}{n(n-1)(n-2)}.$$

IV. Pour la quatrieme espece, a, $a+1$, b, c, la séquence $a, a+1$ étant prise à volonté, ce qui se peut faire en $n-1$ manieres différentes, les deux autres nombres b et c doivent être pris de ces deux progressions

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a-2, \qquad a+3,\ a+4,\ \ldots\ n,$$

en sorte qu'ils ne renferment point de séquence. Donc, prenant tous les deux de la premiere progression, dont le nombre de termes est $a-2$, cela peut se faire en

$$\frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2}$$

manieres différentes [§ 2]; de même, si l'on prend tous les deux de l'autre progression, dont le nombre de termes est $n-a-2$, cela peut arriver en autant de manieres

$$\frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1\cdot 2}.$$

Or, prenant b de la premiere et c de la seconde progression, le nombre des cas est

$$=(a-2)(n-a-2),$$

pourvu qu'on en excepte les deux premieres et les deux dernieres séquences. Le nombre donc de celles où ce dénombrement a lieu étant $=n-5$, dont chacun peut arriver autant de fois

$$\frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2}+\frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1\cdot 2}+(a-2)(n-a-2),$$

ce qui se réduit à

$$\frac{nn-11n+32}{1\cdot 2},$$

qu'il faut multiplier par $n-5$.

Or, la premiere séquence, 1, 2, donne tant de cas

$$\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2}$$

et autant la derniere, $n-1$, n; et la seconde, 2, 3, donne

$$\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$$

cas et autant l'avant-derniere; de sorte que le nombre de ces 4 cas est

$$= (n-4)(n-5) + (n-5)(n-6) = (n-5)(2n-10) = 2nn - 20n + 50,$$

qui, étant ajoûtés aux précédens, donnent

$$\frac{n-5}{2}(nn - 11n + 32 + 4n - 20) = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1\cdot 2}$$

pour le nombre de tous les cas qui produisent cette espece, et partant la probabilité qu'elle existe est

$$= \frac{3\cdot 4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}.$$

V. La cinquieme espece n'a pas besoin d'être développée séparément, puisque le nombre des cas de toutes les cinq especes doit être

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};$$

ajoûtons donc ensemble les cas trouvés pour les quatre especes, dont la somme est

$$n - 3 + (n-3)(n-4) + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2}$$
$$= \frac{(n-3)(nn - 6n + 10)}{1\cdot 2},$$

qui, étant retranchée de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, laisse

$$\frac{n-3}{24}\big(n(n-1)(n-2) - 12(nn - 6n + 10)\big) = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

pour le nombre de tous les cas où il n'y a point de séquence parmi les 4 nombres tirés; d'où la probabilité que cette espece existe est

$$= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}.$$

COROLLAIRE 1

12. Voilà donc les nombres des cas qui produisent chacune des cinq especes rapportées:

	Nombre des cas
I. Espece $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3$	$\frac{n-3}{1}$.
II. Espece $a,\ a+1,\ a+2,\ b$	$\frac{2(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}$.
III. Espece $a,\ a+1,\ b,\ b+1$	$\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}$.
IV. Espece $a,\ a+1,\ b,\ c$	$\frac{3(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}$.
V. Espece $a,\ b,\ c,\ d$	$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.

J'ai exprimé ces nombres en sorte qu'on en puisse peut-être former bientôt une induction pour des questions plus compliquées.

COROLLAIRE 2

13. De la même maniere j'exprimerai la probabilité que chacune de ces cinq especes existe:

	Probabilité
I. Espece $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{n(n-1)(n-2)}$.
II. Espece $a,\ a+1,\ a+2,\ b$	$2\cdot\frac{3\cdot 4(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$.
III. Espece $a,\ a+1,\ b,\ b+1$	$\frac{3\cdot 4(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$.
IV. Espece $a,\ a+1,\ b,\ c$	$3\cdot\frac{4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$.
V. Espece $a,\ b,\ c,\ d$	$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}$.

PROBLEME 4

14. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3 *etc. étant quelconque* $= n$, *si l'on en tire* 5 *au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION

Parmi les 5 nombres tirés il faut distinguer les especes suivantes auxquelles tous les cas possibles, dont le nombre est

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

se réduisent.

I. Espece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, où il y a une séquence de 5.

II. Espece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, où il n'y a qu'une séquence de 4.

III. Espece a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, où il n'y a qu'une séquence de trois et une de deux.

IV. Espece a, $a+1$, $a+2$, b, c, où il n'y en a qu'une de trois.

V. Espece a, $a+1$, b, $b+1$, c, où il n'y en a que deux de deux.

VI. Espece a, $a+1$, b, c, d, où il n'y en a qu'une seule de deux.

VII. Espece a, b, c, d, e, où il n'y a aucune séquence.

Parcourons séparément chacune de ces 7 especes.[1])

I. La premiere ne contient que ces cas:

(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 6) etc., jusques à $(n-4,\ n-3,\ n-2,\ n-1,\ n)$,

dont le nombre est $= n-4$, et partant la probabilité [qu'il y ait une séquence de cinq]

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

1) Cette phrase du manuscrit ne se trouve pas dans l'édition originale. L. G. D.

II. Dans la seconde espece, la séquence a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ peut varier en $n-3$ manieres différentes; et le nombre b devant être pris de l'une de ces deux progressions

$$1, 2, 3, \ldots a-2 \quad \text{ou} \quad a+5, a+6, \ldots n,$$

le nombre de ses valeurs est

$$= a-2+(n-a-4) = n-6,$$

à l'exception de la premiere et derniere séquence. Mettant donc ces deux à part, le nombre des autres étant $n-5$, celui des cas sera

$$= (n-5)(n-6).$$

Or, pour la premiere séquence, 1, 2, 3, 4, le nombre des valeurs de b est $= n-5$ et aussi pour la derniere. Ajoûtons donc encore ces $2(n-5)$ cas au nombre trouvé $(n-5)(n-6)$, et nous aurons le nombre de tous les cas qui conviennent à cette espece

$$= (n-5)(n-4) = 2\cdot\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2},$$

d'où l'on tire la probabilité [qu'il y ait une séquence de quatre]

$$= 2\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

III. Dans la troisieme espece, a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, la premiere séquence de trois, a, $a+1$, $a+2$, peut avoir lieu en $n-2$ manieres différentes, et l'autre séquence de deux, b, $b+1$, doit être prise ou de cette progression

$$1, 2, 3, \ldots a-2,$$

d'où leur nombre sera $= a-3$, ou de cette progression

$$a+4, a+5, \ldots n,$$

d'où le nombre des cas devient $= n-a-4$; et partant, le nombre des valeurs de b est $= n-7$, excepté les deux premieres et les deux dernieres séquences de trois. Le nombre des autres étant donc $= n-2-4 = n-6$, et chacune recevant $n-7$ cas, le nombre des cas est

$$= (n-6)(n-7).$$

Mais la premiere, 1, 2, 3, admet $n-5$ cas et la seconde $n-6$; d'où les deux premieres et les deux dernieres fournissent encore

$$2(n-5)+2(n-6)=4n-22$$

cas, qui étant ajoûtés à $(n-6)(n-7)$ produisent le nombre de tous les cas de cette espece

$$=nn-9n+20=(n-4)(n-5)=2\cdot\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2}$$

comme dans l'espece précédente; d'où la probabilité [qu'il y ait une séquence de trois et une de deux] est aussi

$$=2\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\,(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

IV. Dans la quatrieme espece, a, $a+1$, $a+2$, b, c, la séquence de trois a lieu en $n-2$ cas; et les deux nombres b et c doivent être pris de ces deux progressions

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a-2,\quad \Big|\quad a+4,\ a+5,\ \ldots\ n,$$

en sorte pourtant qu'ils ne fassent point de séquence. Prenons d'abord tous les deux de la premiere progression, et le nombre des cas est

$$\frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2};$$

mais si nous les prenons de l'autre, le nombre des cas est

$$=\frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1\cdot 2};$$

enfin, prenant l'un de l'une et l'autre de l'autre, le nombre des cas est

$$=(a-2)(n-a-3).$$

Ainsi, pour chaque séquence de trois, nous avons tant de cas

$$\frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2}+\frac{(n-a-4)(n-a-5)}{1\cdot 2}+(a-2)(n-a-3)=\frac{nn-13n+44}{1\cdot 2},$$

excepté les deux premieres et les deux dernieres séquences; donc, le nombre de celles où ce dénombrement est juste étant $= n - 2 - 4 = n - 6$, le nombre des cas qui leur convient est

$$\frac{(n-6)(nn-13n+44)}{2}.$$

Or, la premiere et la derniere séquence donnent chacune

$$\frac{(n-5)(n-6)}{2}$$

cas, et la seconde et l'avant-derniere chacune

$$\frac{(n-6)(n-7)}{2};$$

donc, au nombre des cas trouvés il faut encore ajoûter $(n-6)(2n-12)$, d'où résulte la somme

$$\frac{(n-6)(nn-9n+20)}{2} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2},$$

qui exprime le nombre des cas pour cette espece; et partant la probabilité [qu'il y ait une seule séquence de trois] est

$$= 3 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

V. Pour la cinquieme espece, $a, a+1, b, b+1, c$, considérons le nombre c; et les deux séquences de deux doivent être tirées de ces deux progressions

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ c-2,\quad \big|\quad c+2,\ c+3,\ \ldots\ n.$$

Si l'on prend toutes les deux de la premiere, le nombre des cas [§ 11, III] est

$$= \frac{(c-5)(c-6)}{2},$$

et si on les prend de l'autre, il est

$$= \frac{(n-c-4)(n-c-5)}{2}.$$

Mais, l'une étant prise de la premiere et l'autre de la derniere, le nombre des cas sera

$$=(c-3)(n-c-2);$$

donc, pour chaque nombre c, le nombre des cas sera

$$\frac{(c-5)(c-6)}{2}+\frac{(n-c-4)(n-c-5)}{2}+(c-3)(n-c-2)=\frac{nn-15n+62}{2}.$$

Mais il en faut exclure les quatre premiers et derniers nombres c, de sorte que ce dénombrement n'a lieu que pour $n-8$ valeurs de c, auxquelles convient ce nombre de cas

$$\frac{(n-8)(nn-15n+62)}{2}.$$

Soyent maintenant les autres valeurs qui admettent les cas suivans:

	nombre des cas
si $c=1$ ou $c=n$,	$\frac{(n-5)(n-6)}{2}$,
si $c=2$ ou $c=n-1$,	$\frac{(n-6)(n-7)}{2}$,
si $c=3$ ou $c=n-2$,	$\frac{(n-7)(n-8)}{2}$,
si $c=4$ ou $c=n-3$,	$\frac{(n-8)(n-9)}{2}+n-6$,

dont la somme est $=2nn-27n+94$, et dont le double, $4nn-54n+188$, doit être ajoûté au nombre précédent

$$\frac{n^3-23nn+182n-496}{2}$$

pour avoir le nombre des cas

$$\frac{n^3-15nn+74n-120}{2}=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2},$$

et partant la probabilité [qu'il y ait deux séquences de deux]

$$=3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

qui est précisément la même que celle de l'espece précédente.

VI. Pour la sixieme espece, a, $a+1$, b, c, d, je tracerai une autre route en considérant le plus petit des nombres a, b, c, d. Soit donc premierement a le plus petit; et les trois solitaires b, c, d seront pris de cette progression

$$a+3,\ a+4,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes est $= n-a-2$, et partant le nombre des cas [§ 7]

$$=\frac{(n-a-4)(n-a-5)(n-a-6)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

d'où nous aurons pour chaque nombre a les cas suivans:

si a est	le nombre des cas sera	or la somme de cette progression se trouve
1	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$	
2	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}$	
3	$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.
$\vdots$	. . . .	
$n-7$	$\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}$	

Ensuite, si un des nombres solitaires, d, est le plus petit, les quatre autres, a, $a+1$, b, c, seront pris de la progression

$$d+2,\ d+3,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes est $= n-d-1$. Or alors, le nombre des cas [§ 11, IV] est

$$=\frac{3(n-d-4)(n-d-5)(n-d-6)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Par conséquent:

si d est	le nombre des cas sera	la somme de cette progression se trouve
1	$\frac{3(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$	
2	$\frac{3(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$=\frac{3(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.
$\vdots$	. . . .	
$n-7$	$3\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}$	

Par conséquent, la somme de tous les cas qui produisent cette espece est

$$= 4 \cdot \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

et partant la probabilité [qu'il y ait une seule séquence de deux]

$$= 4 \cdot \frac{5(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

VII. Enfin, pour la septieme espece, le nombre de tous les cas qui la produisent est

$$= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

et partant la probabilité [qu'il n'y ait aucune séquence]

$$= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

COROLLAIRE 1

15. Mettons devant les yeux à la fois les nombres des cas et les probabilités que nous venons de trouver pour les sept especes de tirages, quand on tire cinq nombres de n.

		Nombre des cas	Probabilité
I.	$a, a+1, a+2, a+3, a+4$	$\frac{n-4}{1}$	$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
II.	$a, a+1, a+2, a+3, b$	$2 \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2}$	$2 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
III.	$a, a+1, a+2, b, b+1$	$2 \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2}$	$2 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
IV.	$a, a+1, a+2, b, c$	$3 \cdot \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$3 \cdot \frac{4 \cdot 5(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
V.	$a, a+1, b, b+1, c$	$3 \cdot \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$3 \cdot \frac{4 \cdot 5(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
VI.	$a, a+1, b, c, d$	$4 \cdot \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$4 \cdot \frac{5(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
VII.	a, b, c, d, e	$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

COROLLAIRE 2

15[a].[1]) Si l'on demande la probabilité qu'il y ait au moins une séquence de deux dans les 5 nombres tirés, toutes les especes, hormis la derniere, satisfont, et puisque la somme de toutes les probabilités est $=1$, la probabilité cherchée est

$$=1-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

COROLLAIRE 3

16. Si l'on demande la probabilité qu'il y ait, parmi les 5 nombres tirés, au moins deux séquences de deux, puisqu'une séquence de 3 en contient deux de 2, toutes les especes, sans les deux dernieres, satisfont, et partant la probabilité cherchée sera

$$=1-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n+12)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

COROLLAIRE 4

17. Or, la probabilité qu'il se trouvera parmi les 5 nombres tirés [au moins] une séquence de trois sera

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5(2+4(n-5)+(n-5)(n-6))}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{3\cdot 4\cdot 5(n-4)}{n(n-1)(n-2)},$$

et qu'il y ait [au moins] une séquence de 4, la probabilité sera

$$=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Enfin, qu'il y ait une séquence de tous les cinq, la probabilité est

$$=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

---

1) L'édition originale porte ici, par erreur, le numéro 15 pour la seconde fois. L. G. D.

APPLICATION A LA LOTTERIE DE GENES

18. Pour appliquer ces formules à la Lotterie de Genes, où l'on tire chaque fois 5 numeros de 90, nous aurons $n = 90$; et pour marquer plus distinctement les différens cas par rapport aux séquences, j'employerai les caracteres suivans:

(1) marque un nombre solitaire, hors de toute séquence,

(2) marque une séquence de deux,

(3) marque une séquence de trois,

(4) marque une séquence de quatre,

(5) marque une séquence de tous les cinq.

Cela posé, nous aurons pour chacune des sept différentes especes les probabilités suivantes:

	Espece	Probabilité
I.	(5)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{1}{511038}$,
II.	(4), (1)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{85}{511038}$,
III.	(3), (2)	$\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{85}{511038}$,
IV.	(3), (1), (1)	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{3570}{511038}$,
V.	(2), (2), (1)	$\frac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{3570}{511038}$,
VI.	(2), (1), (1), (1)	$\frac{4\cdot5\cdot85\cdot84\cdot83}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{98770}{511038}$,
VII.	(1), (1), (1), (1), (1)	$\frac{85\cdot84\cdot83\cdot82}{90\cdot89\cdot88\cdot87} = \frac{404957}{511038}$.

De là je tire les conclusions suivantes:

1°. Que parmi les 5 nombres tirés il se trouve au moins une séquence de deux, la probabilité est $= \frac{106081}{511038}$; donc, si l'on permettoit de mettre sur ce cas, le gain devroit être fixé à $4\frac{817}{1000}$ fois la mise[1]), et si l'on n'accordoit que 4 fois la mise, la Lotterie y gagneroit [817 sur 4817 ou] 17 pour cent.

1) De l'égalité des espérances mathématiques, on tire, en désignant par m la mise, l'équation $x\cdot\frac{106081}{511038}\cdot m = m$, d'où le rapport x du gain à la mise, $x = 511038 : 106081 = 4{,}81743\ldots$

L. G. D.

2°. Que parmi les 5 nombres tirés il se trouve au moins deux séquences de 2, ou une de trois, ou plusieurs, la probabilité est $=\frac{7311}{511038}$; et partant, en permettant de mettre sur ce cas, le gain doit être fixé à $69\frac{9}{10}$ fois la mise; donc, si l'on n'accordoit que 50 fois la mise, la Lotterie gagneroit 199 sur 699 ou $28\frac{1}{2}$ pour cent.

3°. Que parmi les 5 nombres tirés il se trouve une séquence de trois, ou plusieurs, la probabilité est $=\frac{3741}{511038}$; et partant, en permettant de mettre sur ce cas, le gain devroit être fixé à $136\frac{6}{10}$ fois la mise; donc, si l'on n'accordoit que 90 fois la mise, on gagneroit 466 sur 1366 ou bien $34\frac{1}{9}$ pour cent.

4°. Que parmi les 5 nombres tirés il se trouve une séquence de 4, ou de tous les cinq, la probabilité est $=\frac{86}{511038}$; et partant, si l'on mettoit sur ce cas, le gain devroit être fixé à $5942\frac{3}{10}$ fois la mise[1]); donc, si la Lotterie n'accordoit que 3000 fois la mise, elle gagneroit $2942\frac{3}{10}$ sur $5942\frac{3}{10}$ ou bien $49\frac{1}{2}$ pour cent.

REMARQUE

19. Quelque difficile qu'il ait paru d'abord d'étendre ces recherches à des plus grands nombres de billets tirés, la route particuliere que j'ai employée dans la solution de ce probleme pour l'espece VI rend ces recherches fort aisées, de sorte qu'on sera en état de les étendre à un aussi grand nombre de billets tirés qu'on voudra. Toute cette méthode revient à trouver la somme d'une telle progression descendante

$$\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}+\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}+\text{etc.},$$

jusques à ce que les termes évanouissent. Or, on sait que la somme de cette progression s'exprime fort simplement en sorte

$$\frac{(k+1)k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(m+1)}.$$

Je me servirai donc de cette méthode pour résoudre le probleme suivant.

1) L'édition originale porte: ... *fixé à* 5940 *fois la mise; donc* ... *elle gagneroit* 2940 *sur* 5940 ... L. G. D.

PROBLEME 5

20. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3 *etc. étant quelconque* $= n$, *si l'on en tire six au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION

Il est aisé d'établir toutes les especes différentes qui peuvent se rencontrer parmi les six nombres tirés, que je développerai l'une après l'autre.

I. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5.$

Le nombre des cas est ici ouvertement $= \frac{n-5}{1}$; donc, puisque le nombre de tous les cas possibles est

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},$$

la probabilité que cette espece ait lieu est

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

II. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ b.$

Soit a le plus petit des nombres tirés; et b doit être pris de cette progression

$$a+6,\ a+7,\ a+8,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes est $= n-a-5$, qui donne le nombre des valeurs de b pour chaque nombre a. Mais si b est le plus petit des nombres tirés, la séquence de cinq, $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,$ doit être prise de cette progression

$$b+2,\ b+3,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes est $= n-b-1$; ce qui, par le probleme 4 [§ 14, I], peut arriver en

$$\frac{n-b-5}{1}$$

manieres différentes. Ainsi, pour trouver le nombre des cas, nous n'avons qu'à sommer les deux progressions suivantes:

si a est	valeurs de b	si b est	valeurs de a
1	$\frac{n-6}{1}$	1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$	2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$	3	$\frac{n-8}{1}$
etc.	etc.	etc.	etc.
somme	$=\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$	somme	$=\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$

Donc, le nombre des cas est

$$=2\cdot\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2},$$

et la probabilité

$$=2\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

III. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ b,\ b+1.$

Si a est le plus petit des nombres tirés, la séquence de deux, b, $b+1$, doit être prise de cette progression

$$a+5,\ a+6,\ a+7,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-a-4$. Donc, par le probleme 1 [§ 2], le nombre des valeurs de b est

$$=\frac{n-a-5}{1}.$$

Si b est le plus petit des 6 nombres tirés, la séquence de quatre, a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, doit être prise de cette progression

$$b+3,\ b+4,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-b-2$. Donc, par le probleme 3 [§ 11, I], le nombre des valeurs de a est

$$=\frac{n-b-5}{1}.$$

Voilà donc les deux progressions que nous avons à sommer:

si a est	valeurs de b	si b est	valeurs de a
1	$\frac{n-6}{1}$	1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$	2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$	3	$\frac{n-8}{1}$
etc.	etc.	etc.	etc.
somme $=\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$		somme $=\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$	

Donc, le nombre des cas est

$$=2\cdot\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2},$$

et la probabilité

$$=2\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

IV. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ b,\ c.$

Soit a le plus petit des nombres tirés; et les deux solitaires b, c doivent être pris de cette progression

$$a+5,\quad a+6,\ \dots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-a-4$. Donc, par le probleme 1 [§ 2], le nombre des cas est

$$=\frac{(n-a-5)(n-a-6)}{1\cdot 2}.$$

Soit l'un des nombres solitaires, c, le plus petit; et la séquence de 4 avec l'autre solitaire, $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ b$, doit être prise de cette progression

$$c+2,\quad c+3,\ \dots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-c-1$. Donc, par le probleme 4 [§ 15, II], le nombre des cas est

$$=2\cdot\frac{(n-c-5)(n-c-6)}{1\cdot 2}.$$

Nous aurons donc à sommer les deux progressions suivantes:

si a est	le nombre des cas	si c est	le nombre des cas
1	$\frac{(n-6)(n-7)}{1\cdot 2}$	1	$2\cdot\frac{(n-6)(n-7)}{1\cdot 2}$
2	$\frac{(n-7)(n-8)}{1\cdot 2}$	2	$2\cdot\frac{(n-7)(n-8)}{1\cdot 2}$
3	$\frac{(n-8)(n-9)}{1\cdot 2}$	3	$2\cdot\frac{(n-8)(n-9)}{1\cdot 2}$
etc.	etc.	etc.	etc.
somme	$=\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$	somme	$=2\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$

Donc, le nombre des cas est

$$=3\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

et la probabilité

$$=3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 6(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

V. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ b,\ b+1,\ b+2.$

Puisqu'il y a ici deux séquences semblables de trois, il est indifférent lequel des deux nombres a et b soit le plus petit; et la séquence de trois, $a,\ a+1,\ a+2$, doit être prise de cette progression

$$b+4,\quad b+5,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes est $=n-b-3$. Donc, par le probleme 2 [§ 7], le nombre des cas est

$$=\frac{n-b-5}{1},$$

et la progression à sommer

$$\frac{n-6}{1},\quad \frac{n-7}{1},\quad \frac{n-8}{1}\quad \text{etc.}$$

Donc, le nombre des cas est

$$=\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2},$$

et la probabilité

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

VI. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ b,\ b+1,\ c.$

Si a est le plus petit des nombres tirés, les autres, b, $b+1$, c, doivent être pris de cette progresssion

$$a+4, \quad a+5, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n - a - 3$; d'où, [par] le probleme 2 [§ 7], le nombre des cas est

$$= 2 \cdot \frac{(n-a-5)(n-a-6)}{1 \cdot 2},$$

et posant $a = 1$, on a

$$2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2}.$$

Si b est le plus petit des nombres tirés, les autres, a, $a+1$, $a+2$, c, doivent être pris de cette progression

$$b+3, \quad b+4, \ldots n,$$

dont le nombre de termes est $n - b - 2$; d'où, par le probleme 3 [§ 11, II], le nombre des cas est

$$= 2 \cdot \frac{(n-b-5)(n-b-6)}{1 \cdot 2},$$

et posant $b = 1$, on a

$$2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2}.$$

Si c est le plus petit, les autres, a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, doivent être tirés de cette progression

$$c+2, \quad c+3, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n - c - 1$, d'où, par le probleme 4 [§ 15, III], le nombre des cas est

$$= 2 \cdot \frac{(n-c-5)(n-c-6)}{1 \cdot 2},$$

et posant $c = 1$, on a

$$2 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2}.$$

Les trois progressions à sommer se réduisent donc à cette seule

$$6 \cdot \frac{(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2} + 6 \cdot \frac{(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2} + 6 \cdot \frac{(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

Donc, le nombre des cas est

$$= 6 \cdot \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

et la probabilité

$$= 6 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6\,(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

VII. Espece. $a,\ a+1,\ a+2,\ b,\ c,\ d.$

Si a [est] le plus petit des nombres tirés, au lieu duquel on peut d'abord prendre l'unité, les autres, b, c, d, doivent être pris de cette progression

$$5,\quad 6,\quad 7, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n-4$. Donc, par le probleme 2 [§ 7], le nombre des cas est

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Si un des solitaires est le plus petit, comme $d = 1$, les autres, a, $a+1$, $a+2$, b, c, doivent être pris de cette progression

$$3,\quad 4,\quad 5, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n-2$. Donc, par le probleme 4 [§ 15, IV], le nombre des cas

$$= 3 \cdot \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Il s'agit donc de sommer la progression descendante qui commence par

$$4 \cdot \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Donc, le nombre de tous les cas est

$$= 4 \cdot \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

et la probabilité

$$= 4 \cdot \frac{5 \cdot 6 (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

VIII. Espece. $a, \; a+1, \; b, \; b+1, \; c, \; c+1.$

Ici, il n'y a qu'un seul cas à considérer. Soit donc $c=1$; et les autres, a, $a+1$, b, $b+1$, doivent être tirés de cette progression

$$4, \quad 5, \quad 6, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n-3$, d'où par le probleme 3 [§ 12, III], le nombre des cas

$$= \frac{(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2},$$

qui donne la progression à sommer. Donc, le nombre de tous les cas est

$$= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

et la probabilité

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

IX. Espece. $a, \quad a+1, \quad b, \quad b+1, \quad c, \quad d.$

Soit $a=1$; et les autres, b, $b+1$, c, d, doivent être tirés de cette progression

$$4, \quad 5, \quad 6, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n-3$. Donc, par le probleme 3 [§ 12, IV], le nombre des cas

$$= 3 \cdot \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

et dans cette formule est déjà comprise la position $b=1$.

Soit $d=1$, où est déjà comprise la lettre c; les autres, a, $a+1$, b, $b+1$, c, doivent être tirés de cette progression

$$3,\quad 4,\quad 5,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-2$. Donc, par le probleme 4 [§ 15, V], le nombre des cas

$$=3\cdot\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot2\cdot3},$$

et partant on n'a qu'à sommer la progression descendante qui commence par le terme

$$6\cdot\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot2\cdot3}.$$

D'où le nombre de tous les cas

$$=6\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

et la probabilité

$$=6\cdot\frac{5\cdot6\,(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

X. *Espece.* $a,\quad a+1,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e.$

Soit premierement $a=1$; et les quatre nombres solitaires b, c, d, e doivent être tirés de cette progression

$$4,\quad 5,\quad 6,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-3$; et, par le probleme 3 [§ 12, V], le nombre des cas

$$=\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

Soit ensuite un des solitaires, e, $=1$; et les autres, a, $a+1$, b, c, d, doivent être tirés de cette progression

$$3,\quad 4,\quad 5,\ \ldots\ n,$$

dont le nombre de termes $=n-2$; et, par le probleme 4 [§ 15, VI], le nombre des cas

$$=4\cdot\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

de sorte qu'il s'agit de sommer la progression descendante qui commence par le terme

$$5 \cdot \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Donc, le nombre de tous les cas

$$= 5 \cdot \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

et la probabilité

$$= 5 \cdot \frac{6\,(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

XI. Espece. $a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f.$

Ici, n'ayant qu'un cas à considérer, posons $f = 1$; et les autres, a, b, c, d, e, doivent être tirés de cette progression

$$3, \quad 4, \quad 5, \ldots n,$$

dont le nombre de termes $= n - 2$. Ainsi, par le probleme 4 [§ 15, VII], le nombre des cas

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Donc, le nombre de tous les cas

$$= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\;\;6},$$

et la probabilité

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

COROLLAIRE 1

21. Pour mettre tout cela clairement devant les yeux, je ferai usage des mêmes caracteres pour marquer les différentes especes de séquences que j'ai exposées § 18, et nous aurons pour chaque espece:

Especes	Nombre des cas	Probabilité
I. (6)	$\frac{n-5}{1}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
II. (5) + (1)	$2\cdot\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$	$2\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
III. (4) + (2)	$2\cdot\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$	$2\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
IV. (4) + 2(1)	$3\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 6\,(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
V. 2(3)	$\frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}$	$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VI. (3) + (2) + (1)	$6\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$6\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 6\,(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VII. (3) + 3(1)	$4\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$4\cdot\frac{5\cdot 6\,(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VIII. 3 (2)	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{4\cdot 5\cdot 6\,(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
IX. 2(2) + 2(1)	$6\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$6\cdot\frac{5\cdot 6\,(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
X. (2) + 4(1)	$5\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$5\cdot\frac{6\,(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
XI. 6(1)	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

COROLLAIRE 2

22. La loi de ces expressions pour le nombre des cas de chaque espece est assez évidente, puisque le nombre des facteurs dans les numérateurs est le même que celui des différentes lettres dont j'ai caractérisé auparavant les différentes especes, en commençant par $n-5$ et les diminuant d'une unité; or, le dénominateur contient toujours autant de facteurs, en commençant par 1, 2, 3 etc. Mais la loi des coëfficiens numériques n'est pas si évidente; cependant, elle le deviendra assez en représentant les nombres des cas de la maniere suivante.

Especes	Nombre des cas
1(6)	$\frac{n-5}{1}$
1(5) + 1(1)	$\frac{n-5\cdot n-6}{1\cdot 1}$
1(4) + 1(2)	$\frac{n-5\cdot n-6}{1\cdot 1}$
1(4) + 2(1)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 1\cdot 2}$,
2(3)	$\frac{n-5\cdot n-6}{1\cdot 2}$,
1(3) + 1(2) + 1(1)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 1\cdot 1}$,
1(3) + 3(1)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7\cdot n-8}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$,
3(2)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 2\cdot 3}$,
2(2) + 2(1)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7\cdot n-8}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}$,
1(2) + 4(1)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7\cdot n-8\cdot n-9}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$,
6(1)	$\frac{n-5\cdot n-6\cdot n-7\cdot n-8\cdot n-9\cdot n-10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$,

où les dénominateurs suivent manifestement les coëfficiens des séquences de chaque ordre, qui caractérisent chaque espece.

REMARQUE

23. Nous voilà donc maintenant en état de rendre ces recherches tout à fait générales; cependant, on ne sauroit commencer par le probleme général, puisque chaque nombre des billets tirés dépend de tous les précédens. Mais, quoique cette derniere méthode que je viens d'employer ait de si grands avantages, il est pourtant à présumer qu'on en découvrira encore une plus simple.

PROBLEME GENERAL

24. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4 *etc. étant quelconque* $= n$, *si l'on en tire* m *billets au hazard, déterminer toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION

Pour distinguer les différentes sortes de séquences qui peuvent se trouver dans chaque tirage de m nombres, je me servirai de ces signes [§ 18]:

(1) marque un nombre solitaire,
(2) marque une séquence de deux nombres,
(3) marque une séquence de trois nombres,
(4) marque une séquence de quatre nombres
etc.

Cela posé, chaque tirage sera caractérisé par une telle formule

$$\alpha(a)+\beta(b)+\gamma(c)+\delta(d)+\text{etc.},$$

ce qui signifie qu'il y a α séquences de a nombres, β séquences de b nombres, γ séquences de c nombres, δ séquences de d nombres etc.; et puisque la multitude des nombres tirés est $= m$, il faut qu'il soit

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\text{etc.}=m.$$

Posons maintenant de plus

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}=k;$$

et le nombre de tous les cas qui produisent le dit tirage

$$\alpha(a)+\beta(b)+\gamma(c)+\delta(d)+\text{etc.}$$

sera exprimé en sorte

$$\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots(n-m-k+2)}{1\cdot 2\cdots\alpha\cdot 1\cdot 2\cdots\beta\cdot 1\cdot 2\cdots\gamma\cdot 1\cdot 2\cdots\delta\cdot \text{etc.}},$$

lequel nombre étant divisé par le nombre de tous les cas possibles, qui est

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m},$$

donnera la probabilité que ce même cas existe. C'est en quoi consiste la solution complette de notre probleme.

COROLLAIRE 1

25. On aura donc autant d'especes de tirages qu'il est possible de trouver de différentes formules

$$\alpha(a)+\beta(b)+\gamma(c)+\text{etc.}$$

dont la somme $\alpha a+\beta b+\gamma c+$ etc. soit $=m$, c'est à dire autant qu'il est possible de partager le nombre m de différentes manieres en parties; ainsi, prenant pour m successivement les nombres 1, 2, 3, 4 etc., les nombres des especes formeront la progression suivante

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1,	2,	3,	5,	7,	11,	15,	22,	30,	42	56,	77,	101,	135,	176	etc.,

dont j'ai expliqué la nature dans mes recherches sur la partition des nombres.[1])

COROLLAIRE 2

26. Le nombre des facteurs qui composent le nombre des cas pour chaque espece $\alpha(a)+\beta(b)+\gamma(c)+$ etc. est toujours égal au nombre

$$k=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{ etc.},$$

---

1) Il s'agit avant tout des mémoires 158, 191 et 394 (suivant l'Index d'Eneström): *Observationes analyticae variae de combinationibus,* Comment. acad. sc. Petrop. **13** (1741/3), 1751, p. 64, *De partitione numerorum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. **3** (1750/1), 1753, p. 125, *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas,* Novi comment. acad. sc. Petrop. **14** (1769): I, 1770, p. 168; *Leonhardi Euleri Opera omnia,* series I, vol. 2, p. 163 et 254, vol. 3, p. 131 (voir aussi les préfaces de ces deux volumes rédigées par l'éditeur M. F. Rudio). De plus, Euler a consacré à la partition des nombres le chapitre XVI du premier tome de son ouvrage *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne 1748, p. 253—275; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 8, p. 313—338. L. G. D.

qui marque en combien de parties le nombre m est partagé. Et prenant toutes les especes ensemble où k a la même valeur, leurs nombres de cas font conjointement cette somme

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-k-1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\cdot\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots(n-m-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}.$$

Ainsi, si k est	les nombres de cas de toutes les especes qui appartiennent à cette valeur de k sont
1	$\frac{n-m+1}{1}$,
2	$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{(n-m+1)(n-m)}{1\cdot 2}$,
3	$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$,
4	$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
etc.	etc.

et tous ces nombres de cas ajoûtés ensemble doivent produire le nombre de tous les cas possibles, qui est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m}.$$

COROLLAIRE 3

27. La premiere espece étant $1(m)$, où tous les m nombres tirés forment une suite, on aura $k=1$, et le nombre des cas est

$$=\frac{n-m+1}{1};$$

mais la derniere espece étant $m(1)$, où il n'y a aucune séquence, il devient $k=m$, et le nombre des cas

$$=\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots(n-2m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}.$$

Donc, la probabilité qu'il n'y ait aucune séquence parmi les m nombres tirés est

$$\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots(n-2m+2)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)},$$

ou bien

$$\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\cdots(n-2m+2)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)}.$$

Or, cette même formule exprime aussi la probabilité que de $m-1$ nombres donnés il ne se trouve aucun parmi les m nombres tirés.

EXEMPLE

28. Faisons l'application où de n billets marqués des nombres $1, 2, 3, \ldots n$ on tire 7 billets; et l'on trouvera le nombre des cas qui produisent chacune des 15 especes qui peuvent avoir lieu dans un tirage de 7 nombres.

Especes	Nombre des cas
I. (7)	$\frac{n-6}{1}$,
II. (6) + (1)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1\cdot 1}$,
III. (5) + (2)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1\cdot 1}$,
IV. (4) + (3)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1\cdot 1}$,
V. (5) + 2(1)	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 1\cdot 2}$,
VI. (4) + (2) + (1)	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 1\cdot 1}$,
VII. 2(3) + (1)	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 1}$,
VIII. (3) + 2(2)	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 1\cdot 2}$,
IX. (4) + 3(1)	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$,
X. (3) + (2) + 2(1)	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2}$,

Especes	Nombre des cas
XI. $3(2)+(1)$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1}$,
XII. $(3)+4(1)$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$,
XIII. $2(2)+3(1)$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$,
XIV. $(2)+5(1)$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$,
XV. $7(1)$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$.

Chacun de ces nombres divisés par le nombre de tous les cas possibles, qui est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7},$$

donne la probabilité que l'espece correspondante existe.

DES HERRN LEONHARD EULERS NÖTHIGE BERECHNUNG ZUR EINRICHTUNG EINER WITWENCASSE[1]

Commentatio 403 indicis ENESTROEMIANI
Neues Hamburgisches Magazin. Drey und vierzigstes Stück, Leipzig 1770, p. 3—13

Hierbey[2]) kommt alles auf eine richtige Erörterung dieser Frage an: ein Ehepaar, wovon der Mann m Jahr, die Frau aber n Jahr alt ist, bezahlet anjetzo in die Casse eine gewisse Summe Geld a und macht sich anheischig, so lange sie beyde leben, jährlich noch eine gewisse Summe $=b$ zu der Casse beyzutragen; dagegen verpflichtet sich die Casse, nach dem Tode des Mannes seiner Witwe jährlich eine Pension $=p$, so lange sie lebet, auszuzahlen; nun ist die Frage, wie die richtige Verhältniss zwischen dem ersten Einsatze a und dem jährlichen Beytrag b, und zwischen der bewilligten Pension p richtig bestimmt werden soll?

VORLÄUFIGE ANMERKUNGEN ÜBER DIESE FRAGE

1. Erstlich ist klar, daß diese Verhältniss aus der durch die Erfahrung befundenen Sterblichkeit der Menschen bestimmt werden müsse, also dass die Casse daher weder einen beträchtlichen Gewinnst zu hoffen noch einen beträchtlichen Schaden zu befürchten habe, wobey auch dann insonderheit sowohl das Alter des Mannes $=m$ als das Alter der Frauen $=n$ in Betrachtung gezogen werden muss.

1) Siehe hierzu die Abhandlungen 335, 473, 590 dieses Bandes und das Fragment am Schlusse desselben. Siehe auch das Vorwort des Herausgebers. L. G. D.

2) Zum Verständnis dieses etwas auffallenden Anfangs siehe die am Schlusse der Abhandlung befindliche, von A. G. KÄSTNER (1719—1800) verfaßte „Erinnerung". L. G. D.

2. Hernach versteht es sich von selbst, dass sich ein solches Werk nicht einrichten lasse, woferne nicht eine beträchtliche Menge solcher Ehepaare zugleich daran Antheil nehmen, als welcher Umstand bei allen dergleichen Unternehmungen, welche auf die Regeln der Wahrscheinlichkeit gegründet sind, unumgänglich nöthig ist.

3. Sobald aber diese Anzahl so stark angewachsen, dass die Casse nichts weiter zu befürchten Ursache hat, so kann das Werk sicher zu Stande gebracht werden, und wird hierzu keineswegs erfordert, dass dazu nach und nach immer neue Mitgenossen aufgenommen werden. Denn wenn die obige Verhältniss richtig bestimmt worden, so muss das von der ersten Gesellschaft in die Casse geflossene Capital hinreichend seyn, alle daher entstehende Witwen zu versorgen; wenn aber nach der Zeit mehr Mitgenossen aufgenommen werden sollten, so muss derselben Beytrag nicht anders, als zum Behuf ihrer Witwen, angewendet werden.

4. Ferner ist wohl zu merken, dass, in Fall von einem solchen Ehepaare die Frau vor dem Manne stirbt, die weitere Verpflichtung gänzlich aufhöre und dergleichen Fälle den übrigen zu statten kommen; und sollte sich der Mann zum zweyten male verheyrathen, so müsste er von neuem in diese Gesellschaft treten und, nach Maassgebung seines und seiner zweyten Frauen Alters, von neuem in die Casse bezahlen, ohne dass sein voriger Beytrag hiebey in Betrachtung gezogen werden könnte.

5. Wenn aber die Frau dem Manne überlebet, so entsteht diese Frage, ob die Witwe, auch im Fall sie sich wieder verheyrathen sollte, die versprochene Pension geniessen könne? Diese Frage wird nun bey den in Hessen und Bremen errichteten Gesellschaften von dieser Art verneinet, also dass, so bald sich eine solche Witwe wiederum verheyrathet, die Pension wegfällt. Allein da sich dieser Umstand, als etwas willkührliches, nicht in die Rechnungen bringen lässt, und es auch ferner den Grundsätzen eines Staats entgegen ist, wenn durch dergleichen besondere Einrichtung neue Ehebündnisse verhindert werden sollten, so ist allerdings weit zuträglicher, dass die den Witwen zugestandenen Pensionen beständig bis an ihren Tod fortdauren, dieselben mögen sich wiederum verheyrathen oder nicht. Man kann denselben

auch sogar zugestehen, dass ihr zweyter Mann von neuem in eine solche Gesellschaft eintrete, in welchem Falle seine künftige Witwe eine doppelte Pension zu geniessen haben würde.

VORBEREITUNG ZUR AUFLÖSUNG DER VORGELEGTEN FRAGE.

Aus den jährlich herauskommenden Todtenlisten haben die Gelehrten schon lange solche Tabellen verfertiget, aus welchen der Grad der Sterblichkeit der Menschen für ein jegliches Alter bestimmt werden kann. Man nimmt nämlich an, dass zu einer Zeit hundert tausend Kinder zugleich gebohren werden, und bemerket in den Tabellen, wie viel von denselben, nach Verfliessung einer jeglichen Anzahl von Jahren, wahrscheinlicherweise noch am Leben seyn werden. Eine solche Tabelle, dergleichen man hin und wieder antrifft, muss demnach zum Grunde gelegt werden, um daraus die vorgelegte Frage zu beantworten, wobey folgende Punkte zu bemerken sind.

Um sich an keine solche Specialtabelle allzu genau zu binden, so ist es nöthig, die Sache auf eine allgemeine Art vorzustellen, und dabey uns einer besonderen Bezeichnung zu bedienen. Um also anzuzeigen, wie viel von den obgemeldeten zugleich gebohrnen hundert tausend Kindern nach Verfliessung von x Jahren noch am Leben seyn werden, so wollen wir diese Zahl durch dieses Zeichen (x) andeuten,[1] woraus denn klar ist, dass wenn $x = 0$, dieses (0) die Zahl 100 000 ausdrücke, je grösser aber x genommen wird, die Zahl (x) je länger je kleiner werde, und dass endlich, wenn $x = 100$ oder grösser als hundert, (x) gänzlich verschwinde.

Zum voraus aber ist es nöthig, eine sehr wichtige Anmerkung zu machen: wenn sich alle Ehepaare, in einem Lande oder Stadt, in eine solche Gesellschaft verpflichteten, oder dazu gezwungen würden, so würde man eine solche Sterbetabelle, die aus den allgemeinen Todtenlisten geschlossen worden, ohne Bedenken gebrauchen können, weil sich alsdenn in der Gesellschaft alle verschiedene Arten von Ehepaaren, sowohl junge als alte, sowohl starke als schwache, mit einander vermenget, befinden würden. Da

1) In der Abhandlung 335 dieses Bandes, sowie in dem Fragmente am Schlusse desselben, bedeutet (x) die Anzahl l_x der Überlebenden, nicht von $l_0 = 100000$ wie hier, sondern von $l_0 = 1000$ gleichzeitig Geborenen. In den Abhandlungen 334 und 473 unseres Bandes bedeutet dagegen dasselbe (x) so viel wie das moderne ${}_xp_0$, nämlich die Wahrscheinlichkeit für einen Neugeborenen, das Alter von x Jahren zu erreichen. L. G. D.

nun aber erstlich eine grosse Menge Eheleute von selbst ausgeschlossen werden, und hernach die Gesellschaft selbst solche Eheleute, da der Mann auf dem Todebette liegt oder die Schwindsucht offenbar am Halse hat, ausschliessen muss; über dieses aber auch solche Eheleute, da der Mann gesund und stark, die Frau aber schwach ist, nicht leicht in diese Gesellschaft treten werden: so müssen diejenigen Fälle, welche der Gesellschaft offenbar zum Schaden gereichen, wie auch diejenigen Fälle, wovon sie sich einen gewissen Vortheil versprechen könnte, gänzlich ausgeschlossen werden; folglich lässt die Rechnung sich nicht auf die allgemeinen Regeln der Sterblichkeit gründen, sondern man wird genöthiget seyn, den Männern einen grösseren Grad der Sterblichkeit, den Frauen aber einen geringeren Grad der Sterblichkeit zuzueignen; dieses wird nun geschehen, wenn man das Alter der Männer um einige Jahre höher, der Frauen aber geringer ansetzt, weil sonsten die Casse unmöglich würde bestehen können.

AUFLÖSUNG DER VORGELEGTEN FRAGE

Um diese Frage richtig aufzulösen, so wollen wir, von Anfang an, von Jahr zu Jahr fortschreiten und für eine jegliche Zeit, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, den Zustand der Casse bestimmen, um daraus endlich einen solchen Schluss zu ziehen, dass der Casse zuletzt weder ein Vortheil noch ein Schade zuwachse, sondern das Capital derselben gänzlich zernichtet werde. Die Auflösung wird demnach in folgenden Punkten enthalten seyn.

1. Ist es von der grössten Wichtigkeit, daß die Gelder in der Casse nicht still liegen, sondern auf eine solche Art genutzet werden, daß davon jährlich gewisse Zinsen mit in die Casse fliessen und dadurch das Capital vermehret werde; denn eben diese Vermehrung des Capitals enthält den stärksten Beweggrund, um die Leute in eine solche Gesellschaft zu locken, als welche sonsten viel klüger handeln würden, wenn sie ihre jährliche Beysteuer beyseite legten und, zum Besten ihrer Frauen, auf Zinsen austhäten.

2. In Bremen wird die jährliche Vermehrung des Capitals auf 4 pro Cento gerechnet, also dass ein Capital, so itzo gleich C, nach einem Jahre $=\frac{104}{100}C$ seyn wird; um aber auch hierinnen nichts zu bestimmen, so will ich den Werth des Capitals C nach einem Jahre durch λC ausdrucken; dahero weil

hier Zinse auf Zinse gerechnet werden muss, so wird nach zwey Jahren dieses Capital seyn $= \lambda\lambda C$, nach 3 Jahren $= \lambda^3 C$, nach 4 Jahren $= \lambda^4 C$ und nach x Jahren $= \lambda^x C$.

3. Dieses vorausgesetzt, werde ich nur ein einziges Ehepaar in die folgende Rechnung bringen, wovon, wie angesetzt, der Mann m Jahr, die Frau aber n Jahr alt seyn sollen. Da nun dieselben sogleich die Summe $= a$ in die Casse gelegt haben, so wird daher, nach einem Jahre, der Zustand der Casse seyn $= \lambda a$.

4. Nach Verfliessung aber eines Jahrs, sind vier Fälle zu erwegen; denn entweder ist 1. sowohl der Mann als die Frau noch am Leben, oder 2. der Mann lebt noch und die Frau ist todt, oder 3. der Mann ist todt und die Frau lebt noch, oder 4. der Mann und die Frau sind beyde todt. In dem ersten dieser Fälle erhält die Casse den Beytrag $= b$, im dritten Fall aber muss die Casse auszahlen, oder sie verliert die Summe p; die beyden übrigen Fälle aber haben auf die Casse keinen Einfluss.

5. Weil der Mann itzt m Jahr alt ist, so befindet er sich in der Zahl (m), als wodurch die Anzahl derjenigen angedeutet wird, welche von den vor m Jahren gebohrnen hundert tausend Kindern anitzo noch am Leben sind. Weil nun nach einem Jahre die Anzahl der noch lebenden seyn wird $(m+1)$, und daher die Zahl der in diesem Jahre verstorbenen $= (m) - (m+1)$, dass also nach einem Jahre der Mann noch am Leben seyn werde, ist die Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{(m+1)}{(m)};$$

dass er aber todt sey, ist dieselbe Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{(m)-(m+1)}{(m)} = 1 - \frac{(m+1)}{(m)}.$$

Gleichergestalt, dass nach einem Jahre die Frau noch lebe, ist die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{(n+1)}{(n)};$$

dass sie aber schon todt sey, ist dieselbe

$$=1-\frac{(n+1)}{(n)};$$

woraus folget, dass für den ersten Fall, da Mann und Frau noch leben, die Wahrscheinlichkeit seyn werde

$$\frac{(m+1)}{(m)}\cdot\frac{(n+1)}{(n)};$$

für den dritten Fall aber, da der Mann todt ist und die Frau lebt, wird seyn die Wahrscheinlichkeit

$$=\left(1-\frac{(m+1)}{(m)}\right)\frac{(n+1)}{(n)}.$$

6. Da nun nach einem Jahre in der Casse sich schon allbereit befindet λa und darzu, nach dem ersten Falle, noch die Summe b einfliesst, nach dem dritten Fall aber die Pension p schon ausgezahlt werden muss, so wird nach einem vollen Jahre, oder zu Anfang des zweyten Jahres, der Zustand der Casse also ausgedruckt seyn:

$$\lambda a+b\,\frac{(m+1)}{(m)}\cdot\frac{(n+1)}{(n)}-p\left(1-\frac{(m+1)}{(m)}\right)\frac{(n+1)}{(n)},$$

welcher Ausdruck auch also vorgestellt werden kann:

$$\lambda a+\frac{(n+1)}{(n)}\left(\frac{(m+1)}{(m)}(b+p)-p\right).$$

7. Um nun weiter fortzuschreiten, so ist überhaupt zu bemerken, dass nach x Jahren für das Leben des Mannes die Wahrscheinlichkeit sey

$$\frac{(m+x)}{(m)};$$

für seinen Tod aber ist dieselbe

$$1-\frac{(m+x)}{(m)};$$

und ebenso verhält es sich auch mit dem Leben oder mit dem Tode der

Frauen; dahero, dass nach Verfliessung von x Jahren noch die Summe b in die Casse fliesse, wird seyn die Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{(m+x)(n+x)}{(m)(n)};$$

dass aber alsdenn die Pension p ausgezahlt werden müsse, davon ist die Wahrscheinlichkeit

$$\left(1 - \frac{(m+x)}{(m)}\right)\frac{(n+x)}{(n)},$$

woraus für die Casse erwächst ein Zuwachs

$$= b\frac{(m+x)(n+x)}{(m)(n)} - p\frac{(n+x)}{(n)}\left(1 - \frac{(m+x)}{(m)}\right)$$
$$= \frac{(n+x)}{(n)}\left(\frac{(m+x)}{(m)}(b+p) - p\right).$$

8. Hieraus folget nun ganz leicht, dass nach Verfliessung von zwey Jahren der Zustand der Casse seyn werde:

$$\lambda\lambda a + \lambda\frac{(n+1)}{(n)}\left(\frac{(m+1)}{(m)}(b+p) - p\right)$$
$$+ \frac{(n+2)}{(n)}\left(\frac{(m+2)}{(m)}(b+p) - p\right);$$

gleichergestalt nach drey Jahren wird der Zustand der Casse seyn:

$$\lambda^3 a + \lambda\lambda\frac{(n+1)}{(n)}\left(\frac{(m+1)}{(m)}(b+p) - p\right)$$
$$+ \lambda\frac{(n+2)}{(n)}\left(\frac{(m+2)}{(m)}(b+p) - p\right)$$
$$+ \frac{(n+3)}{(n)}\left(\frac{(m+3)}{(m)}(b+p) - p\right);$$

überhaupt also nach Verfliessung von x Jahren wird der Zustand der Casse seyn:

$$
\begin{aligned}
\lambda^x a &+ \lambda^{x-1}\frac{(n+1)}{(n)}\left(\frac{(m+1)}{(m)}(b+p)-p\right)\\
&+ \lambda^{x-2}\frac{(n+2)}{(n)}\left(\frac{(m+2)}{(m)}(b+p)-p\right)\\
&+ \lambda^{x-3}\frac{(n+3)}{(n)}\left(\frac{(m+3)}{(m)}(b+p)-p\right)\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\vdots\\
&+ \lambda^{0}\frac{(n+x)}{(n)}\left(\frac{(m+x)}{(m)}(b+p)-p\right).
\end{aligned}
$$

9. Lasst uns nun x so gross nehmen, dass sowohl $(n+x)=0$ als $(m+x)=0$; und alsdenn muss, der Billigkeit gemäss, der Zustand der Casse sich auf 0 reduciren. Man theile demnach den obigen Ausdruck durch λ^x und setze dasjenige, was herauskommt, $=0$; so wird man aus dieser Gleichung den richtigen Werth für die Pension p bestimmen können, wenn nämlich die beyden Summen a und b bekannt sind. Wollte man aber die Pension p für bekannt annehmen, so würde man, aus eben der Gleichung, entweder den ersten Einsatz a oder den jährlichen Beytrag b leicht bestimmen können.

10. Man setze, um abzukürzen,

$$\frac{1}{(n)}\left(\frac{(n+1)}{\lambda}+\frac{(n+2)}{\lambda\lambda}+\frac{(n+3)}{\lambda\lambda\lambda}+\text{etc.}\right)=N$$

und

$$\frac{1}{(n)(m)}\left(\frac{(n+1)(m+1)}{\lambda}+\frac{(n+2)(m+2)}{\lambda\lambda}+\frac{(n+3)(m+3)}{\lambda^3}+\text{etc.}\right)=M.$$

Hieraus wird man folgende Gleichung erhalten

$$a+M(p+b)-Np=0,$$

woraus man erhält

$$p=\frac{a+bM}{N-M},$$

für den Fall, wenn a und b bekannt sind; wäre aber die Pension p nebst dem ersten Einsatze a gegeben, so würde man bekommen

$$b = \frac{p(N-M)-a}{M};$$

und wäre endlich die Pension p mit dem jährlichen Beytrage b bekannt, so würde man den ersten Einsatz a finden

$$= Np - M(p+b).$$

ENDE

ERINNERUNG

Herr EULER ist zu diesem Aufsatze durch die Bemühungen einer Anlegung von Witwencassen veranlasst worden, die itzo in unterschiedenen Ländern unternommen werden. Besonders hat ihm hierzu eine Schrift Gelegenheit gegeben, die zu Göttingen 1768 im VANDENHOEKISCHEN Verlage unter der Aufschrift erschienen ist *Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche itzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwencassen aufgeworfen werden.* Herr EULER hat diese Schrift für gründlich abgefasst erkannt. Sie ist von dem Rathsherrn zu Göttingen, Herrn KRITTER[1]), der über diese Sache vieles, und mit verdientem Beyfalle, gearbeitet hat. Herrn KRITTERS vorlängst verfasste Berechnungen stimmen mit demjenigen überein, was sich nach Herr EULERS Formeln berechnen lässt, wenn man die Erfahrungen von der Sterblichkeit, die SÜSSMILCH[2]) gesammlet hat, zum Grunde legt.

A. G. KÄSTNER.

---

1) JOHANN AUGUSTIN KRITTER (17 . .—17 . .?) veröffentlichte unter anderem deutsche Übersetzungen französischer Abhandlungen, die NIKOLAUS FUSS (1755—1825), EULERS treuer Mitarbeiter, verfaßt hatte. Insbesondere verdankt man ihm eine Übersetzung der Abhandlung 473 des vorliegenden Bandes (473 A des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses). L. G. D.

2) Es handelt sich vor allem um das Hauptwerk des Oberkonsistorialrats JOHANN PETER SÜSSMILCH, seit 1743 Mitglied der Akademie der Wissenschaften, *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen,* dessen VIII. Kapitel von EULER inspiriert und zum Teil verfaßt ist. Siehe p. 98, Anmerkung 1.

Bezüglich der Bedeutung der Arbeit 403 vergleiche das Vorwort des Herausgebers.

L. G. D.

SOLUTION
D'UNE QUESTION TRES DIFFICILE
DANS LE CALCUL DES PROBABILITES[1])

Commentatio 412 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [25] (1769), 1771, p. 285—302

1. C'est le plan d'une lotterie qui m'a fourni cette question, que je me propose de développer. Cette lotterie étoit de cinq classes, chacune de 10000 billets, parmi lesquels il y avoit 1000 prix dans chaque classe et par conséquent 9000 blancs. Chaque billet devoit passer par toutes les cinq classes; et cette lotterie avoit cela de particulier qu'outre les prix de chaque classe on s'engageoit de payer un ducat à chacun de ceux dont les billets auroient passé par toutes les cinq classes sans rien gagner. On voit bien que cette derniere dépense à laquelle la lotterie s'engage est très incertaine, vu qu'il seroit possible, d'un côté, que tous les prix dans chaque classe tombassent sur les mêmes numéros, et dans ce cas il y en auroit 9000 à chacun desquels il faudroit un ducat. Or, de l'autre côté, si tous les prix des cinq classes tomboient sur des numéros différens, il y auroit en tout 5000 billets gagnans, et autant de perdans, de sorte que dans ce cas ladite dépense ne monteroit qu'à 5000 ducats. L'un et l'autre de ces deux cas étant presque moralement impossible, la question est de déterminer le nombre des ducats que la lotterie sera probablement obligée de payer. Pour cet effet, il faut faire un dénombrement parfait de tous les cas possibles, pour chaque nombre de ceux qui perdront dans toutes les cinq classes, depuis le plus petit de 5000 jusqu'au plus grand de 9000.

---

1) Voir aussi les mémoires 338, 600 et 812 de ce volume. L. G. D.

2. Pour rendre cette recherche et plus générale et plus lumineuse, je poserai

1°. Le nombre des classes de la lotterie $= k$.

2°. Le nombre des prix dans chaque classe $= n$.

3°. Le nombre des billets blancs de chacune $= m$.

4°. Donc le nombre de tous les billets $= m + n$.

Chacun de ces $m + n$ billets passe par toutes les k classes, dans chacune desquelles il gagnera ou perdra; et s'il arrive qu'il ne gagne rien dans toutes les classes, alors il jouira du bénéfice mentionné d'un ducat. Il s'agit donc d'estimer, selon les regles de la probabilité, le nombre des billets qui passeront par toutes les classes sans rien gagner; et d'abord, pour connoître les limites de ce nombre, supposons que tous les prix de chaque classe tombent sur les mêmes billets; dans ce cas donc, il n'y aura que n billets qui gagnent, et tous les autres, dont le nombre est $= m$, seront dans le cas de recevoir un ducat, de sorte que cette dépense est de m ducats pour le fond de la lotterie, et c'est la plus grande possible. Or, elle sera la plus petite lorsqu'il arrivera que tous les prix de chaque classe tombent sur des billets différens; dans ce cas, le nombre de ceux qui gagnent, en quelque classe que ce soit, sera $= kn$, et partant, le nombre de ceux qui perdent

$$= m + n - kn = m - (k - 1)n.$$

Par conséquent, la dépense dans ce cas ne sera que de $m - (k - 1)n$ ducats, en supposant que le nombre m est plus grand que $(k - 1)n$; car s'il lui étoit égal, ou même plus petit, cette dépense se réduiroit à rien.

3. Voilà donc la question dont il faut chercher la solution. Il s'agit de trouver, parmi tous les cas possibles, ceux où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les k classes sera ou m ou $m - 1$ ou $m - 2$ ou $m - 3$ ou $m - 4$ etc. jusqu'à $m - (k - 1)n$. Ensuite on sait, par les regles de la probabilité, que chacun de ces nombres divisé par le nombre de tous les cas possibles exprime la probabilité que ce cas existe, laquelle sera d'autant plus grande qu'elle approche plus de l'unité; et si elle devenoit égale à l'unité, ce seroit une marque d'une entiere certitude. Cela arrive dans le cas d'une seule classe, où $k = 1$, attendu que le nombre des perdans est alors

certainement $= m$, et l'expression pour la probabilité devient alors $= 1$, ou bien elle marque une certitude entiere.

Mais, si la lotterie est composée de plusieurs classes, de sorte que $k > 1$, on aura toujours plusieurs cas à développer, selon que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est ou m ou $m-1$ ou $m-2$ ou $m-3$ etc. jusqu'à $m-(k-1)n$; et ayant trouvé la probabilité de chacun de ces cas, puisqu'il faut de toute nécessité que quelcun d'eux existe, il est évident que la somme de toutes ces probabilités ensemble est égale à l'unité ou à la mesure d'une certitude entiere. Cette propriété sert d'ailleurs à vérifier les solutions qu'on donne des questions pareilles; mais ici elle me servira à trouver la solution même du probleme proposé, et je doute fort que sans ce secours on y puisse réussir.

4. Je suppose d'abord qu'on ait déjà tiré la premiere classe et que les prix soient tombés sur les billets marqués A, B, C, D, E etc., dont le nombre est $= n$. Maintenant, en passant à la seconde classe, où il y a encore n prix, le nombre de tous les billets étant $= m + n$, je remarque que le nombre de toutes les variations possibles parmi les n billets auxquels les prix sont attachés, sans avoir égard à leur ordre, est

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n};$$

et si l'on veut aussi avoir égard à la diversité de l'ordre suivant lequel ils sortent successivement, on n'a qu'à omettre le dénominateur, et le nombre de tous les cas possibles sera

$$= (m+n)(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1).$$

Or, considérant aussi la diversité de l'ordre, le nombre de tous les cas où les prix se rencontrent avec les mêmes billets A, B, C, D etc. qui ont gagné dans la premiere classe et dont le nombre est $= n$, est exprimé ainsi

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n.$$

Donc, pour que les prix de la seconde classe tombent sur les mêmes billets que dans la premiere, la probabilité est

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)},$$

et que la même chose arrive aussi dans la troisieme, la probabilité est égale au quarré de cette expression, dans la quatrieme au cube, et ainsi de suite. Par conséquent, que dans toutes les k classes les prix tombent sur les mêmes billets, la probabilité sera

$$=\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)}\right)^{k-1}.$$

5. Je remarque sur cette expression, 1°. que le nombre de toutes les variations possibles par rapport aux billets qui se rencontrent avec les prix, dans toutes les classes ensemble, est

$$=((m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n))^{k-1},$$

en tenant aussi compte de la diversité dans l'ordre où les billets qui gagnent sortent successivement; ensuite 2°. que le nombre de tous les cas possibles que précisément les billets marqués A, B, C, D etc. se rencontrent avec les prix dans toutes les classes est

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{k-1},$$

de sorte que ce nombre divisé par celui-là exprime la probabilité que ce cas existe, comme je viens de le trouver.

Mais la remarque la plus essentielle, qui me conduira au but proposé, consiste en ce que le nombre de tous les cas possibles où, dans toutes les k classes, les prix se rencontrent avec les mêmes billets marqués A, B, C etc. dépend uniquement 1°. du nombre des prix n, ou bien de celui des billets A, B, C, D etc. qui ont gagné dans la premiere classe, et 2°. du nombre des classes k de la lotterie; de sorte que le nombre des autres billets, qui est $=m$, n'entre point du tout en considération; ou bien, quelque grand que soit le nombre de tous les billets, le nombre des cas qui font gagner les mêmes billets dans toutes les classes demeure toujours le même. Qu'on n'oublie point que je parle ici toujours de toutes les variations possibles, tant dans les billets mêmes que dans leur ordre.

6. Posons pour abréger

$$((m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n))^{k-1}=M$$

et

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{k-1}=\alpha;$$

et le nombre des cas où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit $= m$ sera

$$= \alpha;$$

et la probabilité que quelqu'un de ces cas existe sera $= \frac{\alpha}{M}$.

Maintenant, je passe au second cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 1$; et je remarque qu'outre les billets marqués A, B, C, D etc., qui ont gagné dans la premiere classe, il faut que l'un des autres, dont le nombre est $= m$, gagne aussi dans une ou plusieurs des autres classes; puisque ce bonheur peut arriver à chacun des m billets, le nombre de tous ces cas sera exprimé par

$$\beta m,$$

où β ne renferme plus le nombre m, mais dépend uniquement des combinaisons avec les autres billets qui gagnent dans les classes suivantes.

De la même maniere pour le troisieme cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 2$, il faut combiner deux billets de ceux qui ont perdu dans la premiere; qui recevant $m(m-1)$ variations, le nombre de tous ces cas aura cette forme

$$\gamma m(m-1).$$

Pour le quatrieme cas, où le nombre des perdans par toutes les classes est $= m - 3$, le nombre de tous les cas possibles sera

$$= \delta m(m-1)(m-2);$$

et ainsi de suite pour les cas suivans, où le nombre des perdans dans toutes les classes est ou $m - 4$ ou $m - 5$ ou $m - 6$ etc. jusqu'à $m - (k-1)n$.

7. Pour voir d'un coup d'oeil toutes ces suppositions, je les représenterai de cette façon:

Nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes	Nombre de tous les cas où cela arrive	Probabilité que quelcun de ces cas existe
m	α	$\frac{\alpha}{M}$
$m-1$	βm	$\frac{\beta m}{M}$
$m-2$	$\gamma m(m-1)$	$\frac{\gamma m(m-1)}{M}$
$m-3$	$\delta m(m-1)(m-2)$	$\frac{\delta m(m-1)(m-2)}{M}$
$m-4$	$\varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3)$	$\frac{\varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3)}{M}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-(k-1)n$	$\omega m(m-1)\cdots(m-kn+n+1)$	$\frac{\omega m(m-1)\cdots(m-kn+n+1)}{M}$

où, pour abréger, j'ai posé

$$M = \big((m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)\big)^{k-1}.$$

Ayant déjà trouvé la premiere valeur

$$\alpha = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{k-1},$$

tout revient à chercher les valeurs des lettres suivantes β, γ, δ, ε etc., ce qui se pourroit faire suivant les principes de la combinaison et variation; mais cela demanderoit des recherches fort épineuses et ennuyantes, qu'on auroit même bien de la peine à pousser si loin qu'on en pût découvrir la loi de la progression; encore une telle loi conclue uniquement par induction seroit fort sujette à caution.

8. Mais la considération que toutes ces probabilités ensemble doivent être égales à l'unité nous fournit une route fort aisée pour déterminer toutes

ces quantités α, β, γ, δ etc. Nous n'avons qu'à satisfaire à cette équation:

$$M = \alpha + \beta m + \gamma m(m-1) + \delta m(m-1)(m-2) + \varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3) + \text{etc.},$$

en observant que les quantités α, β, γ, δ, ε etc. ne dépendent point du nombre m, mais qu'elles sont uniquement déterminées par les deux autres, n et k.

Voici de quelle maniere on doit conduire le raisonnement pour arriver à ce but. Puisque cette équation doit toujours avoir lieu, quelque valeur qu'on donne au nombre m, posons d'abord $m = 0$; et nous aurons

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^{k-1} = \alpha,$$

d'où nous tirons la même valeur pour α que je lui ai assignée auparavant. Posons ensuite pour m successivement les nombres 1, 2, 3, 4 etc., pour avoir ces équations

$$(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1))^{k-1} = \alpha + \beta,$$

$$(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+2))^{k-1} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$

$$(4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3))^{k-1} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta,$$

$$(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n+4))^{k-1} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,$$

$$(6 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (n+5))^{k-1} = \alpha + 5\beta + 20\gamma + 60\delta + 120\varepsilon + 120\zeta$$

etc.,

d'où l'on tirera sans difficulté successivement les valeurs de toutes les lettres β, γ, δ, ε, ζ etc. jusqu'à la derniere ω, qu'on trouvera aisément être $= 1$, puisque le nombre des cas où tous les prix tombent sur des billets différens est

$$m(m-1)(m-2)(m-3) \cdots (m-(k-1)n+1).$$

9. Soit, pour abréger, la valeur de M, en y posant en général $m = \lambda$, indiquée de cette sorte

$$M^{(\lambda)};$$

et nous aurons

$$M^{(0)} = \alpha,$$
$$M^{(1)} = \alpha + \beta,$$
$$M^{(2)} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon$$
$$\text{etc.},$$

d'où, prenant les différences,

$$M^{(1)} - M^{(0)} = \beta,$$
$$M^{(2)} - M^{(1)} = \beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - M^{(2)} = \beta + 4\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - M^{(3)} = \beta + 6\gamma + 18\delta + 24\varepsilon$$
$$\text{etc.};$$

et les secondes différences seront

$$M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)} = 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - 2M^{(2)} + M^{(1)} = 2\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 2M^{(3)} + M^{(2)} = 2\gamma + 12\delta + 24\varepsilon$$
$$\text{etc.};$$

de plus, les troisiemes différences

$$M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)} = 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 3M^{(3)} + 3M^{(2)} - M^{(1)} = 6\delta + 24\varepsilon$$
$$\text{etc.};$$

et les quatriemes

$$M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} - 4M^{(1)} + M^{(0)} = 24\varepsilon$$
$$\text{etc.}$$

Sur la continuation de ces différences, il ne sauroit y avoir aucun doute.

10. Toutes ces valeurs $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ etc., dérivées de

$$M = \big((m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)\big)^{k-1},$$

étant connues et indépendantes du nombre m, les quantités α, β, γ, δ etc., qui renferment la solution de notre question, seront déterminées ainsi:

$$\alpha = M^{(0)},$$

$$\beta = \frac{M^{(1)} - M^{(0)}}{1},$$

$$\gamma = \frac{M^{(2)} - 2\,M^{(1)} + M^{(0)}}{1\cdot 2},$$

$$\delta = \frac{M^{(3)} - 3\,M^{(2)} + 3\,M^{(1)} - M^{(0)}}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\varepsilon = \frac{M^{(4)} - 4\,M^{(3)} + 6\,M^{(2)} - 4\,M^{(1)} + M^{(0)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

etc.

Or, parmi ces diverses valeurs dérivées de M, nous connoissons les rapports suivans

$$M^{(1)} = \left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} M^{(0)},$$

$$M^{(2)} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} M^{(1)},$$

$$M^{(3)} = \left(\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} M^{(2)},$$

$$M^{(4)} = \left(\frac{n+4}{4}\right)^{k-1} M^{(3)}$$

etc.,

la premiere étant

$$M^{(0)} = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{k-1}.$$

D'où, par cette seule valeur $M^{(0)}$, nous aurons

$$\beta = \frac{\alpha}{1}\left(\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{1\cdot 2}\left(\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

$$\delta = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} + 3\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdot\frac{n+4}{4}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\right)^{k-1}\\ + 6\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\end{array}\right\}$$

etc.,

dont la progression est également évidente.

11. Pour mieux voir la nature de ces nombres α, β, γ, δ etc., développons quelques cas particuliers; et supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul prix dans chaque classe, de sorte que $n = 1$, le nombre des classes demeurant $= k$. Soit $k = \pi + 1$, pour avoir $k - 1 = \pi$. Le nombre de tous les billets dans chaque classe sera donc $= m + 1$ et $M = (m+1)^\pi$, et partant

$$M^{(0)} = 1, \quad M^{(1)} = 2^\pi, \quad M^{(2)} = 3^\pi, \quad M^{(3)} = 4^\pi, \quad M^{(4)} = 5^\pi \quad \text{etc.},$$

d'où nous tirons les valeurs suivantes:

	si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$	si $\pi = 4$	si $\pi = 5$
$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
$\beta = \frac{2^\pi - 1}{1}$	$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 7$	$\beta = 15$	$\beta = 31$
$\gamma = \frac{3^\pi - 2\cdot 2^\pi + 1}{1\cdot 2}$	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 6$	$\gamma = 25$	$\gamma = 90$
$\delta = \frac{4^\pi - 3\cdot 3^\pi + 3\cdot 2^\pi - 1}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 65$
$\varepsilon = \frac{5^\pi - 4\cdot 4^\pi + 6\cdot 3^\pi - 4\cdot 2^\pi + 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 15$
etc.	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 1$

12. Soit maintenant le nombre des prix de chaque classe $n=2$, les deux autres nombres m et $k=\pi+1$ demeurant indéterminés. Donc, puisque

$$M=(m+1)^{\pi}(m+2)^{\pi},$$

nous aurons

$$M^{(0)}=2^{\pi},\quad M^{(1)}=6^{\pi},\quad M^{(2)}=12^{\pi},\quad M^{(3)}=20^{\pi}\quad \text{etc.},$$

et partant:

	si $\pi=1$	si $\pi=2$	si $\pi=3$
$\alpha=2^{\pi}$	$\alpha=2$	$\alpha=4$	$\alpha=8$
$\beta=\frac{6^{\pi}-2^{\pi}}{1}$	$\beta=4$	$\beta=32$	$\beta=208$
$\gamma=\frac{12^{\pi}-2\cdot 6^{\pi}+2^{\pi}}{1\cdot 2}$	$\gamma=1$	$\gamma=38$	$\gamma=652$
$\delta=\frac{20^{\pi}-3\cdot 12^{\pi}+3\cdot 6^{\pi}-2^{\pi}}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\delta=0$	$\delta=12$	$\delta=576$
etc.	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=1$	$\varepsilon=188$
	$\zeta=0$	$\zeta=0$	$\zeta=24$
	$\eta=0$	$\eta=0$	$\eta=1$

13. Il seroit inutile de développer plusieurs cas, puisque la détermination des nombres α, β, γ, δ etc. demanderoit des calculs trop embarrassans, qui même, au bout du compte, ne nous fourniroient aucun éclaircissement sur la question dont il s'agit. D'où l'on comprend que, si l'on vouloit appliquer ces formules à l'exemple de la lotterie rapportée au commencement, en supposant

$$n=1000,\quad m=9000\quad \text{et}\quad k=5,$$

d'où résulteroit le nombre

$$M=(9001\cdot 9002\cdot 9003\cdots 10000)^{4},$$

et ceux qui en sont dérivés

$$M^{(0)} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \;\cdots\; 1000)^4,$$

$$M^{(1)} = (2 \cdot 3 \cdot 4 \;\cdots\; 1001)^4,$$

$$M^{(2)} = (3 \cdot 4 \cdot 5 \;\cdots\; 1002)^4,$$

$$M^{(3)} = (4 \cdot 5 \cdot 6 \;\cdots\; 1003)^4$$

etc.,

on seroit obligé de s'enfoncer dans de terribles calculs avant que de parvenir à la connoissance des nombres α, β, γ, δ etc., dont la multitude monte à 4001. Ensuite, il faudroit encore multiplier chacun de ces nombres par les coëfficiens assignés au § 7, pour avoir les nombres de tous les cas où chaque variété peut arriver. Et enfin, ayant trouvé tous ces nombres, il resteroit à diviser chacun par le nombre M, pour avoir la probabilité que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit ou 9000 ou 8999 ou 8998, jusqu'à ce qu'on parvienne à 5000.

14. Il est bien certain que personne n'entreprendra jamais cet immense ouvrage, dans la seule vue de répondre aux entrepreneurs de la lotterie mentionnée, à combien ils doivent probablement estimer la dépense à laquelle ils s'engagent en promettant un ducat à chacun de ceux qui n'auront rien gagné dans toutes les 5 classes. Donc, s'il n'y avoit point d'autre moyen de satisfaire à cette question, on seroit bien obligé d'en regarder la solution comme moralement impossible, et il n'y auroit d'autre parti à prendre que de conseiller aux entrepreneurs d'une pareille lotterie de s'en tenir à quelque nombre mitoyen entre la plus grande somme de 9000 ducats et la plus petite de 5000 ducats, qui constituent les limites de cette dépense. Au reste, s'il ne s'agissoit que de tirer une seule fois cette lotterie, il ne vaudroit pas même la peine de se livrer à ce travail, quand même il ne seroit pas si difficile, puisqu'un seul coup ne se regle jamais sur la probabilité. Mais si l'on vouloit répéter plusieurs fois de suite cette même lotterie, la question deviendroit plus importante, puisqu'alors la dite dépense seroit tantôt plus grande, tantôt plus petite; et ce n'est que dans ce cas qu'on pourroit être assuré que le milieu entre toutes ces dépenses approchera d'autant plus de la somme déter-

minée par les regles de la probabilité, qu'on répétera plus de fois le tirage de cette même lotterie. C'est donc cette somme moyenne que les regles de la probabilité nous doivent découvrir.

15. Or, quelque insurmontables que paroissent les calculs pour trouver cette somme, il se rencontre une certaine circonstance heureuse qui rend extrêmement facile l'exécution de tous ces calculs, de sorte qu'on n'a pas même besoin de calculer les valeurs des nombres α, β, γ, δ etc. On n'a qu'à s'en tenir aux formules générales données dans le § 7; et puisque pour chaque nombre de ducats auquel la dépense peut monter, la probabilité est comme il suit:

que la dépense soit de tant de ducats	la probabilité est
m	$\frac{\alpha}{M}$
$m-1$	$\frac{\beta m}{M}$
$m-2$	$\frac{\gamma m(m-1)}{M}$
$m-3$	$\frac{\delta m(m-1)(m-2)}{M}$
$\vdots$	$\vdots$
$m-(k-1)n$	$\frac{\omega m(m-1)(m-2)\cdots(m-(k-1)n+1)}{M}$,

la somme de chaque dépense multipliée par la probabilité donnera la vraie dépense moyenne que nous cherchons, qui sera par conséquent

$$=\frac{\alpha m+\beta m(m-1)+\gamma m(m-1)(m-2)\cdots+\omega m(m-1)\cdots(m-(k-1)n)}{M},$$

et je remarque que la valeur de cette expression peut être assignée sans qu'on ait besoin de développer ni les nombres α, β, γ, δ etc. ni même le dénominateur M; ce qui est sans doute un événement auquel on ne pouvoit pas s'attendre.

16. Ayant fait voir ci-dessus que les nombres α, β, γ, δ etc. ne dépendent pas du nombre m et qu'ils doivent être tels qu'il soit

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta m+\gamma m(m-1)+\delta m(m-1)(m-2)+\cdots\\&\quad+\omega m(m-1)(m-2)\cdots(m-(k-1)n+1)\\&\quad=M=((m+1)(m+2)\cdots(m+n))^{k-1},\end{aligned}$$

il s'ensuit d'abord qu'écrivant $m-1$ au lieu de m, il faut qu'il soit

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta(m-1)+\gamma(m-1)(m-2)+\cdots+\omega(m-1)(m-2)\cdots(m-(k-1)n)\\&\quad=(m(m+1)(m+2)\cdots+(m+n-1))^{k-1},\end{aligned}$$

les nombres α, β, γ, δ etc. étant les mêmes qu'auparavant. Mais cette derniere expression

$$\alpha+\beta(m-1)+\gamma(m-1)(m-2)+\text{etc.},$$

étant multipliée par m, donne précisément le numérateur de la fraction que nous venons d'assigner pour la quantité probable de la dépense; d'où nous concluons cette dépense

$$=\frac{m(m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1))^{k-1}}{((m+1)(m+2)\cdots(m+n))^{k-1}},$$

qui se réduit évidemment à celle-ci

$$=m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1},$$

dont l'application se fera aisément à chaque cas proposé, sans qu'on ait besoin de calculer ni les valeurs des lettres α, β, γ, δ etc. ni le nombre M.

Voilà donc, contre toute attente, une solution aussi simple que belle de notre question, par laquelle nous connoissons qu'en général, le nombre des classes étant $=k$, le nombre des prix de chaque classe $=n$ et le nombre de tous les billets $=m+n$, la dépense en question doit être estimée

$$=m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}.$$

17. Pour le cas de la lotterie décrite au commencement, où $k=5$, $n=1000$ et $m=9000$, la dépense en faveur de ceux qui ne gagnent rien dans toutes les cinq classes doit être estimée à $9000\left(\frac{9}{10}\right)^4$ ducats, ce qui fait $5904\frac{9}{10}$ ducats,

d'où l'on voit que ce milieu est beaucoup plus proche de la plus petite limite 5000 que de la plus grande 9000.

Soit, pour donner un autre exemple, le nombre des classes encore $k=5$, le nombre des prix de chaque classe $n=8000$ et celui de tous les billets $m+n=50\,000$; donc $m=42\,000$; et quand on s'engage de payer aussi un ducat à chacun de ceux qui passent par les cinq classes sans rien gagner, cette dépense doit être estimée, selon les regles de la probabilité, à $42000\left(\frac{42}{50}\right)^4$, c'est à dire à $20910\frac{6}{10}$ ducats.

18. En géneral, je remarque sur l'estime de cette dépense que je viens de trouver $=m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$ que, quand il n'y aura qu'une seule classe, elle sera

$$=m,$$

auquel cas la probabilité devient une entiere certitude.

Mais si la lotterie est composée de 2 classes, cette dépense est

$$=\frac{mm}{m+n};$$

pour trois classes elle devient

$$=\frac{m^3}{(m+n)^2},$$

pour quatre

$$=\frac{m^4}{(m+n)^2},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'elle décroît en raison de $m+n$ à m pour chaque classe de plus. Donc, si le nombre des classes étoit infini, cette dépense se réduiroit à rien, quelque petit que soit le nombre des prix par rapport à tous les billets.

Comme cette simple formule vient d'être conclue d'un calcul extrêmement embarrassé, il n'y a aucun doute qu'il n'y ait une autre méthode, fort simple, qui y conduise directement sans aucun détour. En effet, la seule considération de cette formule nous fournit d'abord les raisonnemens qu'il faut faire pour y parvenir, que je vais mettre dans tout leur jour.

19. On n'a qu'à parcourir successivement toutes les classes, en réfléchissant que chaque classe contient en tout $m+n$ billets, parmi lesquels il y a

n gains et m pertes. Donc, la premiere classe étant tirée, il y aura certainement m billets qui auront perdu; ceux-ci entrant dans la seconde classe, il est probable qu'il y en aura quelques uns qui gagnent, et cela dans le rapport du nombre de tous les billets $m+n$ au nombre des prix n; donc, de ces m billets qui ont perdu dans la premiere classe, il y aura probablement $m\cdot\frac{n}{m+n}$ qui gagneront dans la seconde classe; et partant, le nombre de ceux qui passent par les deux premieres classes sans rien gagner doit être estimé

$$= m\cdot\frac{m}{m+n}.$$

Maintenant, ces billets entrent dans la troisieme classe; et, par la même raison, leur nombre entier sera à celui des billets qui perdront aussi dans cette classe comme $m+n$ à m; par conséquent, le nombre des billets qui passeront par les trois premieres classes sans rien gagner sera probablement

$$= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^2.$$

Par ce même raisonnement, on trouve que le nombre des billets qui passeront probablement par quatre classes sans rien gagner sera

$$= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^3;$$

et en général, si le nombre des classes est $=k$, le nombre des billets qui passeront par toutes ces classes sans rien gagner doit être fixé, selon les regles de la probabilité, à

$$m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1};$$

et si l'on s'engage de payer à chacun un ducat, cette dépense doit être estimée à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$ ducats, ce qui est précisément la somme que j'ai trouvée auparavant.

20. Si cette route est préférable à la premiere à cause de sa simplicité, la premiere a d'autres avantages très considérables, en nous découvrant en détail la probabilité que la dépense égale précisément une somme donnée.

Car, comme il n'est pas même probable que la dépense actuelle soit la même que montre la probabilité, il est très important que le dénombrement de tous les cas possibles nous soit bien connu, pour nous mettre en état de juger de la probabilité de chacun. Mais la derniere méthode a pourtant cet avantage sur la premiere, qu'elle peut être appliquée à des cas où toutes les classes de la lotterie ne contiennent pas le même nombre de prix; laquelle circonstance rendroit presque impossible la premiere méthode. Cependant, il faut toujours supposer que le nombre de tous les billets soit le même dans toutes les classes, puisque, sans cette condition, la question dont il s'agit ne sauroit avoir lieu.

Soit donc l le nombre de tous les billets de chaque classe, et posons le nombre de ceux qui perdent: dans la premiere classe $= m$, dans la seconde $= m'$, dans la troisieme $= m''$, dans la quatrieme $= m'''$, et ainsi de suite. Cela posé, le nombre des billets qui perdront dans toutes les classes sera probablement

$$m \cdot \frac{m'}{l} \cdot \frac{m''}{l} \cdot \frac{m'''}{l} \cdot \frac{m^{\mathrm{IV}}}{l} \cdot \frac{m^{\mathrm{V}}}{l} \cdot \text{etc.},$$

jusqu'à ce qu'on ait parcouru toutes les classes. D'où l'on voit que s'il y avoit une seule classe où tous les billets gagnassent, quelqu'un des nombres m, m', m'', m''' etc. évanouiroit et le nombre trouvé se réduiroit à zéro, ce qui ne seroit plus la mesure de la probabilité, mais une certitude complette.

21. Pour en donner un exemple, supposons qu'il y ait une lotterie composée de 5 classes, chacune renfermant 10000 billets, et dont la premiere contienne 1000 prix, la seconde 2000, la troisieme 3000, la quatrieme 4000 et la cinquieme 5000. Nous aurons donc $l = 10\,000$; et les nombres des billets qui perdent dans chaque classe seront

$$m = 9000,\ m' = 8000,\ m'' = 7000,\ m''' = 6000,\ m^{\mathrm{IV}} = 5000.$$

Et partant, le nombre des billets qui passeront par toutes les 5 classes sans rien gagner sera, conformément aux regles de la probabilité,

$$= 10\,000 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = 1512\text{[1]},$$

1) L'édition originale porte, par erreur, $= 9000 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = 1512$. L. G. D.

ou bien, on peut estimer qu'il n'y aura que 1512 billets qui perdront dans toutes les 5 classes; donc, il est probable que de tous les 10000 billets il y en aura 8488 qui tireront quelque prix dans une ou plusieurs classes. Par conséquent, pour ceux qui s'intéresseroient dans cette lotterie, on peut dire que la probabilité est $\frac{8488}{10000}$ ou $\frac{1061}{1250}$, qu'ils ne passeront point par toutes les 5 classes sans rien gagner.

ÉCLAIRCISSEMENS
SUR LES
ÉTABLISSEMENS PUBLICS
EN FAVEUR TANT DES VEUVES QUE DES MORTS

AVEC

LA DÉSCRIPTION D'UNE NOUVELLE ESPECE DE TONTINE

AUSSI FAVORABLE AU PUBLIC QU'UTILE À L'ÉTAT

CALCULÉS SOUS LA DIRECTION DE

MONSIEUR LÉONARD EULER.

PAR

Mr. NICOLAS FUSS.
ADJOINT DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES.

A St. PETERSBOURG,
De l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.

Commentatio 473 indicis Enestroemiani
1776

D'UN ETABLISSEMENT PUBLIC POUR PAYER DES PENSIONS A DES VEUVES FONDE SUR LES PRINCIPES LES PLUS SOLIDES DE LA PROBABILITE[1]

1. D'abord, un tel établissement doit être en état de faire bien valoir les fonds qui lui seront confiés. Donc, pour rendre mes recherches générales, je supposerai qu'un capital de 100 Roubles puisse être augmenté tous les ans de c Roubles, de sorte que chaque centaine de Roubles s'accroisse après un an à $100 + c$ Roubles. De là, un capital quelconque qui est à présent $= C$ deviendra au bout d'un an

$$= \left(\frac{100 + c}{100}\right) C,$$

au bout de deux ans

$$= \left(\frac{100 + c}{100}\right)^2 C,$$

au bout de trois ans

$$= \left(\frac{100 + c}{100}\right)^3 C,$$

et en général au bout de n ans

$$= \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n C.$$

Or, pour abréger, je mettrai

$$\frac{100 + c}{100} = k;$$

1) Voir les mémoires 334, 335, 403 et 599 de ce volume. Voir aussi, sur les tontines, le fragment qui le termine ainsi que la préface de l'éditeur. L. G. D.

de sorte qu'un capital qui est à présent $= C$ croîtra après n ans à la somme de $k^n C$. D'où il s'ensuit réciproquement qu'une somme quelconque S, payable après n ans, doit être estimée à présent à la valeur de $\frac{S}{k^n}$. Par ce moyen, on sera en état de réduire la juste valeur de toutes les sommes que l'établissement recevra, ou qu'il sera obligé de payer après un certain nombre d'années, au temps présent. De cette manière, on pourra fixer le vrai prix présent de toutes les recettes et dépenses que l'établissement aura à faire dans la suite, et de là on pourra juger aisément de l'égalité ou inégalité entre la recette et la dépense, d'où l'on connoîtra si l'établissement, après que tout sera fini, aura gagné ou perdu. Donc, pour qu'un tel établissement soit conforme aux règles de la plus juste équité, il faut ajuster la recette et la dépense en sorte qu'il s'y trouve à la fin une parfaite égalité. Cependant, on comprend aisément qu'une telle égalité ne doit pas être observée à la rigueur, mais qu'elle doit tourner à l'avantage de l'établissement, pour qu'on soit en état de subvenir aux fraix que son administration exige.

2. Maintenant, concevons un mari qui voudroit acquérir à sa femme après sa mort une certaine pension annuelle, que nous mettrons égale à p; et il s'agit de déterminer le prix que cet homme doit payer à l'établissement, ou à la fois ou successivement tous les ans tant qu'il sera en vie. Or ici, il est d'abord clair que la détermination de ce prix dépend non seulement de l'age du mari, mais aussi principalement de celui de sa femme.

Posons donc que le mari soit agé de a ans et la femme de b ans; ensuite, soit x la somme qu'il paye d'abord à l'établissement et que, dans la suite, il y fournisse encore tous les ans la somme $= z$, tant qu'il sera en vie. J'introduis ici d'abord ce double payement, à fin qu'on puisse ensuite supposer à volonté ou $z = 0$, en cas qu'il paye tout le prix à la fois, qui sera $= x$, ou bien qu'on puisse faire $x = 0$, ou plutôt $x = z$, en cas que le payement se fasse successivement pendant toute la vie du mari. Tout revient donc à régler tellement les sommes x et z qu'elles se trouvent dans une parfaite égalité avec la pension p dont sa veuve après sa mort peut espérer de jouir, non obstant tous les cas fortuits qui peuvent occasionner la mort ou du mari ou de sa femme.

3. Pour tenir compte de tous ces cas fortuits où il seroit impossible de déterminer quelque chose, concevons qu'il se présente à la fois un grand

nombre de tels maris qui soyent tous agés de a ans et que toutes leurs femmes ayent aussi le même age $= b$; et il faudra régler les quantités x et z en sorte que toutes les sommes que l'établissement tirera de tous ces gens ensemble, ou à la fois ou successivement, étant réduites au temps présent, soyent précisement égales à la somme de toutes les pensions que les veuves auront tirées jusques à leur mort, après les avoir pareillement réduites au temps présent.

4. Pour déterminer cette égalité selon les règles de la probabilité, il faut recourir aux principes de la mortalité, qui ont été tirés d'un grand nombre d'observations. Pour cet effet, considérons un grand nombre $= N$ d'enfans qui soyent tous nés en même temps; et pour donner à nos recherches la plus grande généralité, posons le nombre de ces enfans qui seront encore en vie après un an, $= (1)\,N$; le nombre de ceux qui seront encore en vie après deux ans, $= (2)\,N$; de la même manière, le nombre de ceux qui seront encore en vie après trois ans, $= (3)\,N$; après 4 ans, $= (4)\,N$ etc., et en général après n ans, $= (n)\,N$. Cela posé, il est clair que les caractères

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4)\ \text{etc.}$$

marquent de certaines fractions successivement décroissantes, en sorte qu'après 100 ans elles évanouissent presque entièrement. De là il est clair que, pour l'age des maris, que nous supposons $= a$, si N marque le nombre de tous les enfans qui ont été mis au monde avec eux en même temps, le nombre de ceux qui vivront encore sera $(a)\,N$, et qu'au bout d'un an le nombre qui en vivront encore sera $(a+1)\,N$, et en géneral le nombre de ceux qui en seront en vie après n ans sera

$$(a+n)\,N.$$

Ces mêmes formules auront aussi lieu pour les femmes, en écrivant la lettre b au lieu de a.

5. Or, en consultant les régîtres de mortalité qui ont été dressés tant en France qu'en Hollande pour le calcul des rentes viagères, nous pourrons supposer à nos fractions (1), (2), (3) etc. les valeurs suivantes:

(1) = 0,804	(25) = 0,552	(49) = 0,370	(73) = 0,145
(2) = 0,768	(26) = 0,544	(50) = 0,362	(74) = 0,135
(3) = 0,736	(27) = 0,535	(51) = 0,354	(75) = 0,125
(4) = 0,709	(28) = 0,525	(52) = 0,345	(76) = 0,114
(5) = 0,688	(29) = 0,516	(53) = 0,336	(77) = 0,104
(6) = 0,676	(30) = 0,507	(54) = 0,327	(78) = 0,093
(7) = 0,664	(31) = 0,499	(55) = 0,319	(79) = 0,082
(8) = 0,653	(32) = 0,490	(56) = 0,310	(80) = 0,072
(9) = 0,646	(33) = 0,482	(57) = 0,301	(81) = 0,063
(10) = 0,639	(34) = 0,475	(58) = 0,291	(82) = 0,054
(11) = 0,633	(35) = 0,468	(59) = 0,282	(83) = 0,046
(12) = 0,627	(36) = 0,461	(60) = 0,273	(84) = 0,039
(13) = 0,621	(37) = 0,454	(61) = 0,264	(85) = 0,032
(14) = 0,616	(38) = 0,446	(62) = 0,254	(86) = 0,026
(15) = 0,611	(39) = 0,439	(63) = 0,245	(87) = 0,020
(16) = 0,606	(40) = 0,432	(64) = 0,235	(88) = 0,015
(17) = 0,601	(41) = 0,426	(65) = 0,225	(89) = 0,011
(18) = 0,596	(42) = 0,420	(66) = 0,215	(90) = 0,008
(19) = 0,590	(43) = 0,413	(67) = 0,205	(91) = 0,006
(20) = 0,584	(44) = 0,406	(68) = 0,195	(92) = 0,004
(21) = 0,577	(45) = 0,400	(69) = 0,185	(93) = 0,003
(22) = 0,571	(46) = 0,393	(70) = 0,175	(94) = 0,002
(23) = 0,565	(47) = 0,386	(71) = 0,165	(95) = 0,001
(24) = 0,559	(48) = 0,378	(72) = 0,155	

Cette table est tirée des Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1760,[1]) où l'on trouve exposés en général tous les principes d'où il faut résoudre toutes les questions qui peuvent être proposées sur cette matière. Or, il faut bien remarquer que cette table pourroit bien exiger des changemens assés considérables par rapport à la diversité des païs et de la manière de vivre.

1) Il s'agit du mémoire 334 de ce volume; la table s'y trouve p. 87. Voir aussi la note 1 p. 86. L. G. D.

6. Soit à présent M le nombre de tous les maris, agés de a ans, qui se présentent à la fois pour procurer à leurs femmes après leur mort une pension annuelle $=p$; et pour trouver combien de ces maris seront encore en vie au bout d'un an, on n'a qu'à faire cette proportion

$$(a)\,N:(a+1)\,N = M : \frac{(a+1)}{(a)}\,M.$$

De la même manière, après deux ans, il y [en] aura encore en vie $\frac{(a+2)}{(a)}M$; après trois ans $\frac{(a+3)}{(a)}M$; et en général après n ans, le nombre de ceux qui seront encore en vie sera

$$\frac{(a+n)}{(a)}\,M.$$

D'où l'on pourra aisément conclure le nombre de ceux qui seront morts pendant le courant de chaque année. Il en est de même de leurs femmes, auxquelles nous supposons le même age $=b$, dont le nombre étant à présent pareillement $=M$, le nombre de celles qui seront encore en vie après un an sera $=\frac{(b+1)}{b}M$, après deux ans $\frac{(b+2)}{(b)}M$, et en général après n ans

$$\frac{(b+n)}{(b)}\,M.$$

7. Passons à présent successivement d'une année à l'autre et voyons combien d'argent l'établissement recevra chaque année et combien il sera obligé de débourser, en réduisant tant la recette que la dépense au temps présent, selon les règles rapportées cy-dessus. Et d'abord, puisque chaque mari paye au commencement x, la somme que l'établissement recevra sera $=Mx$; et c'est le seul article qui entrera ici en compte, puisque, dans la première année, il n'y aura pas encore de pensions à payer. Car, quoique quelques-uns de ces maris puissent mourir pendant le courant de la première année, nous supposerons toujours que le payement de la pension ne commencera qu'avec l'année prochaine.

8. Passons à présent à l'année suivante, où le nombre des maris encore vivans sera $\frac{(a+1)}{(a)}M$ et partant celui de ceux qui seront morts

$$=\frac{(a)-(a+1)}{(a)}\,M.$$

De la même manière, le nombre des femmes qui seront encore en vie sera

$$=\frac{(b+1)}{(b)}M$$

et partant, il en sera mort

$$\frac{(b)-(b+1)}{(b)}M.$$

Ici, il y aura donc quatre cas à considérer.

Le premier est de ces maris dont les femmes seront encore en vie; et leur nombre sera

$$\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}M.$$

Car, puisque le nombre de tous les maris vivans est $\frac{(a+1)}{(a)}M$ et que le nombre de toutes les femmes est à celui de celles qui sont vivantes encore $=1:\frac{(b+1)}{(b)}$, il est clair que le nombre des maris dont les femmes vivent doit être

$$=\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}M.$$

Or, chacun de ces maris paye à l'établissement la somme $=z$ qui, étant réduite au commencement, devient $\frac{z}{k}$, et partant, la caisse recevra la somme

$$\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}M\cdot\frac{z}{k}.$$

Le second cas comprend les maris qui auront perdu leurs femmes, dont le nombre sera

$$\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b)-(b+1)}{(b)}M.$$

Or, de ce cas, la caisse ne souffre aucune altération, de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'en tenir compte.

Le troisième cas regarde les femmes qui auront perdu leurs maris; et puisque le nombre de toutes les femmes qui seront encore en vie est $\frac{(b+1)}{(b)}M$, le nombre de celles qui auront perdu leurs maris sera

$$\frac{(b+1)}{(b)}\cdot\frac{(a)-(a+1)}{(a)}M.$$

Donc, puisque la caisse doit payer à chacune de ces femmes la pension annuelle $=p$, qui vaut à présent $=\frac{p}{k}$, cette dépense sera

$$=\frac{(b+1)}{(b)}\cdot\frac{(a)-(a+1)}{(a)}M\cdot\frac{p}{k}.$$

Le quatrième cas, où tant le mari que la femme seroient morts pendant la première année, ne vient pas ici en considération, vu qu'il ne produit ni de recette ni de dépense.

9. Venons à présent à la troisième année, où le nombre des maris encore vivans est $\frac{(a+2)}{(a)}M$ et des femmes vivantes $=\frac{(b+2)}{(b)}M$; d'où le nombre des maris dont les femmes vivent encore est

$$\frac{(a+2)}{(a)}\cdot\frac{(b+2)}{(b)}M.$$

Donc, puisque chacun paye à l'établissement la somme z, qui vaut à présent $\frac{z}{kk}$, cette recette sera

$$=\frac{(a+2)}{(a)}\cdot\frac{(b+2)}{(b)}M\cdot\frac{z}{kk}.$$

Considérons les femmes qui n'auront plus de maris, dont le nombre sera

$$=\frac{(b+2)}{(b)}\cdot\frac{(a)-(a+2)}{(a)}M;$$

et puisque chacune reçoit la pension $=p$, qui vaut à présent $\frac{p}{kk}$, la dépense de l'établissement pendant cette année sera

$$\frac{(b+2)}{(b)}\cdot\frac{(a)-(a+2)}{(a)}M\cdot\frac{p}{kk}.$$

Les deux autres cas, où les maris auroient perdu leurs femmes ou qu'ils seroient morts tous les deux, n'entrent ici en aucune considération.

10. De la même manière, en considérant la quatrième année, on verra aisément que la recette de la caisse doit être fixée à

$$\frac{(a+3)}{(a)}\cdot\frac{(b+3)}{(b)}M\cdot\frac{z}{k^3};$$

or, la dépense à faire vaudra à présent

$$\frac{(b+3)}{(b)} \cdot \frac{(a)-(a+3)}{(a)} M \cdot \frac{p}{k^3}.$$

Et pareillement, l'année cinquième fournira à la caisse une somme dont la valeur est à présent

$$= \frac{(a+4)}{(a)} \cdot \frac{(b+4)}{(b)} M \cdot \frac{z}{k^4},$$

la dépense réduite au même temps étant de

$$\frac{(b+4)}{(b)} \cdot \frac{(a)-(a+4)}{(a)} M \cdot \frac{p}{k^4}.$$

Et ainsi de suite, jusqu'à ce que les charactères $(a+n)$ et $(b+n)$ évanouissent entièrement.

11. Comme la recette de l'établissement renferme deux parties dont la première est la somme payée dès le commencement, qui est $= Mx$, posons toutes les sommes qui composent l'autre partie $= MZ$, de sorte que

$$Z = \frac{(a+1)}{(a)} \cdot \frac{(b+1)}{(b)} \cdot \frac{z}{k} + \frac{(a+2)}{(a)} \cdot \frac{(b+2)}{(b)} \cdot \frac{z}{k^2} + \frac{(a+3)}{(a)} \cdot \frac{(b+3)}{(b)} \cdot \frac{z}{k^3}$$
$$+ \frac{(a+4)}{(a)} \cdot \frac{(b+4)}{(b)} \cdot \frac{z}{k^4} + \text{etc.}$$

De la même manière, posons pour toutes les dépenses à faire MP, de sorte que

$$P = \frac{(b+1)}{(b)}\left(1 - \frac{(a+1)}{(a)}\right)\frac{p}{k} + \frac{(b+2)}{(b)}\left(1 - \frac{(a+2)}{(a)}\right)\frac{p}{k^2}$$
$$+ \frac{(b+3)}{(b)}\left(1 - \frac{(a+3)}{(a)}\right)\frac{p}{k^3} + \text{etc.}$$

Or, mettant selon les règles de l'équité une parfaite égalité entre la recette de la caisse et sa dépense, et nous aurons cette équation à résoudre:

$$x + Z = P,$$

d'où l'on pourra déterminer les quantités inconnües x et z, en prenant l'une ou l'autre à volonté, selon qu'on jugera apropos.

12. Pour rendre ce calcul plus aisé, on n'a qu'à calculer, de la table que nous avons donnée ci-dessus ou d'une autre qu'on jugera plus convenable, les deux progressions suivantes

$$\text{I.}\quad B = \frac{(b+1)}{(b)k} + \frac{(b+2)}{(b)k^2} + \frac{(b+3)}{(b)k^3} + \frac{(b+4)}{(b)k^4} + \text{etc.},$$

$$\text{II.}\quad C = \frac{(a+1)(b+1)}{(a)(b)k} + \frac{(a+2)(b+2)}{(a)(b)k^2} + \frac{(a+3)(b+3)}{(a)(b)k^3} + \text{etc.},$$

et ayant trouvé les valeurs de ces deux progressions B et C pour chaque cas, à cause de

$$Z = Cz \quad \text{et} \quad P = (B - C)p,$$

nous aurons cette équation

$$x + Cz = (B - C)p,$$

d'où l'on déterminera aisément les prix x et z que chaque mari sera obligé de payer par rapport à son propre age et à celui de sa femme; et de cette manière, l'établissement sera mis parfaitement d'accord avec les règles de la plus rigoureuse équité, de sorte que personne, de quelque état et de quelque condition que ce soit, ne sçauroit trouver aucun sujet de se plaindre.

13. Pour faciliter le calcul de ces deux progressions, il sera bon de réduire toutes les fractions à un même dénominateur, qui sera $(b)k^n$ pour la série B, et $(a)(b)k^n$ pour la série C; alors le calcul deviendra fort aisé, quand on commencera par le dernier terme, à ajouter ensemble tous les numérateurs. Ainsi, pour la progression B, on aura la série suivante des numérateurs, pour en prendre la somme

$$(95) + (94)k + (93)k^2 + (92)k^3 + (91)k^4 + \cdots + (b+1)k^n,$$

où l'on voit aisément que $n = 95 - b - 1$. La somme de cette série étant donc nommée $= S$, on aura

$$B = \frac{S}{(b)k^{n+1}},$$

où $n + 1 = 95 - b$.

De la même manière, si nous supposons $a = b + d$, les numérateurs de la progression C étant rangés à rebours seront

$$(95)(95+d) + (94)(94+d)k + (93)(93+d)k^2 + (92)(92+d)k^3 + \cdots \\ + (b+1)(b+1+d)k^n,$$

dont la somme étant supposée $= T$, on aura

$$C = \frac{T}{(b)(b+d)k^{n+1}},$$

où il y aura encore $n = 95 - b - 1 = 94 - b$.

Par ce moyen, on calculera aisément les valeurs de nos deux progressions B et C pour tous les ages b de la femme et pareillement pour tous les ages du mari, pourvu que la différence entre les deux ages soit la même $= d$ et que l'intérêt auquel l'établissement peut faire valoir ses fonds soit déterminé.

14. Comme on ne sçauroit regarder les valeurs des fractions (1), (2), (3) etc., rapportées cy-dessus, comme justes à la dernière rigueur et que d'ailleurs la nature même de telles questions n'est pas susceptible d'une parfaite précision dans l'exécution, il seroit fort superflu de vouloir ajouter ensemble tous les termes pour tous les ans; il suffira, au contraire, de prendre partout cinq termes ensemble, en supposant leur somme cinq fois plus grande[1]) que leur terme moyen. Ainsi, au lieu de ces termes:

$$(95) + (94)k + (93)k^2 + (92)k^3 + (91)k^4,$$

on mettra assés exactement $5(93)k^2$.

De la même manière, pour les cinq suivans, on mettra $5(88)k^7$; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à la fin; et on se servira de ce même moyen pour l'autre progression, C, ce qui abrégera très considérablement le calcul.

15. Ensuite, il ne semble pas nécessaire d'achever ces calculs pour tous les ages de la femme d'année en année, mais il suffira de passer par des in-

1) L'édition originale porte, par erreur, *leur somme cinq fois plus grande que celle de leur terme moyen.* L. G. D.

tervalles de 5 ans; et pour cet effet, on pourra toujours supposer l'age de la femme exprimé par un nombre divisible par 5. Posons donc l'age de la femme

$$b = 5\beta;$$

et pour trouver la progression B, on aura son numérateur

$$S = 5(93)k^2 + 5(88)k^7 + 5(83)k^{12} + \cdots + 5(5\beta + 3)k^{n-2},$$

où $n = 94 - 5\beta$; et de là, on aura

$$B = \frac{S}{(5\beta)k^{n+1}},$$

où $n + 1 = 95 - 5\beta$. De la même manière, en supposant $a = 5\beta + d$, on aura

$$T = 5(93)(93 + d)k^2 + 5(88)(88 + d)k^7 + 5(83)(83 + d)k^{12} + \cdots$$
$$+ 5(5\beta + 3)(5\beta + 3 + d)k^{n-2}$$

et de là on tirera la valeur

$$C = \frac{T}{(5\beta)(5\beta + d)k^{n+1}}.$$

Or, dans l'exécution de ce calcul pour tous les cas qui peuvent avoir lieu, il suffira aussi de prendre pour la différence entre les deux ages, que nous supposons $= d$, seulement des nombres divisibles par 5, en posant d'abord $d = 0$ et ensuite $d = 5$, $d = 10$, $d = 15$ etc.; et en cas que la femme soit plus agée que le mari, on fera le même calcul pour les cas $d = -5$, $d = -10$, $d = -15$ etc.

16. Appliquons maintenant ces règles à des cas réels et supposons d'abord que l'établissement puisse faire valoir ses fonds à 6 pour cent par an, et nous aurons

$$k = \frac{106}{100}$$

et partant

$$\log. k = 0{,}02531,$$

d'où il ne sera pas difficile de calculer la table suivante, qui nous montre la valeur de la lettre B pour tous les ages de la femme de 5 en 5 ans.[1]

b	$\log. 5(b+3)k^{n-2}$	$5(b+3)k^{n-2}$	S	B
90	8,226703	0,01685	0,01685	1,57391
85	9,052203	0,11277	0,12962	2,26184
80	9,665400	0,46281	0,59243	3,43334
75	0,097655	1,25214	1,84457	4,60116
70	0,417070	2,61257	4,45714	5,93433
65	0,672264	4,70179	9,15893	7,08739
60	0,897924	7,90540	17,06433	8,13244
55	1,099180	12,56551	29,62984	9,03034
50	1,288156	19,41581	49,04565	9,84301
45	1,465838	29,23059	78,27624	10,62372
40	1,630825	42,73908	121,01532	11,36407
35	1,790739	61,76453	182,77985	11,83942
30	1,950981	89,32658	272,10643	12,15765
25	2,114622	130,20339	402,30982	12,33704
20	2,273041	187,51706	589,82688	12,77532
15	2,422768	264,70851	854,53539	13,21964

1) Comme les valeurs de la lettre B servent de base commune aux tables subséquentes ainsi qu'à celles des paragraphes 30 et 31, nous avons tenu à donner ici cette base exactement. Voir la note 1, p. 196 et 212.

Les chiffres de l'édition originale sont les suivants.

b	$\log. 5(b+3)k^{n-2}$	$5(b+3)k^{n-2}$	S	B
90	8,226703	0,01685	0,01685	1,57430
85	9,052203	0,11277	0,12962	2,31453
80	9,665400	0,46281	0,59243	3,43333
75	0,097655	1,25215	1,84458	4,60116
70	0,417070	2,61260	4,45718	5,93434
65	0,672267	4,70183	9,15901	7,08740
60	0,897928	7,90549	17,06450	8,11372
55	1,099185	12,56567	29,63017	9,03032
50	1,288161	19,41605	49,04622	9,84297
45	1,465844	29,23102	78,27724	10,62377
40	1,630832	42,73975	121,01699	11,36403
35	1,790747	61,76564	182,78263	11,84090
30	1,950989	89,32830	272,11093	12,15794
25	2,114631	130,20600	402,31693	12,33890
20	2,273050	187,52094	589,83787	12,77526
15	2,422778	264,71486	854,55273	13,21976

L. G. D.

17. Après avoir construit cette table pour la lettre B, il ne sera plus difficile de calculer celle de la lettre C, pour chaque différence qu'on mettra entre l'age du mari, a, et celui de la femme, b; car, en supposant $a = b + d$, on n'aura qu'à multiplier les nombres de la troisième colomne de la table précédente, sous le titre $5(b+3)k^{n-2}$, chacun par $(b+3+d)$, ou bien on ajoutera au logarithme rapporté dans la seconde colomne le logarithme du nombre $(b+3+d)$; et alors, on ajoutera toutes ces valeurs ensemble, comme auparavant, pour avoir les nombres contenûs sous la lettre T, dont chacun doit être divisé par le produit dû diviseur précédent $(b)k^{n+1}$ multiplié par $(b+d)$; et de cette manière, on aura la valeur de la lettre C.

Cela remarqué, on n'aura qu'à prendre successivement pour la différence d les valeurs

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$$

et ensuite aussi

$$-5 \text{ et } -10.$$

Nous donnerons ici des tables particulières pour chacun de ces cas et, pour en abréger les titres, nous mettrons

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+3+d)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+d).$$

18. Soit donc d'abord $d = 0$, ou bien l'age du mari égal à celui de la femme; et nous aurons

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+3)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b),$$

d'où nous calculons la table suivante.

I. TABLE[1])
des valeurs de la lettre C et de $B - C$, pour le cas $a = b$.

b	V	T	C	$B - C$
90	0,00005	0,00005	0,59036	0,98394
85	0,00169	0,00174	0,97127	1,34326
80	0,02129	0,02303	1,85370	1,57963
75	0,11645	0,13948	2,78338	1,81778
70	0,37882	0,51830	3,94325	1,99109
65	0,91686	1,43516	4,93578	2,15162
60	1,93684	3,37200	5,88643	2,22729
55	3,65661	7,02861	6,71502	2,31530
50	6,52380	13,55241	7,51325	2,32972
45	11,04933	24,60174	8,34730	2,27647
40	17,65153	42,25327	9,18466	2,17937
35	27,54752	69,80079	9,66070	2,18020
30	43,05620	112,85699	9,94542	2,21252
25	68,35816	181,21515	10,06690	2,27200
20	105,94922	287,16437	10,65010	2,12516
15	157,77000	444,93437	11,26502	1,95474

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale; voir la note précédente.

Comme les chiffres de la dernière colonne de cette table se retrouvent, multipliés par 100, dans la table I p. 206, puis de nouveau, mais autrement disposés, dans la table I p. 212—213, nous donnons ici les valeurs exactes de la différence $B - C$. A l'aide de la table précédente qui donne les valeurs exactes de B, le lecteur en déduira immédiatement les valeurs correctes de C, importantes pour les tables II p. 207 et p. 214—215.

Voici donc les valeurs exactes de $B - C$, pour le cas $a = b$ et pour les âges $b = 90, 85, 80, \ldots 20, 15$

b	$B - C$	b	$B - C$	b	$B - C$	b	$B - C$
90	0,99011	70	1,99102	50	2,32972	30	2,21222
85	1,31301	65	2,15161	45	2,27641	25	2,27009
80	1,57961	60	2,24600	40	2,17940	20	2,12514
75	1,81781	55	2,31530	35	2,17870	15	1,95453

L. G. D.

19. Supposons à présent que chaque mari soit de 5 ans plus agé que sa femme, de sorte que $d = 5$; et nous aurons

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+8)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+5),$$

d'où nous tirerons la table suivante.

II. TABLE[1])
des valeurs de la lettre C et de $B-C$, pour le cas $a = b+5$.

b	V	T	C	$B-C$
85	0,00034	0,00034	0,74161	1,57292
80	0,00694	0,00728	1,31844	2,11489
75	0,05760	0,06488	2,24776	2,35340
70	0,24297	0,30785	3,27900	2,65534
65	0,68177	0,98962	4,37591	2,71149
60	1,54157	2,53119	5,36130	2,75242
55	3,07858	5,60977	6,26254	2,76778
50	5,65008	11,25985	7,08375	2,75922
45	9,82162	21,08147	7,90374	2,72003
40	16,15563	37,13710	8,71834	2,64569
35	25,50924	62,64634	9,39304	2,44786
30	39,84045	102,48679	9,78417	2,37377
25	62,75929	165,24608	9,99457	2,34433
20	98,44844	263,69452	10,34664	2,42862
15	149,56380	413,25832	10,94683	2,27293

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale. Pour les raisons exposées dans la note précédente, nous donnons ici les valeurs correctes de $B-C$ pour le cas $a = b+5$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
85	1,52022	65	2,71135	45	2,71996	25	2,33633
80	2,11490	60	2,77109	40	2,62198	20	2,42468
75	2,35340	55	2,76774	35	2,43121	15	2,27011
70	2,65531	50	2,75923	30	2,36381		

L. G. D.

20. Supposons à présent que les maris soyent de 10 ans plus agés que leurs femmes, en sorte que $d = 10$; et nous aurons

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+13)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+10).$$

Cela remarqué, nous en tirerons la table suivante.

III. TABLE[1])
des valeurs de la lettre C et de $B - C$, pour le cas $a = b + 10$.

b	V	T	C	$B-C$
80	0,00139	0,00139	1,00694	2,42639
75	0,01878	0,02017	1,57227	3,02889
70	0,12018	0,14035	2,59532	3,33902
65	0,43727	0,57762	3,57577	3,51163
60	1,14629	1,72391	4,69465	3,41907
55	2,45030	4,17421	5,65406	3,37626
50	4,75693	8,93114	6,56546	3,27751
45	8,50623	17,43737	7,41873	3,20504
40	14,36056	31,79793	8,24852	3,11551
35	23,34743	55,14536	8,92982	2,91108
30	36,89260	92,03796	9,51886	2,63908
25	58,07200	150,10996	9,83567	2,50323
20	90,38520	240,49516	10,27390	2,50136
15	138,97510	379,47026	10,63451	2,58525

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B - C$ pour le cas $a = b + 10$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
80	2,42640	60	3,43776	40	3,11552	20	2,50139
75	3,02889	55	3,37626	35	2,90957	15	2,58509
70	3,33898	50	3,27752	30	2,63876		
65	3,51159	45	3,20526	25	2,50133		

L. G. D.

21. Soit à présent $d = 15$, c'est à dire l'age des maris de 15 ans plus grand que celui des femmes; et nous aurons

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+18)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+15),$$

d'où nous pourrons calculer cette table.

IV. TABLE[1])

des valeurs de la lettre C et de $B-C$, pour le cas $a = b + 15$.

b	V	T	C	$B-C$
75	0,00376	0,00376	1,17238	3,42878
70	0,03919	0,04295	1,78700	4,14734
65	0,21628	0,25923	2,78607	4,30133
60	0,73521	0,99444	3,79137	4,32235
55	1,82202	2,81646	4,90495	4,12537
50	3,78614	6,60260	5,88915	3,95382
45	7,16160	13,76420	6,84268	3,78109
40	12,43729	26,20149	7,71295	3,65108
35	20,75324	46,95473	8,40164	3,43926
30	33,76608	80,72081	9,01628	3,14166
25	53,77512	134,49593	9,54700	2,79190
20	83,63437	218,13030	10,09503	2,68023
15	127,59235	345,72265	10,54870	2,67106

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B-C$ pour le cas $a = b + 15$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
75	3,42878	55	4,12537	35	3,43775	15	2,67090
70	4,14731	50	3,95384	30	3,14154		
65	4,30131	45	3,78100	25	2,79003		
60	4,34107	40	3,65109	20	2,68026		

L. G. D.

22. Supposons que les maris soyent de 20 années plus agés que les femmes, de sorte que $d = 20$; et nous aurons pour ce cas

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+23)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+20),$$

d'où nous tirons la table qui suit.

V. TABLE [1])

des valeurs de la lettre C et de $B - C$, pour le cas $a = b + 20$.

b	V	T	C	$B-C$
70	0,00784	0,00784	1,30478	4,62956
65	0,07053	0,07837	1,89513	5,19227
60	0,36365	0,44202	2,92575	5,18797
55	1,16861	1,61063	3,92695	5,10337
50	2,81533	4,42596	5,07564	4,76733
45	5,70005	10,12601	6,10796	4,51581
40	10,47124	20,59725	7,08484	4,27919
35	17,97379	38,57104	7,83184	4,00906
30	30,01428	68,58532	8,46494	3,69300
25	49,21790	117,80322	9,03105	3,30785
20	77,44627	195,24939	9,78910	2,98616
15	118,06274	313,31213	10,35643	2,86333

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B - C$ pour le cas $a = b + 20$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
70	4,62945	55	5,10339	40	4,27910	25	3,30595
65	5,19225	50	4,76737	35	4,00750	20	2,98617
60	5,20666	45	4,51582	30	3,69265	15	2,86316

L. G. D.

23. Supposons que les maris soyent de 25 ans plus agés que les femmes, de sorte que $d = 25$; et nous aurons pour le calcul présent

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+28)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+25),$$

d'où nous pourrons construire la table qui suit.

VI. TABLE[1])

des valeurs de la lettre C et de $B - C$, pour le cas $a = b + 25$.

b	V	T	C	$B-C$
65	0,01410	0,01410	1,36385	5,72355
60	0,11858	0,13268	1,97598	6,13774
55	0,57802	0,71070	3,00831	6,02201
50	1,80570	2,51640	4,04009	5,80288
45	4,23850	6,75490	5,23868	5,38509
40	8,33426	15,08916	6,29752	5,06651
35	15,13260	30,22176	7,17050	4,67040
30	25,96460	56,18636	7,86940	4,28854
25	43,74920	99,93556	8,46550	3,87340
20	70,88300	170,81856	9,24937	3,52589
10	109,32705	280,14561	10,03181	3,18795

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B - C$ pour le cas $a = b + 25$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
65	5,72256	50	5,80291	35	4,66888	20	3,52430
60	6,15669	45	5,38504	30	4,28403	15	3,16777
55	6,02199	40	5,06655	25	3,86898		

L. G. D.

24. Soit l'age du mari de 30 ans plus grand que celui de la femme, ou bien soit $d = 30$; et nous aurons, pour le calcul de la table suivante,

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b+33)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b+30);$$

voici la table.

VII. TABLE [1])

des valeurs de la lettre C et de $B - C$, pour le cas $a = b + 30$.

b	V	T	C	$B-C$
60	0,02372	0,02372	1,41303	6,70069
55	0,18848	0,21220	2,02099	7,00933
50	0,89314	1,10534	3,08096	6,76201
45	2,71849	3,82383	4,15173	6,47204
40	6,19727	10,02110	5,37729	5,98674
35	12,04430	22,06540	6,35219	5,48871
30	21,88540	43,95080	7,19292	4,96502
25	37,89000	81,84080	7,86720	4,47170
20	63,00700	144,84780	8,66642	4,10884
15	100,06232	244,91012	9,47166	3,74810

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B - C$ pour le cas $a = b + 30$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
60	6,71939	45	6,47199	30	4,96470	15	3,74796
55	7,00932	40	5,98677	25	4,46982		
50	6,76204	35	5,48705	20	4,10885		

L. G. D.

25. Développons encore quelques cas où les femmes sont plus agées que les maris; et soit d'abord $d = -5$, ou bien $a = b - 5$; et nous aurons, pour le calcul suivant,

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b-2)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b-5);$$

et de là on construira la table qui suit.

VIII. TABLE [1])

des valeurs de la lettre C et de $B-C$, pour le cas $a = b - 5$.

b	V	T	C	$B-C$
90	0,00025	0,00025	0,72974	0,84456
85	0,00519	0,00544	1,31843	0,99610
80	0,04304	0,04848	2,24766	1,18567
75	0,18156	0,23004	3,27895	1,32221
70	0,50945	0,73949	4,37585	1,55849
65	1,15195	1,89144	5,36127	1,72613
60	2,30050	4,19194	6,26254	1,85118
55	4,22206	8,41400	7,08373	1,94659
50	7,33930	15,75330	7,90375	1,93922
45	12,07241	27,82571	8,74182	1,88195
40	19,06192	46,88763	9,38639	1,97764
35	29,77107	76,65870	9,79370	2,04720
30	46,89732	123,55602	10,00063	2,15731
25	73,56683	197,12285	10,35060	1,98830

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B-C$ pour le cas $a = b - 5$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
90	0,84417	70	1,55845	50	1,93926	30	2,15709
85	0,94341	65	1,72610	45	1,88187	25	1,98644
80	1,18567	60	1,86988	40	1,95602		
75	1,32219	55	1,94658	35	2,04568		

L. G. D.

26. Soit $d = -10$; et nous aurons

$$V = 5(b+3)k^{n-2}(b-7)$$

et

$$W = (b)k^{n+1}(b-10),$$

d'où nous tirons la table suivante.

IX. TABLE [1])

des valeurs de la lettre C et de $B-C$, pour le cas $a = b - 10$.

b	V	T	C	$B-C$
90	0,00077	0,00077	0,99894	0,57536
85	0,01049	0,01126	1,57187	0,74266
80	0,06711	0,07837	2,59531	0,83802
75	0,24417	0,32254	3,57579	1,02537
70	0,64008	0,96262	4,69465	1,23969
65	1,36823	2,33085	5,65406	1,43334
60	2,65624	4,98709	6,56546	1,54826
55	4,74982	9,73691	7,41872	1,61160
50	8,01884	17,75575	8,24852	1,59445
45	13,03703	30,79278	8,92982	1,69395
40	20,60057	51,39335	9,51886	1,84517
35	34,74608	86,13943	10,10782	1,73308
30	50,47047	136,60990	10,45131	1,70663

1) Les chiffres de cette table sont ceux de l'édition originale; voir la note 1 p. 196. Voici les valeurs correctes de $B-C$ pour le cas $a = b - 10$.

b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$	b	$B-C$
90	0,56812	70	1,23958	50	1,59445	30	1,88371
85	0,68856	65	1,43327	45	1,69386		
80	0,83769	60	1,53959	40	1,84517		
75	1,02525	55	1,61156	35	2,00871		

L. G. D.

27. Après avoir trouvé les valeurs des lettres B et C et de leur différence $B - C$, pour tous les ages tant du mari que de la femme, il sera aisé de ressoudre l'équation trouvée ci-dessus (§ 12)

$$x + Cz = (B - C)p,$$

en prenant l'une ou l'autre des deux quantités x et z à volonté. Or, pour la pratique, il sera bon d'établir deux cas:

L'un où le mari paye dès le commencement le prix tout entier pour la pension p qu'il veut procurer à sa femme après sa mort; et dans ce cas, à cause de $z = 0$, on aura d'abord

$$x = (B - C)p,$$

où x marque la somme qu'on doit payer d'abord.

L'autre cas aura lieu en posant $x = z$, où z marque le payement que le mari doit faire tous les ans pendant sa vie, à fin que sa femme après sa mort puisse jouir d'une pension annuelle $= p$ pendant toute sa vie. Dans ce cas donc on aura

$$z = \frac{(B - C)p}{1 + C}.$$

Pour ces deux cas, nous avons calculé les deux tables suivantes, où nous supposons la pension annuelle de la veuve à 100 Roubles; d'où il sera facile de déterminer les prix pour toute autre pension, ou plus grande ou plus petite.

TABLE I[1])

des prix que chaque mari doit payer tout à la fois au commencement, tant par rapport à son age qu'à celui de sa femme, pour assurer à celle-ci une pension de 100 Roubles.

Age de la femme	Excès de l'age du mari sur celui de sa femme														Excès de l'age de la femme sur celui du mari			
Ans	0		5		10		15		20		25		30		5		10	
	R.[2])	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
90	98	39													84	46	57	54
85	134	33	157	29											99	61	74	27
80	157	96	211	49	242	64									118	57	83	80
75	181	78	235	34	302	89	342	88							132	22	102	54
70	199	11	265	53	333	90	414	73	462	96					155	85	123	97
65	215	16	271	15	351	16	430	13	519	23	572	35			172	61	143	33
60	222	73	275	24	341	90	432	23	518	80	613	77	670	7	185	12	154	83
55	231	53	276	78	337	63	412	54	510	34	602	20	700	93	194	66	161	16
50	232	97	275	92	327	75	395	38	476	73	580	29	676	20	193	92	159	44
45	227	65	272	0	320	50	378	11	451	58	538	51	647	20	188	19	169	39
40	217	94	264	57	311	55	365	11	427	92	506	65	598	67	197	76	184	52
35	218	2	244	79	291	11	343	93	400	91	467	4	548	87	204	72	173	31
30	221	25	237	38	263	91	314	17	369	30	428	85	496	50	215	73	170	66
25	227	20	234	43	250	32	279	19	330	78	387	34	447	17	198	83		
20	212	52	242	86	250	14	268	2	298	62	352	59	410	88				
15	195	47	227	29	258	52	267	11	286	33	318	79	374	81				

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale; voir la note 1 p. 212. L. G. D.

2) R. et C. sont les abréviations de *Roubles* et *Copeks*. L. G. D.

TABLE II[1])

des prix que chaque mari doit payer pendant sa vie, pour procurer à sa femme, après sa mort, une pension de 100 Roubles.

Age de la femme	Excès de l'age du mari sur celui de sa femme														Excès de l'age de la femme sur celui du mari			
Ans	0		5		10		15		20		25		30		5		10	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
90	61	87													48	83	28	78
85	68	14	90	31											42	96	28	88
80	55	35	91	22	120	90									36	51	23	31
75	48	5	72	46	117	75	157	83							30	90	22	41
70	40	28	62	5	92	87	148	81	200	87					28	99	21	77
65	36	25	50	44	76	74	113	61	179	34	242	13			27	13	21	54
60	32	34	43	27	60	4	90	21	132	15	206	24	277	69	25	49	20	46
55	30	1	38	11	50	74	69	86	103	58	150	24	232	2	24	8	19	14
50	27	37	34	13	43	32	57	39	78	47	115	13	165	70	21	78	17	24
45	24	35	30	55	38	7	48	21	63	53	86	32	125	63	19	32	17	6
40	21	40	27	22	33	69	41	90	52	93	69	43	93	88	19	4	17	54
35	20	45	23	55	29	32	36	58	45	39	57	16	74	65	18	97	15	60
30	19	94	21	73	24	80	31	6	38	70	48	1	60	23	19	34	14	64
25	20	25	21	32	22	82	26	18	32	67	40	60	50	8	17	25		
20	18	24	21	40	22	19	24	16	27	68	34	40	42	51				
15	15	94	19	3	22	22	23	13	25	50	28	90	35	79				

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale; voir la note 1 p. 214. L. G. D.

28. Voilà donc une double détermination du prix que chaque mari doit payer, pour procurer à sa veuve une pension de 100 Roubles par an; la première table contenant la valeur de x, ou la somme qui doit être payée dès le commencement, et la seconde la valeur de z, ou ce que le mari doit fournir tous les ans à la caisse, tant que lui et sa femme seront en vie.

De là, on comprend aisément qu'on peut varier d'une infinité de manières différentes le payement à faire, pour s'assurer d'une telle pension de 100 Roubles. Ainsi, quand le mari payera dès le commencement la somme $=\frac{1}{2}x$, qui est la valeur d'une pension de 50 Roubles, il doit outre cela payer tous les ans encore $\frac{1}{2}z$, comme l'équivalent de l'autre moitié de 50 Roubles. Et en général, quand il veut payer au commencement la somme $=nx$, où n marque une fraction quelconque, il sera tenu de payer outre cela tous les ans la somme de $(1-n)z$; et il pourra être indifférent à l'établissement de laisser choisir à chaque mari quelle valeur il voudra donner à la fraction n.

29. Pour en donner un exemple, supposons l'age du mari de 40 ans et celui de sa femme à 30 ans; et la première table donne le payement à faire tout à la fois $=263$ R. 91 C.; et la seconde table donne le payement à faire tous les ans $=24$ R. 80 C. Donc, en général, il pourra acquérir à sa veuve la même pension de 100 Roubles, en payant d'abord la somme de $n\cdot(263$ R. 91 C.) et outre cela tous les ans la somme de $(1-n)\cdot(24$ R. 80 C.). De là, prenant $n=\frac{1}{2}$, il faudra payer dès le commencement la somme $=131$ R. 95 C. et ensuite encore tous les ans 12 R. 40 C.

Rien n'empeche aussi qu'on ne prenne n plus grand que l'unité, par exemple $n=2$, de sorte qu'on pourra payer d'abord la somme de 527 R. 82 C. et ensuite, au lieu de contribuer encore quelque chose, l'établissement rendra tous les ans 24 R. 80 C., même à commencer dès la première année. Mais ce payement ne durera que tant que le mari et la femme seront en vie, vu qu'avec la mort de la femme tout est éteint, pendant qu'après la mort du mari, la veuve parviendra à la jouissance de la pension de 100 Roubles.

30. Or, après la mort du mari, on peut aussi accorder à la veuve la liberté de prendre, au lieu de sa pension, un équivalent en argent comptant, qu'il sera aisé de déterminer, vu qu'il ne dépend que du seul age de la femme, et même la valeur de la lettre B rapportée dans la table du § 16 nous montre cet équivalent, en multipliant B par 100. Dans cette vüe, nous ajouterons encore la table suivante.

TABLE

du prix équivalent que chaque veuve, à l'égard de son age, peut prétendre à la fois, au lieu de sa pension de 100 Roubles dont elle seroit en droit de jouir tous les ans.[1])

Age de la veuve	Prix équivalent de sa pension	Age de la veuve	Prix équivalent de sa pension
	R. C.		R. C.
90	157 39*	50	984 30
85	226 18*	45	1062 37*
80	343 33	40	1136 41*
75	460 12	35	1183 94*
70	593 43	30	1215 77*
65	708 74	25	1233 70*
60	813 24*	20	1277 53
55	903 3	15	1321 96*

31. Cette dernière table pourra aussi servir à fixer les rentes viagères que l'établissement pourra accorder à chaque personne qui y fourniroit un certain capital; attendu que cette valeur dépend uniquement de l'age de la personne. Car supposant l'age de cette personne $=b$ ans, auquel nombre répond la lettre B, puisque Bp est la valeur présente d'une pension annuelle $=p$, soit C le capital que cette personne paye d'abord à la caisse; et on trouvera la pension ou rente viagère par la proportion

$$Bp : p = C : \frac{C}{B}.$$

De là, en supposant ce capital C de 100 Roubles, la formule $\frac{100}{B}$ exprimera la rente viagère, en marquant à combien pour cent cette rente montera. Pour cet effet, nous ajouterons ici la table suivante.

1) Cette table contient les chiffres corrigés d'après ceux du § 16. Au lieu des chiffres marqués ici d'un astérisque, l'édition originale porte: 157,43; 231,45; 811,37; 1062,38; 1136,40; 1184,09; 1215,79; 1233,89; 1321,98. L. G. D.

TABLE

des rentes viagères que l'établissement pourra accorder aux personnes d'un age quelconque, pour un capital de 100 Roubles payé d'abord à la caisse.[1])

Age de la personne	Rente viagère pour ce capital	Age de la personne	Rente viagère pour ce capital
	R. C.		R. C.
90	63 53*	50	10 16
85	44 21*	45	9 41
80	29 13	40	8 80
75	21 73	35	8 45*
70	16 85	30	8 23*
65	14 11	25	8 11*
60	12 30*	20	7 83
55	11 7	15	7 56

32. Comme toutes ces tables sont calculées sur une parfaite égalité entre la recette et la dépense, sans avoir eu égard aux frais que l'administration d'un tel établissement exige, on comprend aisément qu'à cet égard on doit ou augmenter la recette ou diminuer la dépense de quelques pour cent, selon la quantité des frais qui seront nécessaires. C'est donc à quoi il faudra se régler à chaque cas, ou pour hausser la recette ou baisser la dépense; ce qui sera d'autant plus nécessaire, par ce que tous ces calculs ne sont fondés que sur les règles de la probabilité, de sorte qu'il seroit très possible que l'établissement ou gagneroit, à la fin, assés considérablement ou perdroit de même. Il faudra donc avoir recours à cet expédient, tant pour subvenir aux frais de l'établissement que pour prévenir tous les accidens extraordinaires qui ne peuvent être calculés.

33. Quoique les deux tables générales qui marquent les prix de chaque pension de 100 Roubles, tant en les payant d'abord à la fois que successive-

1) Cette table contient les chiffres corrigés d'après ceux du § 16. Au lieu des chiffres marqués ici d'un astérisque, l'édition originale porte: 63,52; 43,20; 12,32; 8,44; 8,22; 8,10.

Une table analogue, mais où EULER a pris 5 pour cent comme taux annuel de l'intérêt, se trouve p. 106—108. L. G. D.

ment tous les ans, pendant la vie du mari et de la femme ensemble, soyent construites d'une telle manière qu'on en puisse aisément faire l'application à tous les cas proposés, il sera pourtant bon de les représenter sous une forme un peu différente, pour s'accommoder à l'usage reçû en des pareilles occasions, en commençant par les bas ages et en exprimant l'age même du mari, au lieu de son excès sur celui de la femme. De cette manière, nos tables seront réduites à la forme ici ajoutée.[1])

34. En considérant ces deux tables, on voit d'abord que les nombres marqués dans chaque ligne horizontale vont en croissant; et si nous avions encore ajouté la dernière colonne verticale pour l'age du mari de 95 ans, que nous regardons comme le dernier terme de la vie humaine, elle devroit contenir le prix tout entier de la pension de la veuve, qui convient à son age, que nous avons rapporté ci-dessus dans la table du § 30. Ainsi, si la femme avoit 30 ans et le mari 95, il seroit obligé de payer 1215 R. 79 C.; et si la femme avoit 60 ans et le mari 95, il devroit payer 811 R. 37 C.; et ces mêmes nombres seroient aussi les valeurs de z dans la seconde table; car, puisque nous regardons le mari de 95 comme mourant, la valeur de z deviendra égale à celle de x.

35. Ensuite, on voit aussi que les colonnes verticales, en descendant, contiennent des nombres décroissans; et si nous avions encore ajouté une bande horisontale, pour l'age de 95 ans de la femme, le prix de la pension auroit été réduit à rien, tant pour x que pour z, puisque nous regardons une femme de 95 comme sur le point de mourir. Or, puisque une telle femme qui aura atteint l'age de 95 ans pourroit encore vivre quelques années, l'établissement risqueroit trop sans doute, s'il vouloit accorder une pension à une telle femme, et par cette raison, il sera nécessaire d'exclure les personnes trop agées d'un tel établissement; ou bien, il auroit fallu étendre plus loin le dernier terme de la vie humaine, ce qui n'auroit presque causé aucun changement pour les ages moins avancés.

1) Voir les pages 212—215. L. G. D.

TABLE I[1])

des prix que chaque mari doit payer tout à la fois au commencement, tant par rapport à son age qu'à celui de sa femme, pour assurer à celle-ci une pension de 100 Roubles.

Age de la femme	Age du mari													
Ans	20		25		30		35		40		45		50	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
15	227	1	258	51	267	9	286	32	316	78	374	80		
20	212	51	242	47	250	14	268	3	298	62	352	43	410	89
25	198	64	227	1	233	63	250	13	279	0	330	60	386	90
30	188	37	215	71	221	22	236	38	263	88	314	15	369	27
35			200	37	204	57	217	87	243	12	290	96	343	78
40					184	52	195	60	217	94	262	20	311	55
45							169	39	188	19	227	64	272	0
50									159	45	193	93	232	97
55											161	16	194	66
60													153	96
65														
70														
75														
80														
85														
90														

1) Cette table contient les chiffres corrigés. En les comparant avec ceux de la table I p. 206, qui devrait contenir exactement les mêmes nombres, savoir

$$100\,(B - C),$$

mais autrement ordonnés, on pourra juger des erreurs qui se sont glissées dans la table EULERIENNE; voir la note 1 p. 196. L. G. D.

TABLE I (Suite)

des prix que chaque mari doit payer tout à la fois au commencement, tant par rapport à son age qu'à celui de sa femme, pour assurer à celle-ci une pension de 100 Roubles.

Age du mari

55		60		65		70		75		80		85		90	
R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
446	98														
428	40	496	47												
400	75	466	89	548	71										
365	11	427	91	506	66	598	68								
320	53	378	10	451	58	538	50	647	20						
275	92	327	75	395	38	476	74	580	29	676	20				
231	53	276	77	337	63	412	54	510	34	602	20	700	93		
186	99	224	60	277	11	343	78	434	11	520	67	615	67	671	94
143	33	172	61	215	16	271	14	351	16	430	13	519	23	572	26
		123	96	155	85	199	10	265	53	333	90	414	73	462	95
				102	53	132	22	181	78	235	34	302	89	342	88
						83	77	118	57	157	96	211	49	242	64
								68	86	94	34	131	30	152	2
										56	81	84	42	99	1

TABLE II[1])

des prix que chaque mari doit payer tous les ans pendant sa vie, pour procurer à sa femme, après sa mort, une pension annuelle de 100 Roubles.

Age de la femme	Age du mari													
Ans	20		25		30		35		40		45		50	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
15	19	0	22	22	23	13	25	21	28	66	35	79		
20	18	24	21	36	22	19	24	16	27	68	34	38	42	51
25	17	50	20	51	21	24	23	8	26	45	32	96	40	86
30	16	71	19	61	20	21	21	90	25	9	31	36	39	1
35			18	49	18	95	20	44	23	36	29	30	36	57
40					17	54	18	79	21	40	26	91	33	69
45							17	6	19	32	24	35	30	55
50									17	24	21	78	27	37
55											19	14	24	8
60													20	30
65														
70														
75														
80														
85														
90														

1) Cette table contient les chiffres corrigés. En les comparant avec ceux de la table II p. 207, qui devrait contenir exactement les mêmes nombres, savoir

$$100\,(B - C) : (1 + C),$$

mais autrement ordonnés, on pourra juger des erreurs qui se sont glissées dans la table Eulerienne; voir la note 1 p. 196. L. G. D.

TABLE II (Suite)

des prix que chaque mari doit payer tous les ans pendant sa vie, pour procurer à sa femme, après sa mort, une pension annuelle de 100 Roubles.

Age du mari

55		60		65		70		75		80		85		90	
R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
50	40														
48	28	60	60												
45	38	57	14	74	63										
41	90	52	93	69	43	93	88								
38	7	48	21	63	53	86	32	125	63						
34	13	43	32	57	39	78	47	115	13	165	70				
30	1	38	11	50	74	69	86	103	58	150	24	232	2		
25	75	32	61	43	56	60	37	90	60	132	63	206	90	278	46
21	54	27	13	36	25	50	43	76	74	113	61	179	34	241	99
		21	77	28	99	40	28	62	5	92	87	148	81	200	85
				22	41	30	90	48	5	72	46	117	75	157	84
						23	30	36	51	55	35	91	22	120	90
								26	76	40	69	67	37	87	29
										28	32	48	80	62	51

36. Enfin, il est clair que, dans toutes ces déterminations, le lien du mariage entre les deux personnes dont il s'agit n'entre en aucune considération, et ces mêmes tables pourront également servir, quand par exemple un père voudra assurer après sa mort une rente viagère de 100 Roubles à un de ses enfans, ou même à une autre personne quelconque; et dans ce cas, on n'aura qu'à chercher l'age du père dans la rubrique des maris et l'age de l'enfant, ou autre personne, dans celle des femmes; et à l'aide de ces tables, on pourra même ressoudre le problème général suivant.

PROBLEME GENERAL

Quand il s'agit de procurer à une personne B, dont l'age est de b ans, une rente viagère de 100 *Roubles par an, mais qui ne doit commencer qu' après la mort d'une autre personne A, dont l'age est de a ans, on demande à quel prix doit être estimée à présent l'espérance de la dite personne B, pour parvenir à la jouissance de cette pension.*

Ici, il est d'abord clair qu'on n'a qu'à chercher l'age de la personne A parmi celui des maris et l'age de la personne B parmi celui des femmes, et nos tables montreront le prix cherché; et cela d'une double manière, puisque la première donne la valeur de ce prix pour le tems présent, et l'autre montre combien il faudroit payer tous les ans pendant la vie de la personne A, supposé que la personne B reste aussi en vie.

SUR L'ETABLISSEMENT D'UNE CAISSE POUR LES MORTS[1]

1. On parle beaucoup, depuis quelque temps, d'un tel établissement qui devoit être composé de 550 membres, dont chacun s'engageroit de payer dans la caisse deux Roubles toutes les fois que quelqu'un d'entre eux viendra à mourir, pour en donner aux héritiers du défunt la somme de 1000 Roubles, pendant que le reste sera employé tant à l'entretien d'une église qu'aux frais nécessaires qu'un tel établissement exige. De là, il est d'abord clair que ceux qui viendront à mourir bientôt jouiront d'un benefice très considérable, sans avoir rien contribué à la société, et puisque chaque place vacante doit d'abord être remplie par un nouveau membre, à fin que le nombre de tous les membres actuels demeure constamment de 550, le nombre de ceux qui jouiront d'un benefice si considérable croîtra de plus en plus; d'où l'on comprend aisément qu'à la fin cette contribution devra tomber fort à charge à ceux qui survivront aux autres. Mais, comme il s'agit d'une oeuvre quasi pieuse, on ne doit pas regarder si près aux loix d'une juste équité.

2. Or, pour mieux comprendre toutes les suites qu'une telle société doit entrainer nécessairement avec le temps, je remarque d'abord qu'une telle société ne sçauroit avoir lieu que parmi des personnes à peu près du même age, puisque des jeunes gens ne voudront jamais s'engager dans une telle liaison avec des vieillards. Supposons donc que cette société soit composée à présent de 550 membres agés de 30 ans et voyons, selon les règles de la probabilité, quel phénomène doive résulter de cette association, en la poursuivant de dix ans en dix ans. Et d'abord, on peut compter que pendant

1) Voir la note 1 p. 183. L. G. D.

le premier espace de dix ans il en mourra 81, dont les places seront remplies par des personnes du même age; et partant, chacun des premiers membres qui seront encore en vie aura déjà payé dans la caisse 162 Roubles au moins, puisque des membres nouvellement reçus, quelques-uns seront aussi morts probablement.

3. Considérons à présent l'état de cet établissement après dix ans, où il sera composé de 550 membres tous agés de 40 ans, parmi lesquels se trouveront encore 469 des premiers; et pendant un espace de 10 ans écoulé depuis ce terme, le nombre des morts sera probablement 89, qui seront remplacés par des nouveaux membres du même age; et partant, chacun des survivans sera obligé de payer, pendant ce temps, 178 Roubles. Or, des premiers membres il sera encore en vie, au bout de 20 ans, le nombre de 393 dont chacun aura déjà fourni à la caisse 340 Roubles au moins.

4. Après ces vingt ans, la société sera composée de 550 personnes toutes agées à peu près de 50 ans; et maintenant, sautant de ce terme par un nouvel intervalle de dix ans, il en mourra pendant ce temps, suivant les loix de la mortalité, 135, de sorte que chacun des autres aura été obligé de payer pendant ces 10 ans la somme de 270 Roubles. Or, des premiers membres il y aura encore en vie le nombre de 296, dont chacun aura déjà contribué dans la caisse la somme [de] 610 Roubles pour le moins, puisque le nombre de ceux qui seront morts des nouveaux reçus pourra aussi être fort considérable.

5. Nôtre société de 550 hommes sera donc composée à présent de sexagénaires, dont il mourra, dans le cours des dix ans suivans, le nombre de 198, ce qui coûtera aux survivans la somme de 396 Roubles. Or, parmi ces contributaires il y aura encore de membres initiaux 190 personnes dont chacune aura payé à la caisse, depuis son entrée, la somme de 1006 Roubles.

6. Puisque donc, depuis l'age de 60 à 70 ans, il est mort 198 personnes, il est clair que le remplacement de ces morts deviendra de plus en plus difficile, et il est peu probable qu'on trouvera autant de nouveaux membres de cet age, qui voudront entrer dans cette société, quoiqu'ils y jouissent des

mêmes droits avec ceux qui ont déjà contribué au delà de 1000 Roubles; et l'on voit bien qu'un nombre suffisant de tels vieillards doit enfin absolument manquer. Or, quand cela arrive, les membres actuels ne sçauroient plus espérer de recevoir, après leur mort, la somme stipulée de 1000 Roubles, quoiqu'ils ayent si fidèlement rempli les conditions de la société et déboursé peut être le double de cette somme; ce qui est très injuste.

7. Pour rendre cet inconvénient plus sensible, parcourons encore un intervalle de 10 ans, depuis 70 à 80 ans, pendant lequel le nombre des morts sera probablement 324; de sorte que chacun des autres sera obligé de payer dans ce temps 648 Roubles, sans pouvoir espérer presque aucun remboursement après sa propre mort; attendu qu'il sera impossible de trouver tant de nouvelles recrües. Et parmi ceux-ci, on doit plaindre principalement les 78 personnes qui seront encore en vie depuis le commencement de la société, qui ont contribué actuellement 1654 Roubles chacun.

8. Cependant, nôtre intention n'est pas de détourner aucun de ceux qui voudront entrer dans cette société de leur louable dessein, puisqu'il s'agit du bien public et surtout de l'intérêt d'une église, et nous n'avons rapporté toutes ces incongruités que pour former un nouveau plan d'un tel établissement, qui soit fondé sur les principes les plus solides de la probabilité, en sorte qu'aucun ne puisse avoir raison de se plaindre qu'il contribuë ou trop ou trop peu au bien de la société, puisque chacun payera, ou d'abord ou successivement, précisement autant que le benefice qu'il aura à espérer après sa mort doit être évalüé, suivant les loix de la plus rigoureuse équité.

9. D'abord, il est à remarquer qu'il n'est pas nécessaire qu'une telle société soit astreinte à un certain nombre de personnes, quoiqu'il faille, à la vérité, que le nombre en soit assés considérable, pour que les déterminations tirées des principes de la probabilité approchent plus exactement de la vérité. Ensuite, il n'est pas nécessaire non plus que le benefice auquel chacune aspire après sa mort soit fixé à une certaine somme, comme de 1000 Roubles; mais on pourra accorder à chacun la liberté d'en choisir ou un plus grand ou un plus petit, pourvû que la somme qu'il doit payer, ou d'abord ou successivement, tienne un juste rapport vis à vis du benefice qu'il veut acquérir. Enfin, il n'est pas non plus nécessaire que tous les membres

soyent à peu près du même age; mais on pourra admettre des personnes de quel age que ce soit, puisqu'il ne s'agit ici que de déterminer exactement le juste prix que chaque personne, de quelque age qu'elle soit, sera obligée de payer dans la caisse, par rapport aux benefices qu'elle a en vüe; d'où il est d'abord clair que des personnes d'un bas age payeront beaucoup moins que des vieillards.

10. Cela remarqué, tout revient à présent à la solution de ce problème:

L'age d'une personne étant donné, qui soit $= a$ ans, de même que la somme que la caisse doit payer après sa mort, que nous supposerons constamment de 100 *Roubles, déterminer le prix qu'elle sera tenüe de payer, ou tout à la fois à son entrée ou successivement, selon les règles de la plus sévère équité.*

11. D'abord, il faut supposer q'un tel établissement soit en état de mettre à profit les sommes qui lui seront fournies dans la caisse, que nous mettrons ici à six pour cent. Cette supposition est absolument nécessaire pour diminuer les prix que chacun sera obligé de payer dans chaque cas, qui, sans cette condition, deviendroient trop considérables pour qu'un tel établissement fût gouté du public. Ainsi, chaque somme de 100 Roubles fournie dans la caisse sera augmentée pendant un an à 106 Roubles. Or, pour la commodité du calcul, nous poserons $\frac{106}{100} = \lambda$, d'où il s'ensuit qu'une somme quelconque S deviendra, après n ans, $= \lambda^n S$. Or, réciproquement aussi, une somme $= S$ que l'établissement doit payer après n ans n'auroit, à présent, que la valeur

$$\frac{S}{\lambda^n}.$$

12. Puisque l'age de la personne en question est posé $= a$ ans, pour déterminer plus surement le prix qu'elle sera obligée de payer, nous supposerons qu'il se présente en même temps un grand nombre de personnes d'un pareil age, que nous désignerons par la lettre N; et en faisant usage des caractères employés dans les recherches sur l'établissement d'une caisse pour des veuves [§ 4 et § 6 de la première partie], le nombre de ceux qui vivront encore après un an sera

$$= \frac{(a+1)}{(a)} N,$$

après deux ans

$$= \frac{(a+2)}{(a)} N$$

et en général après n ans

$$= \frac{(a+n)}{(a)} N.$$

Or, sur les valeurs numériques de ces caractères, on n'a qu'à consulter la table rapportée au § 5 dans les dites recherches.

13. Puisque nous venons de parler d'un double payement, qui doit se faire ou d'abord au commencement ou successivement tous les ans, pour ajuster nos calculs à l'un et l'autre, nous supposerons que la personne proposée paye d'abord dans la caisse la somme $= x$ et ensuite encore tous les ans une somme $= z$, tant qu'elle sera en vie; et il faudra déterminer ces deux quantités x et z en sorte qu'elles se trouvent conjointement dans un parfait équilibre avec la valeur présente de la somme de 100 Roubles que la caisse sera obligée de lui payer après sa mort. Or, ayant ainsi déterminé ces quantités selon les règles de la plus parfaite équité, on comprend aisément que, pour les mettre en pratique, il faut les augmenter de quelques pourcent, tant à cause des fraix que l'établissement exige que pour faire face aux événemens extraordinaires qui pourroient arriver.

14. Poursuivons à présent les N personnes mentionnées ci-dessus, pendant tout le cours de leur vie, d'une année à l'autre; et d'abord à leur entrée, elles auront payé à la caisse la somme $= Nx$, puisque nous supposons que chacune paye d'abord la somme $= x$, et ainsi, l'argent comptant qui se trouve dès le commencement dans la caisse sera

$$Nx;$$

et nous supposons que cette somme puisse être d'abord si bien placée qu'on en puisse retirer tous les ans six pour cent.

15. Passons à l'année suivante, où l'age de nos personnes sera $= a + 1$, et partant, le nombre de ceux qui seront encore en vie

$$= \frac{(a+1)}{(a)} N;$$

d'où il s'ensuit que le nombre des morts pendant la première année sera

$$\left(1 - \frac{(a+1)}{(a)}\right) N.$$

Donc, à chacun de ceux-ci la caisse étant obligée de payer 100 Roubles, toute la dépense de cette année sera

$$100\left(1 - \frac{(a+1)}{(a)}\right) N$$

Roubles, laquelle doit être payée sur-le-champ à la mort de chaque intéressant. D'où l'on comprend qu'on ne la sçauroit diminuer sous le titre des intérêts; de sorte que cette dépense, réduite au commencement, sera encore

$$100\left(1 - \frac{(a+1)}{(a)}\right) N.$$

Or, puisque chacun des vivans paye de nouveau la somme $= z$, cette nouvelle recette, étant réduite au commencement, ne vaudra que

$$\frac{(a+1)}{(a)} \cdot \frac{Nz}{\lambda},$$

qu'il faut par conséquent ajouter au fond principal Nx.

16. Puisque, au commencement de la seconde année, le nombre des vivans est $\frac{(a+1)}{(a)} N$, et à la fin $= \frac{(a+2)}{(a)} N$, il en sera mort pendant le cours de cette année

$$\frac{(a+1)-(a+2)}{(a)} N$$

et partant, la dépense de la caisse à leur égard, étant réduite au commencement à cause des intérêts d'un an, doit être estimée à

$$\frac{100}{\lambda} \cdot \frac{(a+1)-(a+2)}{(a)} N.$$

Or, puisque chacun des vivans paye à la fin de cette année encore la somme z, cette recette, étant réduite au commencement à cause de l'intérêt pour deux ans, doit être évaluée à

$$\frac{(a+2)}{(a)} \cdot \frac{Nz}{\lambda^2}.$$

17. Nous voilà à présent au commencement de la troisième année, où le nombre des membres vivans est $\frac{(a+2)}{(a)}N$. Donc, puisque leur nombre à la fin de cette année est $\frac{(a+3)}{(a)}N$, il en sera mort cependant

$$\frac{(a+2)-(a+3)}{(a)}N,$$

dont chacun coute 100 Roubles à la caisse; d'où cette dépense entière, étant réduite au commencement, sera

$$\frac{100}{\lambda^2}\cdot\frac{(a+2)-(a+3)}{(a)}N.$$

Or, de ceux qui seront encore en vie, puisque chacun paye de nouveau la somme $= z$, cette nouvelle recette, étant réduite au commencement, sera

$$\frac{(a+3)}{(a)}\cdot\frac{Nz}{\lambda^3}.$$

18. A présent, étant au commencement de la quatrième année, où le nombre des membres encore vivans est $\frac{(a+3)}{(a)}N$, ce nombre sera à la fin de la quatrième année $\frac{(a+4)}{(a)}N$, de sorte que le nombre de ceux qui seront morts cette année sera

$$\frac{(a+3)-(a+4)}{(a)}N,$$

dont chacun coutant à la caisse 100 Roubles, cette dépense, étant réduite au commencement, doit être evalüée à

$$\frac{100}{\lambda^3}\cdot\frac{(a+3)-(a+4)}{(a)}N.$$

Or, les survivans, payant chacun z, fourniront à la caisse une nouvelle recette qui, réduite au commencement, se trouve

$$=\frac{(a+4)}{(a)}\cdot\frac{Nz}{\lambda^4}.$$

19. Ce détail suffira pour nous donner à connoître les loix de la progression tant des recettes que des dépenses, qu'on doit continuer jusqu'à ce que toutes ces personnes seront mortes, ce qu'on peut supposer arriver à l'age de 95 ans; car il n'importeroit presque rien, si on vouloit éloigner d'avantage ce terme. Considérons donc d'abord la recette toute entière; et puisque le fond principal $= Nx$, il y faut ajouter tous les accroissemens annuels qui, étant réduits à l'époque du commencement, constitueront la progression suivante:

$$\frac{Nz}{(a)}\left(\frac{(a+1)}{\lambda}+\frac{(a+2)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)}{\lambda^3}+\frac{(a+4)}{\lambda^4}+\frac{(a+5)}{\lambda^5}+\text{etc.}\right).$$

Donc si nous posons, pour abréger,

$$P=\frac{(a+1)}{\lambda}+\frac{(a+2)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)}{\lambda^3}+\frac{(a+4)}{\lambda^4}+\text{etc.},$$

la recette toute entière de la caisse sera

$$Nx+\frac{NPz}{(a)},$$

à laquelle doit devenir égale la dépense toute entière réduite à la même époque.

20. Assemblons donc toutes les dépenses annuelles, qui sont déjà réduites à l'époque du commencement, et nous obtiendrons la progression suivante

$$\frac{100N}{(a)}\left((a)-(a+1)+\frac{(a+1)-(a+2)}{\lambda}+\frac{(a+2)-(a+3)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)-(a+4)}{\lambda^3}+\text{etc.}\right)$$

Cette expression se décompose d'elle-même en deux progressions, l'une positive et l'autre negative,

$$\frac{100N}{(a)}\left((a)+\frac{(a+1)}{\lambda}+\frac{(a+2)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)}{\lambda^3}+\frac{(a+4)}{\lambda^4}+\text{etc.}\right),$$

$$-\frac{100N}{(a)}\left((a+1)+\frac{(a+2)}{\lambda}+\frac{(a+3)}{\lambda^2}+\frac{(a+4)}{\lambda^3}+\text{etc.}\right).$$

Or cette forme, par la valeur de P introduite [§ 19], pourra être réduite à celle-ci

$$\big((a) + P - \lambda P\big)\frac{100N}{(a)}.$$

21. Puisque, selon les règles de l'équité, la recette toute entière doit être égale à la dépense, nous aurons cette équation à remplir

$$Nx + \frac{NPz}{(a)} = \frac{100N}{(a)}\big((a) + (1-\lambda)P\big),$$

qui, étant divisée par N et multipliée par (a), se réduit à celle-ci

$$(a)x + Pz = 100\big((a) + (1-\lambda)P\big) = 100(a) - 6P.$$

C'est donc de cette équation qu'il faut déterminer convenablement les deux lettres x et z. Car, si l'on veut payer toute la somme à la fois, on n'a qu'à mettre $z = 0$; et si l'on [veut] payer tous les ans également, on doit mettre $x = z$; et de là, on comprend aisément qu'on peut combiner ce payement différent, à volonté.

22. Tout nôtre calcul se trouve donc réduit à chercher la véritable valeur de la quantité P pour chaque age proposé a. Or, P étant exprimé par une série dont le dernier terme peut être supposé $\frac{(95)}{\lambda^{95-a}}$, si nous renversons cette série en commençant par le dernier terme, nous aurons

$$P = \frac{(95)}{\lambda^{95-a}} + \frac{(94)}{\lambda^{94-a}} + \frac{(93)}{\lambda^{93-a}} + \cdots + \frac{(a+1)}{\lambda},$$

et réduisant toutes ces fractions au même dénominateur λ^{95-a}, nous aurons

$$P = \frac{1}{\lambda^{95-a}}\big((95) + (94)\lambda + (93)\lambda^2 + (92)\lambda^3 + \cdots + (a+1)\lambda^{94-a}\big)$$

et partant, si nous posons la somme de cette série $= Q$, de sorte que

$$Q = (95) + (94)\lambda + (93)\lambda^2 + \cdots + (a+1)\lambda^{94-a},$$

on en déduira aisément la valeur

$$P = \frac{Q}{\lambda^{95-a}}.$$

23. Maintenant donc, il ne reste qu'à chercher la somme de cette série Q pour chaque age proposé a; où il est évident que, si l'age proposé a étoit de 94 ans, on auroit

$$Q = (95);$$

mais s'il y avoit $a = 93$ ans, il seroit

$$Q = (95) + (94)\lambda,$$

et ainsi de suite. Rassemblant donc successivement les termes de cette série, on trouvera la valeur de la quantité Q pour tous les ages proposés et de là on tirera toujours $P = \frac{Q}{\lambda^{95-a}}$.

24. Mais il n'est pas même nécessaire de poursuivre ces calculs d'une année à l'autre pour tous les ages; mais on pourra se contenter de prendre 5 termes ensemble, en ne prennant que le terme moyen 5 fois; et ainsi au lieu des cinq premiers termes

$$(95) + (94)\lambda + (93)\lambda^2 + (92)\lambda^3 + (91)\lambda^4$$

on mettra le quintuple du terme moyen, $5(93)\lambda^2$. Par ce moyen, le nombre des termes qu'on doit ajouter ensemble sera réduit à la cinquième partie, puisqu'on aura

$$Q = 5(93)\lambda^2 + 5(88)\lambda^7 + 5(83)\lambda^{12} + \cdots + 5(a+3)\lambda^{93-a},$$

d'où l'on tire d'abord $Q = 5R$, et partant

$$P = \frac{5R}{\lambda^{95-a}},$$

en mettant la série

$$(93)\lambda^2 + (88)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} + \text{etc.} = R.$$

Or maintenant, on ne prendra pour a que des nombres divisibles par 5, qui seront, en descendant, 90, 85, 80, 75 etc., qu'on pourra continuer jusqu'aux enfans nouvellement nés.

25. Ensuite, ayant trouvé la valeur de la quantité P pour chaque age proposé, il ne reste, pour résoudre nôtre question, que de développer les deux cas principaux par rapport au payement que chaqu'un doit faire. Car, si

l'on veut que chacun paye d'abord au commencement le prix entier de la somme de 100 Roubles que la caisse doit payer après sa mort, on n'a qu'à supposer $z=0$, et le prix cherché sera

$$x = 100 - \frac{6P}{(a)}.$$

Mais si l'on veut distribuer le payement à faire par tous les ans de la vie, on n'a qu'à mettre $x=z$, et cette contribution annuelle sera

$$z = \frac{100(a) - 6P}{(a)+P}.$$

Or, ayant développé ces cas principaux pour chaque age, on les peut meler ensemble, comme chaqu'un jugera à propos. Ainsi, l'on peut exiger à l'entrée la somme $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ et, outre cela, encore tous les ans la somme $\frac{1}{2}z$ jusqu'à la mort.

26. Quoique nous avons supposé qu'un tel établissement puisse faire valoir ses fonds à 6 pour cent par an, il faut pourtant considérer que la caisse doit toujours être fournie d'une somme considérable d'argent comptant, pour être en état de payer sur le champ les 100 Roubles stipulés à chaque cas de mort, et que cette somme ne puisse produire de l'intérêt. D'où nous serons obligés de diminuer les intérêts fixés ci-dessus, et partant, nous les fixerons dans la suite à 5 pour cent, de sorte que nous aurons $\lambda = \frac{105}{100}$. Et de cette manière, nous procurerons à la caisse un avantage assés considérable pour qu'elle puisse soutenir les frais qu'un tel établissement demande, de sorte que, dans la suite, il suffira de hausser tant soit peu les prix que nôtre calcul nous découvrit, pour mettre la caisse entièrement à l'abri des événemens extraordinaires. C'est sur ces principes qu'on a construit la table suivante, qui contient le resultat du calcul exposé dans un mémoire latin qui a pour titre *Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis. Quantum duo coniuges persolvere debeant, ut suis haeredibus, post utriusque mortem, certa argenti summa persolvatur?* [1])

---

1) C'est le mémoire 599 de ce volume. Cependant, la citation d'EULER est inexacte. Tandisque dans le présent travail EULER traite exclusivement l'assurance simple au décès reposant sur une seule tête et que, par conséquent, la table ci-dessous donne $100\,A_x$ et $100\,P_x$, il expose dans le mémoire latin en question la théorie de l'assurance au décès reposant sur un couple

TABLE[1])

qui marque, pour chaque age, combien il faut payer, ou à la fois ou successivement tous les ans, pour recevoir à la mort la somme de 100 Roubles.

Age de la personne	Prix à payer à la fois		Prix à payer tous les ans	
Ans	R.	C.	R.	C.
0	42	65	3	42
5	23	10	1	41
10	22	50	1	36
15	24	56 [2])	1	53 [3])
20	27	40	1	76
25	30	18	2	2
30	31	52	2	15 [3])
35	33	71 [2])	2	36 [3])
40	36	80	2	70
45	41	34	3	25
50	46	6	3	91
55	50	91	4	71
60	56	17	5	75
65	62	14 [2])	7	25
70	68	59 [2])	9	42
75	75	85 [2])	13	1 [3])
80	82	9 [2])	17	92 [3])
85	88	29	26	42 [3])
90	91	90 [2])	35	7 [3])

qui s'éteint au dernier décès; il y explique donc la manière de déterminer $A_{\overline{xy}}$ et $P_{\overline{xy}}$; voir la préface de l'éditeur. EULER, qu'il s'agît de ses travaux personnels ou de ceux d'autres géomètres, avait l'habitude de toujours citer de mémoire, et ces citations étaient rarement exactes, comme le reconnaît P. H. FUSS dans une lettre à JACOBI, du 8/20 novembre 1847; voir P. STÄCKEL und W. AHRENS, *Der Briefwechsel zwischen C. G. J. JACOBI und P. H. VON FUSS über die Herausgabe der Werke LEONHARD EULERS.* Leipzig 1908, p. 40.

1) Cette table contient les chiffres corrigés. L. G. D.

2) Edition originale: 24,73; 33,86; 62,15; 68,60; 75,86; 82,12; 91,89. L. G. D.

3) Edition originale: 1,54; 2,14; 2,39; 13,02; 17,95; 26,41; 35,06. L. G. D.

PLAN
D'UNE NOUVELLE ESPECE
DE TONTINE[1]

Cette nouvelle espèce de Tontine diffère tant de la commune et lui est si préférable que ce n'est qu'à l'égard des rentes croissantes que nous la nommons ainsi. On sçait que dans les Tontines ordinaires, le nombre des intéressans est borné à un certain nombre de personnes à peu près du même age, dont chacune dépose dans la caisse une somme d'argent, pour acquérir une portion des intérêts du fond entier, augmentant à mesure que quelques-uns des membres de la société décèdent; pendant que le fond même doit échoir à l'État, dès que la société est entièrement éteinte.

Il est naturel qu'un État ait quelques fois des besoins et que, lors de certaines circonstances, le défaut d'argent et la nécessité d'en avoir l'obligent de recourir à cet expédient de finance; mais il est surprennant qu'on ne soit tombé encore sur d'autres moyens qui se recommandassent au Public par autant d'avantages apparens et encore plus de réels. Les Tontines ordinaires se recommandent, à la vérité, au Public par les rentes énormes dont peuvent jouir les derniers membres qui ont survécu aux autres, et à l'État par cette disposition en vertu de laquelle il devient pour ainsi dire l'héritier d'un grand nombre de familles; mais ces avantages sont contrebalancés par l'incertitude de l'intéressant, qui ne peut jamais sçavoir d'avance combien il recevra l'année prochaine pour son capital mis à fond perdu; par la limitation à un certain nombre de personnes, aussi désavantageuse à l'État que désagréable au Public; par la nécessité où se trouvent ceux qui voudroient bien y prendre part, d'attendre un certain age pour pouvoir entrer et être rangés en classes; et enfin, par la détermination de la somme qu'on doit em-

1) Voir la note 1 p. 183. L. G. D.

ployer, qui n'est pas moins préjudiciable à l'État garant qu'à la société même, vu qu'une telle contrainte n'est pas propre à encourager un grand nombre de personnes dont l'état et la fortune est si différente.

Après ces réflexions générales sur les Tontines ordinaires, nous aurons tout lieu de nous flatter que le plan suivant sera favorablement reçu; vu qu'un établissement fondé sur ces principes procureroit à l'État des avantages aussi réels que permanens et sera recommandable au Public à plusieurs égards, en tant qu'on y pourra admettre toutes les personnes, de tel age et en tel nombre qu'on voudra, et que chaque intéressant sçaura par avance sur combien de revenû il peut compter chaque année, depuis la déposition de son capital, dont la somme dépend entièrement de sa volonté et peut être double, triple, quadruple etc., ou être réduite au quart, au tiers. ou à la moitié de celle qui a été supposée dans la table suivante.

TABLE[1])

qui marque combien une personne d'un age quelconque peut toucher d'intérêts croissans annuels pour un capital de 1000 Roubles mis à fond perdû, à la manière des Tontines.

Après années	Age de la personne											
	0		5		10		15		20		25	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
1	62	20	50	70	50	40	50	40	50	50	50	80
2	65	10	51	50	50	90	50	90	51	10	51	70
3	67	90	52	30	51	30	51	30	51	70	52	60
4	70	50	53	0	51	80	51	80	52	30	53	50
5	72	60	53	80	52	30	52	30	52	90	54	40
6	73	80	54	30	52	70	52	90	53	80	55	30
7	75	0	54	80	53	20	53	50	54	70	56	20
8	76	20	55	30	53	70	54	10	55	70	57	10
9	77	40	55	80	54	20	54	70	56	60	58	0
10	78	20	56	30	54	70	55	30	57	60	58	90
11	78	90	56	80	55	30	56	30	58	50	59	90
12	79	60	57	30	55	90	57	30	59	50	60	90
13	80	30	57	80	56	60	58	20	60	40	61	90
14	81	10	58	30	57	20	59	20	61	40	62	80
15	81	80	58	90	57	80	60	20	62	40	63	80
16	82	50	59	50	58	90	61	20	63	40	64	90
17	83	30	60	20	59	90	62	20	64	40	65	90
18	84	0	60	90	60	90	63	20	65	50	66	90
19	84	80	61	60	62	0	64	20	66	50	67	90
20	85	60	62	30	63	0	65	20	67	60	69	0
21	86	50	63	40	64	0	66	30	68	60	70	40
22	87	50	64	50	65	10	67	40	69	70	71	90
23	88	50	65	60	66	10	68	50	70	80	73	30
24	89	50	66	70	67	20	69	60	71	90	74	80
25	90	50	67	80	68	20	70	70	73	0	76	20
26	92	20	68	90	69	40	71	80	74	50	78	20

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale. Voir la note 1 p. 238.

La formule indiquée dans la théorie p. 237 ne s'applique bien qu'aux nombres de la deuxième colonne, où l'âge de la personne est zéro. On vérifie qu'Euler n'a calculé exactement qu'une partie des résultats et obtenu les autres par interpolation linéaire. L. G. D.

Après années	Age de la personne											
	0		5		10		15		20		25	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
27	93	80	70	10	70	50	72	90	76	0	80	30
28	95	40	71	20	71	70	74	10	77	50	82	30
29	97	0	72	30	72	80	75	20	79	10	84	40
30	98	60	73	50	73	90	76	30	80	60	86	50
31	100	20	74	70	75	10	77	90	82	80	89	40
32	101	90	75	90	76	30	79	50	85	0	92	30
33	103	50	77	10	77	50	81	10	87	10	95	20
34	105	10	78	30	78	60	82	70	89	30	98	10
35	106	80	79	60	79	80	84	30	91	50	101	10
36	108	60	80	90	81	50	86	60	94	60	105	40
37	110	40	82	10	83	20	88	90	97	60	109	70
38	112	10	83	40	84	80	91	20	100	70	114	0
39	113	90	84	70	86	50	93	40	103	80	118	30
40	115	70	86	0	88	20	95	70	106	90	122	60
41	117	60	87	80	90	60	98	90	111	50	129	60
42	119	40	89	60	93	0	102	20	116	0	136	60
43	121	20	91	40	95	40	105	40	120	60	143	60
44	123	10	93	20	97	70	108	60	125	20	150	70
45	125	0	95	0	100	10	111	90	129	70	157	70
46	127	60	97	50	103	50	116	60	137	10	170	30
47	130	20	100	10	106	80	121	40	144	50	182	90
48	132	80	102	70	110	20	126	20	152	0	195	50
49	135	40	105	20	113	60	130	90	159	40	208	10
50	138	10	107	80	117	0	135	70	166	80	220	80
51	141	80	111	40	122	0	143	50	180	20	253	30
52	145	50	115	0	127	0	151	20	193	50	285	80
53	149	20	118	70	132	0	159	0	206	90	318	30
54	153	0	122	30	137	0	166	80	220	20	350	80
55	156	70	126	0	142	0	174	50	233	60	383	30
56	162	0	131	30	150	10	188	50	267	90	479	10
57	167	20	136	70	158	20	202	40	302	30	574	90
58	172	50	142	10	166	30	216	40	336	70	670	80

Après années	Age de la personne											
	0		5		10		15		20		25	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
59	177	80	147	40	174	40	230	40	371	10	766	60
60	183	10	152	80	182	50	244	40	405	50	862	50
61	190	90	161	60	197	10	280	30	506	90	1380	0
62	198	70	170	30	211	70	316	30	608	30	1897	50
63	206	50	179	0	226	30	352	30	709	70	2415	0
64	214	30	187	80	240	90	388	30	811	10	2932	50
65	222	20	196	50	255	50	424	30	912	50	3450	0
66	234	90	212	20	293	10	530	30	1460	0		
67	247	60	228	0	330	80	636	40	2007	50		
68	260	20	243	70	368	40	742	50	2555	0		
69	272	90	259	40	406	10	848	50	3102	50		
70	285	70	275	20	443	70	954	60	3650	0		
71	308	55	315	70	554	60	1527	40				
72	331	40	356	20	665	60	2100	30				
73	354	20	396	70	776	50	2673	10				
74	377	10	437	20	887	40	3245	90				
75	400	0	477	70	998	40	3818	70				
76	458	80	597	20	1597	40						
77	517	70	716	60	2196	50						
78	576	60	836	0	2795	60						
79	635	50	955	50	3394	60						
80	694	40	1075	0	3993	70						
81	868	0	1720	0								
82	1041	60	2365	0								
83	1215	20	3010	0								
84	1388	80	3655	0								
85	1562	50	4300	0								
86	2500	0										
87	3437	50										
88	4375	0										
89	5312	50										
90.	6250	0										

Après années	Age de la personne											
	30		35		40		45		50		55	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
1	50	80	50	80	50	80	51	0	51	30	51	60
2	51	60	51	60	51	60	52	10	52	70	53	30
3	52	40	52	40	52	40	53	10	54	0	55	0
4	53	30	53	30	53	20	54	20	55	40	56	70
5	54	10	54	10	54	0	55	20	56	70	58	40
6	55	0	55	0	55	10	56	70	58	60	60	90
7	55	90	55	80	56	20	58	20	60	50	63	40
8	56	80	56	70	57	30	59	70	62	40	65	80
9	57	70	57	60	58	50	61	20	64	30	68	30
10	58	60	58	50	59	60	62	70	66	30	70	80
11	59	60	59	70	61	20	64	80	69	10	74	90
12	60	50	60	90	62	80	66	90	71	90	78	90
13	61	50	62	10	64	40	69	0	74	70	83	0
14	62	40	63	40	66	10	71	10	77	60	87	0
15	63	30	64	60	67	70	73	20	80	40	91	10
16	64	70	66	30	69	90	76	30	85	0	98	40
17	66	0	68	10	72	20	79	50	89	60	105	70
18	67	30	69	80	74	50	82	60	94	20	113	0
19	68	70	71	60	76	80	85	70	98	80	120	30
20	70	0	73	30	79	10	88	80	103	40	127	50
21	71	90	75	80	82	40	93	90	111	60	146	30
22	73	70	78	20	85	80	99	0	119	90	165	10
23	75	60	80	70	89	20	104	10	128	20	183	90
24	77	50	83	20	92	60	109	20	136	50	202	70
25	79	40	85	70	96	0	114	20	144	80	221	50
26	82	10	89	30	101	40	123	40	166	10	276	90
27	84	80	93	0	106	90	132	50	187	40	332	20
28	87	50	96	60	112	40	141	70	208	70	387	60
29	90	10	100	30	117	90	150	80	230	0	443	0
30	92	80	104	0	123	40	160	0	251	30	498	40

Après années	Age de la personne											
	30		35		40		45		50		55	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
31	96	80	109	90	133	20	183	50	314	20	797	40
32	100	70	115	80	143	10	207	10	377	0	1096	50
33	104	70	121	80	153	0	230	60	439	90	1395	60
34	108	70	127	70	162	90	254	20	502	70	1694	60
35	112	60	133	70	172	80	277	70	565	60	1993	70
36	119	0	144	30	198	20	347	20	905	0		
37	125	50	155	10	223	60	416	60	1244	30		
38	131	90	165	70	249	10	486	0	1583	70		
39	138	40	176	40	274	50	555	50	1923	10		
40	144	80	187	20	300	0	625	0	2262	40		
41	156	40	214	70	375	0	1000	0				
42	168	0	242	30	450	0	1375	0				
43	179	60	269	80	525	0	1750	0				
44	191	20	297	40	600	0	2125	0				
45	202	80	325	0	675	0	2500	0				
46	232	60	406	20	1080	0						
47	262	50	487	50	1485	0						
48	292	30	568	70	1890	0						
49	322	20	650	0	2295	0						
50	352	0	731	20	2700	0						
51	440	10	1170	0								
52	528	10	1608	70								
53	616	10	2047	50								
54	704	10	2486	20								
55	792	10	2925	0								
56	1267	40										
57	1742	80										
58	2218	10										
59	2693	40										
60	3168	70										

Après années	Age de la personne													
	60		65		70		75		80		85		90	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
1	52	10	52	80	54	0	57	30	62	50	80	0	120	0
2	54	20	55	70	58	0	64	70	75	0	110	0	190	0
3	56	30	58	50	62	0	72	0	87	50	140	0	260	0
4	58	50	61	40	66	0	79	40	100	0	170	0	330	0
5	60	60	64	20	70	0	86	80	112	50	200	0	400	0
6	64	10	69	40	80	30	108	50	180	0	480	0		
7	67	50	74	50	90	60	130	20	247	50	760	0		
8	71	0	79	70	100	90	151	90	315	0	1040	0		
9	74	50	84	80	111	20	173	60	382	50	1320	0		
10	78	0	90	0	121	50	195	30	450	0	1600	0		
11	84	20	103	20	151	90	312	40	1080	0				
12	90	40	116	50	182	20	429	60	1710	0				
13	96	70	129	70	212	60	546	80	2340	0				
14	102	90	143	0	243	0	664	0	2970	0				
15	109	20	156	20	273	40	781	20	3600	0				
16	125	30	195	30	437	40								
17	141	40	234	30	601	50								
18	157	50	273	40	765	60								
19	173	60	312	40	929	60								
20	189	80	351	50	1093	70								
21	237	10	506	20										
22	284	50	660	90										
23	331	80	815	60										
24	379	20	970	20										
25	426	50	1125	0										
26	682	40												
27	938	40												
28	1194	30												
29	1450	20												
30	1706	20												

Les nombres de ces tables ont été calculés sur les règles de la mortalité, rapportées dans les remarques sur l'établissement des rentes pour les veuves[1]), de la manière suivante. Posant en général a l'age de la personne en question qui paye d'abord dans la caisse la somme de 1000 Roubles, on n'a qu'à considérer un grand nombre de semblables personnes du même age, dont le nombre soit $= N$; de sorte que toute la somme fournie par elles à la caisse soit $1000\,N$ Roubles, dont les intérêts annuels seront $50\,N$ Roubles, qui doivent être partagés chaque année parmi le nombre de ceux qui sont encore en vie. Or, par les règles de la mortalité établies ci-dessus, le nombre de ceux qui seront encore en vie après n ans sera $\frac{(a+n)}{(a)}N$. Donc, partageant l'intérêt entier, $50\,N$ Roubles, par ce nombre, il reviendra dans ce temps à chacun des vivans la somme

$$= \frac{50(a)}{(a+n)},$$

qui demeurant toujours la même, quel que soit le nombre N, il est clair que la caisse ne perdra rien en s'engageant à payer à la personne en question, après n ans écoulés, cette somme de $\frac{50(a)}{(a+n)}$ Roubles. Et c'est précisément sur ces formules que les tables précédentes ont été calculées.

Mais, comme les règles mentionnées de la mortalité demeurent toujours assujetties à quelque incertitude, il sera nécessaire de diminuer un peu les rentes rapportées dans ces tables, à fin que la caisse n'ait rien à craindre de cette incertitude. Pour cet effet, on peut établir que la cinquième partie de tous les membres décédens tourne au profit de l'établissement, et partant tous les nombres de la table précédente doivent être diminués de la cinquième partie de l'excès de chaque nombre sur 50.

Ainsi, en établissant cette règle, il sera aisé de rectifier la table précédente et de l'ajuster à l'exécution, en diminuant d'un Rouble les rentes qui montent à 55 Roubles, de deux Roubles celles qui montent à 60, de 3 Roubles celles de 65, et ainsi de suite; et puisqu'on comprend aisément qu'une précision scrupuleuse ne sçauroit avoir lieu, on pourra arrondir les nombres qui en résultent, pour donner plus de régularité à la progression de ces rentes.

Enfin, nous avons continué ces tables jusqu'à l'age de 95 ans, tant parceque nous avons partout établi ce terme comme le dernier de la vie humaine, que pour faire voir de quelle manière l'accroissement des rentes se fait pendant les cinq dernières années.

---

1) Voir la première partie du présent mémoire. L. G. D.

TABLE RECTIFIEE A L'USAGE PUBLIC [1])

qui marque combien une personne d'un age quelconque peut toucher d'intérêts croissans annuels, pour un capital de 1000 Roubles, mis à fond perdû, à la manière des Tontines.

Après années	Age de la personne											
	0		5		10		15		20		25	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
1	59	70	50	60	50	30	50	30	50	40	50	70
2	62	0	51	20	50	60	50	60	50	80	51	40
3	64	30	51	80	51	0	51	0	51	30	52	10
4	66	40	52	40	51	40	51	40	51	80	52	80
5	68	0	53	0	51	80	51	80	52	30	53	50
6	68	90	53	40	52	20	52	30	53	10	54	20
7	69	80	53	80	52	60	52	80	53	90	54	90
8	70	70	54	20	53	0	53	30	54	70	55	60
9	71	60	54	60	53	40	53	80	55	40	56	30
10	72	50	55	0	53	70	54	20	56	10	57	10
11	73	0	55	40	54	20	55	0	56	90	57	90
12	73	60	55	80	54	70	55	80	57	70	58	70
13	74	10	56	20	55	20	56	60	58	50	59	50
14	74	70	56	60	55	70	57	40	59	20	60	30
15	75	40	57	10	56	20	58	10	59	90	61	0
16	76	0	57	60	57	0	58	90	60	70	61	80
17	76	60	58	10	57	80	59	70	61	50	62	60
18	77	20	58	60	58	60	60	50	62	30	63	40
19	77	80	59	20	59	50	61	30	63	10	64	30
20	78	40	59	80	60	40	62	10	64	0	65	20
21	79	20	60	70	61	0	63	0	64	90	66	40
22	80	0	61	60	61	80	63	90	65	80	67	60
23	80	80	62	50	62	70	64	80	66	70	68	80
24	81	60	63	40	63	60	65	70	67	60	69	90
25	82	40	64	20	64	50	66	50	68	40	71	0
26	83	70	65	10	65	20	67	40	69	60	72	60
27	85	0	66	0	65	90	68	30	70	80	74	20
28	86	30	66	90	66	60	69	20	72	0	75	80

1) Cette table reproduit les chiffres de l'édition originale. Les bases statistiques et financières utilisées par Euler n'étant plus employées de nos jours par les compagnies d'assurances, la vérification complète de la table eût exigé un travail hors de proportion avec l'utilité pratique. Ces chiffres conservent tout leur intérêt historique; voir la note 1 p. 231. L. G. D.

Après années	Age de la personne											
	0		5		10		15		20		25	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
29	87	60	67	80	67	40	70	10	73	20	77	50
30	88	90	68	80	68	20	71	0	74	50	79	20
31	90	20	69	80	69	10	72	20	76	20	81	50
32	91	50	70	80	70	0	73	50	77	90	83	80
33	92	80	71	80	70	90	74	80	79	60	86	10
34	94	10	72	80	71	80	76	10	81	30	88	40
35	95	40	73	70	72	80	77	40	83	20	90	80
36	96	80	74	70	74	10	79	20	85	70	94	30
37	98	20	75	70	75	40	81	0	88	20	97	80
38	99	60	76	70	76	70	82	80	90	70	101	30
39	101	0	77	70	78	0	84	60	93	10	104	70
40	102	50	78	80	79	20	86	50	95	50	108	10
41	104	0	80	20	81	0	89	10	99	20	113	70
42	105	50	81	60	82	80	91	70	102	90	119	30
43	107	0	83	0	84	60	94	30	106	60	124	90
44	108	50	84	50	86	40	96	90	110	20	130	50
45	110	0	86	0	88	10	99	50	113	80	136	20
46	112	10	88	0	90	60	103	30	119	70	146	30
47	114	20	90	0	93	10	107	10	125	60	156	40
48	116	30	92	0	95	60	110	90	131	50	166	50
49	118	40	94	10	98	20	114	70	137	40	176	60
50	120	50	96	20	100	90	118	50	143	40	186	60
51	123	40	99	10	104	60	124	70	154	10	212	60
52	126	30	102	0	108	30	130	90	164	80	238	60
53	129	30	104	90	112	0	137	10	175	50	264	60
54	132	30	107	80	115	80	143	30	186	20	290	60
55	135	30	110	80	119	60	149	60	196	90	316	60
56	140	80	115	10	126	90	160	80	224	40	393	30
57	146	30	119	40	134	20	172	0	251	90	470	0
58	151	80	123	70	141	50	183	20	279	40	546	70
59	157	30	128	0	148	80	194	40	306	90	623	40
60	162	70	132	20	156	0	205	50	334	40	700	0
61	167	70	139	20	167	70	234	30	415	50	1114	0
62	172	70	146	20	179	40	263	10	496	60	1528	0

Après années	Age de la personne											
	0		5		10		15		20		25	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
63	177	70	153	20	191	10	291	90	577	70	1942	0
64	182	70	160	20	202	80	320	70	658	80	2356	0
65	187	70	167	20	214	40	349	40	740	0	2770	0
66	197	90	179	80	244	50	434	20	1178	0	3690	0
67	208	10	192	40	274	60	519	0	1616	0	5530	0
68	218	30	205	0	304	70	603	90	2054	0	7350	0
69	228	40	217	60	334	80	688	80	2492	0	11050	0
70	238	50	230	10	364	90	773	70	2930	0	22090	0
71	256	80	262	50	453	70	1232	20	3903	0		
72	275	10	294	90	542	50	1690	70	5850	0		
73	293	40	327	30	631	30	2149	20	7769	0		
74	311	70	359	70	720	0	2607	60	11690	0		
75	330	0	392	10	808	70	3065	0	23370	0		
76	377	10	487	70	1287	90	4083	0				
77	424	20	583	30	1767	10	6120	0				
78	471	30	678	90	2246	30	8156	0				
79	518	40	774	50	2725	60	12230	0				
80	565	50	870	0	3204	90	24450	0				
81	704	40	1386	0	4270	0						
82	843	30	1902	0	6400	0						
83	982	20	2418	0	8530	0						
84	1121	10	2934	0	12790	0						
85	1260	0	3450	0	25570	0						
86	2010	0	4596	0								
87	2760	0	6890	0								
88	3510	0	9183	0								
89	4260	0	13720	0								
90	5010	0	27530	0								
91	6676	0										
92	10010	0										
93	13342	0										
94	20010	0										
95	40010	0										

Après années	Age de la personne											
	30		35		40		45		50		55	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
1	50	60	50	60	50	60	50	80	51	10	51	30
2	51	20	51	20	51	20	51	60	52	20	52	60
3	51	90	51	80	51	80	52	40	53	30	53	90
4	52	60	52	50	52	50	53	30	54	40	55	30
5	53	30	53	30	53	20	54	20	55	40	56	70
6	54	0	54	0	54	10	55	40	56	90	58	70
7	54	70	54	70	55	0	56	60	58	40	60	70
8	55	40	55	40	55	90	57	80	59	90	62	70
9	56	10	56	10	56	80	59	0	61	40	64	70
10	56	90	56	80	57	70	60	20	63	0	66	60
11	57	60	57	80	59	0	61	90	65	30	69	90
12	58	30	58	80	60	30	63	60	67	60	73	20
13	59	0	59	80	61	60	65	30	69	90	76	50
14	59	80	60	80	62	90	67	0	72	10	79	70
15	60	60	61	70	64	20	68	60	74	30	82	90
16	61	70	63	10	66	0	71	10	78	0	88	70
17	62	80	64	50	67	80	73	60	81	70	94	50
18	63	90	65	90	69	60	76	10	85	40	100	30
19	65	0	67	30	71	40	78	60	89	10	106	10
20	66	0	68	60	73	30	81	0	92	70	112	0
21	67	50	70	60	76	0	85	10	99	30	127	0
22	69	0	72	60	78	70	89	20	105	90	142	0
23	70	50	74	60	81	40	93	30	112	50	157	0
24	72	0	76	60	84	10	97	40	119	10	172	10
25	73	50	78	60	86	80	101	40	125	80	187	20
26	75	60	81	50	91	20	108	70	142	80	231	50
27	77	70	84	40	95	60	116	0	159	80	275	80
28	79	80	87	30	100	0	123	30	176	80	320	10
29	82	0	90	20	104	40	130	60	193	90	364	40
30	84	20	93	20	108	70	138	0	211	0	408	70
31	87	40	98	0	116	60	156	80	261	30	647	0
32	90	60	102	80	124	50	175	60	311	60	886	0
33	93	80	107	60	132	40	194	40	361	90	1125	0

Après années	Age de la personne											
	30		35		40		45		50		55	
	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
34	97	0	112	30	140	30	213	30	412	20	1364	0
35	100	10	117	0	148	20	232	20	462	50	1605	0
36	105	20	125	60	168	60	287	80	734	0	2137	0
37	110	30	134	20	189	0	343	40	1006	0	3202	0
38	115	40	142	80	209	40	399	0	1278	0	4264	0
39	120	60	151	30	229	70	454	50	1549	0	6390	0
40	125	80	159	80	250	0	510	0	1820	0	12770	0
41	135	10	181	80	310	0	810	0	2424	0		
42	144	40	203	80	370	0	1110	0	3630	0		
43	153	70	225	80	430	0	1410	0	4836	0		
44	163	0	247	90	490	0	1710	0	7250	0		
45	172	20	270	0	550	0	2010	0	14490	0		
46	196	10	335	0	874	0	2676	0				
47	220	0	400	0	1198	0	4010	0				
48	243	90	465	0	1522	0	5344	0				
49	267	80	530	0	1846	0	8010	0				
50	291	60	595	0	2170	0	16010	0				
51	362	0	946	0	2890	0						
52	432	40	1297	0	4330	0						
53	502	80	1648	0	5770	0						
54	573	20	1999	0	8650	0						
55	643	70	2350	0	17290	0						
56	1024	0	3130	0								
57	1404	0	4690	0								
58	1784	0	6250	0								
59	2164	0	9370	0								
60	2545	0	18730	0								
61	3390	0										
62	5080	0										
63	6770	0										
64	10150	0										
65	20290	0										

Après années	Age de la personne													
	60		65		70		75		80		85		90	
	R	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.	R.	C.
1	51	70	52	30	53	20	55	90	60	0	74	0	63	40
2	53	40	54	60	56	40	61	80	70	0	98	0	90	0
3	55	10	56	90	59	60	67	70	80	0	122	0	116	60
4	56	80	59	20	62	80	73	60	90	0	146	0	170	0
5	58	50	61	40	66	0	79	40	100	0	170	0	330	0
6	61	30	65	50	74	20	96	80	154	0	224	0		
7	64	10	69	60	82	40	114	20	208	0	330	0		
8	66	90	73	70	90	60	131	60	262	0	436	0		
9	69	70	77	80	98	90	148	90	316	0	650	0		
10	72	40	82	0	107	20	166	20	370	0	1290	0		
11	77	40	92	60	131	50	260	0	490	0				
12	92	40	103	20	155	80	353	80	730	0				
13	97	40	113	80	180	10	447	60	970	0				
14	102	40	124	40	204	40	541	30	1450	0				
15	107	40	135	0	228	70	635	0	2890	0				
16	118	30	166	20	359	0	844	0						
17	129	20	197	40	490	0	1260	0						
18	140	10	228	60	622	0	1676	0						
19	151	0	259	90	754	0	2510	0						
20	161	80	291	20	885	0	5010	0						
21	199	70	415	0	1176	0								
22	237	60	539	0	1760	0								
23	275	50	663	0	2344	0								
24	313	40	787	0	3510	0								
25	351	20	911	0	7010	0								
26	556	0	1510	0										
27	761	0	2260	0										
28	966	0	3010	0										
29	1171	0	4510	0										
30	1376	0	9010	0										
31	1830	0												
32	2740	0												
33	3650	0												
34	5470	0												
35	10930	0												

Cette diminution des prix rapportés dans la première table doit mettre l'établissement entièrement à l'abri de tous les accidens extraordinaires et des suites facheuses qui pourroient naître de l'incertitude des observations et des registres de mortalité, et de leur diversité fondée sur la différence du climat et du genre de vie; parce qu'il est évident que toutes ces circonstances ne peuvent pas monter à $\frac{1}{5}$, comme nous avons supposé. Mais cette rectification ne rendra-t-elle point cet établissement moins recommandable? Pour répondre à cela, on n'a qu'à considérer que la sureté de la caisse, pour laquelle cette correction a été apportée, doit entrer en compte avant tout; ensuite, qu'aux petits prix elle est presque insensible et que, malgré cela, il reste aux grands prix encore assés d'appas pour encourager ceux qui se promettent assés de vie pour en espérer la jouissance.

Or, quoique le capital sur lequel les tables précédentes ont été calculées soit supposé de 1000 Roubles, on comprend aisément, de ce que nous avons dit ci-dessus, qu'il dépend entièrement de la volonté et de la fortune de chaque intéressant d'y employer une plus grande ou plus petite somme, et il sera facile de déterminer en conséquence les prix pour chaque somme. Par exemple, si quelqu'un vouloit acheter des rentes croissantes moyennant une somme de 500 Roubles, on n'auroit qu'à prendre la moitié des prix exposés dans la table précédente, ou bien à les doubler lorsque la somme est de 2000 Roubles, et ainsi de suite. Et il est clair que, par cet effet, tant l'établissement que chaque intéressant en particulier est en état de sçavoir par avance quel sera le prix qu'on payera ou recevra pour chaque année, jusqu'à la mort, sans avoir égard ni au nombre de pareils acheteurs ni au nombre de ceux qui décèdent.

Il est évident encore que le libre accès qu'on donne en tout temps et à toutes les personnes qui se présentent, sans égard ni à leur age ni à leur nombre ni même à la somme qu'ils déposent, sera très propre à attirer un très grand nombre d'intéressans, qui probablement augmentera toujours au lieu de diminuër; vu que le nombre des morts sera toujours surpassé ou du moins en équilibre avec le nombre des nouveaux reçûs. Et par cette raison l'État, soit qu'il ait établi cet expédient de finance pour se procurer en peu de temps une certaine somme d'argent, soit pour augmenter ses revenûs, retirera non seulement le fonds; mais même les intérêts qu'il a fournis pour le payement des rentes lui seront restitués en peu de temps par la durée de cet établissement qui est permanent, au lieu que les Tontines ordi-

naires s'éteignent avec la mort du dernier membre. C'est donc une source inépuisable d'où l'État peut tirer profit continuellement, pourvu, toutefois, que la caisse ne soit jamais dépourvüe au point qu'elle soit hors d'état de payer les rentes et qu'elle conserve son crédit dans l'esprit du Public.

Au reste, il faut remarquer que, quoique ces tables n'ayent été continuées que jusqu'à l'age de 95 ans, on sera pourtant obligé de payer à ceux qui survivent à ce terme la somme rapportée pour 95 [ans], au moins. On devroit, à la vérité, hausser les prix en conséquence; mais, comme ils sont déjà très considérables, on pourra s'en tenir là pour le peu d'années qui suivront ce terme.

OBSERVATIONES CIRCA NOVUM ET SINGULARE PROGRESSIONUM GENUS

Commentatio 476 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 20 (1775), 1776, p. 123—139
Summarium ibidem p. 20—24

SUMMARIUM

Inter res, quae prima fronte attentione nostra haud dignae videantur, observari saepenumero quaedam, quae attentius perpensae ad profundas speculationes perducant, nullus eorum, qui sublimioribus praecipue Analyseos studiis incumbunt, infitiabitur, cum plurimis exemplis et adeo hac dissertatione confirmari possit. Contemplatio enim illius notissimae quaestionis, qua quindecim Christiani totidemque Iudaei ita ordine sunt collocandi, ut, si numerandi initio in loco quocunque constituto nonus quisque in mare sit eiiciendus, hoc supplicium in solos Iudaeos sit casurum, Ill. EULERO ansam praebuit hoc singulare progressionum genus investigandi. Etiamsi enim haec quaestio in se spectata haud difficulter resolvatur, tamen, si in genere de hominum numero indeterminato, ex quibus secundum quemlibet ordinem et numerum quotusquisque sit eiiciendus, suscipiatur, mox intelligetur quaestionem inter difficillimas esse referendam, cum non detur methodus hoc in genere praestandi.

Quin etiam eiusdem generis quaestionem, si ex plurium sontium numero is solus poenam sit subiturus, qui, postquam nonus vel alius quotusquisque ex ordine fuerit eiectus, tandem solus sit remansurus, attentione maxime dignam censet Vir Ill., ubi scilicet locum nosse oportet, in quo numeratio terminatur. Ad omnia haec uberius explicanda consideratur casus, quo ex serie 30 notarum nona quaeque deletur; at numeratione actu instituta indicibusque eiectorum ordine dispositis prodit series, quam hic cum indicibus notarum subscriptis aspectui exponemus:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,
9,	18,	27,	6,	16,	26,	7,	19,	30,	12,	24,	8,	22,	5,	23,	11,	29,	17,	10,	2,

21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30
28,	25,	1,	4,	15,	13,	14,	3,	20,	21

in qua igitur postrema serie, quae hic *series eiectionis* vocatur, nullus plane ordo patescit.

Cum autem haec series duabus rebus determinetur, quarum altera a numero notarum, altera vero a numeratore pendeat, tota quaestio in genere eo reducitur, ut proposito notarum numero una cum numeratore ipsa series eiectionis inveniatur; cuius autem solutio, cum in genere expectari nequeat, Ill. dissertationis Auctori plures casus particulares percurrere visum est, spe freto fore, ut inde lex quaepiam detegatur, cuius ope negotium confici possit; quem in finem series eiectionis pro diversis numeratoribus in talibus schematibus exposuit, quale hic pro numeratore 3 perspicuitatis gratia apponemus.

Numerus notarum	Series eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
etc.	etc.

ubi quidem secundum lineas verticales et horizontales ordo valde est abstrusus; verum in ultimis terminis progressio arithmetica ternario crescens occurrit, cuius termini numerum notarum superantes infra eum sunt depressi, eademque lege progrediuntur penultimi, antepenultimi etc. Simili etiam modo pro numeratore 2 rectae obliquae, ei, quae per terminos ultimos transit, parallelae, per progressiones arithmeticas binario crescentes, pro numeratore 4 per progressiones quaternario crescentes, et ita porro, progrediuntur, ita ut ope huius legis variis a Viro Ill. exemplis confirmatae pro quovis numeratore et notarum numero nota ultimo eiicienda facili negotio assignari possit.

Et quidem in genere si statuatur numerator $= n$, pro notarum vero numero ν sit ultima eiicienda $= z$, tum pro numero notarum $\nu + 1$ ultima eiicienda erit $z + n$, dummodo non sit $z + n > \nu + 1$; si enim hoc eveniret, ultima foret vel $z + n - (\nu + 1)$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel in genere dividendo $z + n$ per $\nu + 1$ residuum ex divisione natum praebebit indicem notae ultimo eiiciendae. Quae regula maxime notatu digna merito ab Ill. Auctore tanquam insigne Theorema spectatur, cuius demonstrationem etiam hic elegantissime adumbrat.

Quaecunque autem sit simplicitas huius legis pro notis ultimo eiiciendis, Viro Ill. tamen non licuit earum seriem in genere exhibere, cuius rei ratio manifesto in eo est sita, quod terminorum reductio pro quovis numeratore perpetuo ad alios numeros sit instituenda neque ullus terminus ex praecedente absolute determinari possit, etiamsi pro casibus specialibus ad terminos valde remotos per saltus progredi liceat, ita ut non opus sit intermedios evolvisse; cuius rei hic exemplum pro numeratore 9 traditur, in quo series ultra ter mille terminos continuata est.

1. Inter res saepenumero, quae attentione nostra haud dignae videantur, observantur quaedam, quae satis profundam investigationem requirunt ac non parum sublimibus speculationibus occasionem praebent. Quod cum plurimis exemplis confirmari possit, tum nuper etiam ipse sum expertus, dum quaestionem illam tironibus notissimam attentius contemplarem, qua quindecim Christiani totidemque Iudaei ita ordine sunt collocandi, ut, si numerandi initio in dato loco sumpto nonus quisque vel decimus in mare sit eiiciendus, haec poena in solos Iudaeos sit casura. Quae quaestio etiamsi in se nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, si in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus, sed secundum alium quemvis numerum quotusquisque sit eiiciendus, proponatur, difficillimum fore ordinem eorum, qui continuo eiicientur, assignare. Neque adeo methodus constat hoc in genere praestandi, tametsi quovis casu oblato, dum numeratio actu instituitur, solutio facillime obtinetur. Ex hoc genere haud parum curiosa mihi videtur quaestio, si v. gr. ex plurium sontium numero is solus sit supplicio afficiendus, qui, postquam nonus quisque vel secundum alium numerum ex ordine fuerit exemptus, tandem ultimo solus sit remansurus; hic scilicet maxime intererit ante nosse illum fatalem locum, in quo numeratio illa ultimo terminabitur.

2. Quo omnia, quae hic investiganda occurrunt, clarius perspiciantur, casum illum perpendamus, quo ex serie 30 notarum nona quaeque expungitur, quod negotium numeratione actu instituta ita commodissime repraesentatur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23	20	28	24	14	4	7	12	1	19	16	10	26	27	25	5	18	2	8	29

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	13	15	11	22	6	3	21	17	9

Hic superiores numeri indicant, quoto loco a primo computando quaeque nota sit posita; inferiores vero numeri ostendunt, quando quaeque eiiciatur, dum scilicet continuo nona quaeque expungitur. Ita patet primo nonam, secundo decimam octavam, tertio vicesimam septimam, quarto sextam, quinto decimam sextam et ita porro expungi, donec ultimo delenda supersit sola vicesima prima, qui adeo foret locus ille fatalis ante memoratus. Si indices eiectorum ordine disponantur indicesque notarum subscribantur, haec series prodibit:

Indices eiectionis	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,
Indices naturales	9,	18,	27,	6,	16,	26,	7,	19,	30,	12,	24,	8,	22,	5,	23,
Indices eiectionis	16,	17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30,
Indices naturales	11,	29,	17,	10,	2,	28,	25,	1,	4,	15,	13,	14,	3,	20,	21.

Hanc postremam seriem vocabo *seriem eiectionis*, quia ea indicat, quota nota eiiciatur primo, secundo, tertio etc. Ita scilicet primo eiicitur nota 9^{na}, secundo 18^{va}, tertio 27^{ma}, quarto 6^{ta}, quinto 16^{ta} et ita porro, donec ultimo, trigesimo nempe loco eiiciatur nota vicesima prima. Ubi quidem meminisse oportet, postquam numerando in serie notarum ad finem fuerit perventum, numerationem iterum ab initio continuari; ex quo intelligitur notam trigesimam primam convenire cum prima, et si cuiusque notae index fuerit n, eidem quoque indices $n+30$, $n+60$, $n+90$ etc. convenire sunt censendi.

3. Si hanc seriem eiectionis consideremus, vix ullum ordinem in ea deprehendere licet; tres quidem primi termini, 9, 18, 27, secundum differentiam 9 ascendunt, et quartus quoque, 6, quia cum 36 convenit, eandem legem sequitur. Quintus autem, qui est 16 vel 46, denario praecedentem superat, quia in numerando iam unus, scilicet 9 seu 39, est deletus ideoque non numeratur. Ob eandem rationem a termino quinto, 16, ad sextum, 26, etiam 10, at a sexto, 26, ad septimum, 7 seu 37, iam 11 numerantur sicque saltus continuo fiunt maiores, quia plures notae iam deletae transiliuntur; quod operationem actu instituendo sponte elucet, etiamsi ordinem harum differentiarum auctarum vix assignare liceat; generatim certe hic nihil omnino definiri posse videtur. Circa finem autem imprimis haec series eiectionis ita fit irregularis, ut nulli prorsus legi adstricta videatur. Eum in finem autem hanc seriem hic exposui, quo clarius omnes difficultates, quibus perscrutatio eius impeditur, perspiciantur haecque ipsa series ex ludicro principio enata attentione nostra non indigna videatur.

4. Haec autem series eiectionis specialis duabus rebus determinatur, quarum altera in numero notarum, qui est 30, altera vero numeratore, qui est 9, continetur. Quocirca in genere quaestio huc redit, ut dato notarum numero una cum numeratore ipsa series eiectionis exhibeatur; cuius solutionem cum in genere sperare nequeamus, in casibus particularibus attentionem nostram exerceri conveniet, num forte legem quampiam detegere videamur.

Ac primo quidem patet, si numerator fuerit unitas, seriem eiectionis ipsam fore seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 etc.; quoniam enim primus quisque eiicitur, primo loco primus terminus, secundo secundus, tertio tertius et ita porro eiicitur, ita ut ultima nota simul sit terminorum eiectorum ultimus.

5. Sit igitur numerator $=2$, ita ut secundus quisque eiiciatur seu eiectio secundum alternos instituatur; ac pro notarum numero series eiectionis ita se habere deprehenduntur:

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 2
1	1
2	2, 1
3	2, 1, 3
4	2, 4, 3, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	2, 4, 6, 3, 1, 5
7	2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
9	2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3
10	2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5
11	2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7
12	2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9
13	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11
14	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13
15	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15
16	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1
	etc.

Hoc schema inspicienti facile erit pluribus modis ordinem quendam observare. Ultimi scilicet termini manifesto tenent progressionem arithmeticam binario crescentem, dummodo termini, qui numerum notarum essent superaturi, infra eum deprimantur, numero scilicet notarum inde detracto. Ita cum primo habeatur 1, pro secunda serie ultimus, qui foret 3, binario subtracto ad unitatem reducitur; hunc sequitur 3, et sequens, 5, numerum notarum unitate superans ad unitatem reducitur et ita porro. Simili lege progrediuntur termini penultimi, tum vero etiam antepenultimi atque adeo omnes ab ultimis aequidistantes. Quoniam igitur omnes rectae obliquae ei, quae per terminos ultimos transit, parallelae per huiusmodi progressiones arithmeticas pro numero notarum mutilatas transeunt, hinc istae series, quousque lubuerit, facile continuantur.

6. Exponamus simili modo series eiectionis pro numeratore $= 3$ ac lex progressionis multo magis abscondita prodibit:

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
13	3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13
14	3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2
15	3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5
16	3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8

etc.

Interim tamen etsi secundum lineas horizontales et verticales ordo magis est abstrusus, tamen in ultimis iterum progressio arithmetica se prodit secundum ternarium crescens; haecque eadem lex quoque in penultimis et antepenultimis ut ante deprehenditur, ex quo et has series facillime continuare licet.

7. Circa hanc legem in terminis ultimis locum habentem dubitare amplius non poterimus, dum ea adhuc pro numeratore 4 observetur. Pari ergo modo series eiectionis inde erectas repraesentemus:

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 4
1	1
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	4, 1, 3, 2
5	4, 3, 5, 2, 1
6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
9	4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1
10	4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5
11	4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9
12	4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1
13	4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5
14	4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9
15	4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13
16	4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13; 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1

etc.

Hinc ergo lex illa in seriebus oblique descendentibus prorsus confirmatur, quae scilicet hic sunt arithmeticae quaternario crescentes, dum termini numerum nostrum superantes infra eum deprimuntur. In seriebus autem horizontalibus et verticalibus ordo fit continuo intricatior. Quin etiam ipsa rei natura in seriebus horizontalibus nullam progressionis legem patitur, propterea quod eae, cum omnes numeros notarum numero non maiores fuerint complexae, ulteriori continuationi adversantur, ita ut continuatio tanquam imaginaria sit spectanda.

8. En ergo insignem legem, cuius ope pro quovis numeratore et notarum numero nota ultimo eiicienda assignari potest. Existente scilicet numeratore $= n$, si pro notarum numero ν ultima eiicienda sit z seu indici z respondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$ ultima eiicienda erit $z + n$, siquidem non sit $z + n > \nu + 1$; at si $z + n > \nu + 1$, ultima erit $z + n - \nu - 1$ vel

$z+n-2(\nu+1)$ vel $z+n-3(\nu+1)$ vel generatim dividendo $z+n$ per $\nu+1$ residuum ex divisione relictum dabit indicem ultimae notae eiiciendae. Ubi notetur, si divisio nihil relinquat, tum pro residuo 0 scribi notarum numerum $\nu+1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit ultimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus ultimo eiecta facile per hanc regulam assignabitur. Perpetuo autem si unica fuerit nota, eadem quoque erit ultimo eiecta, seu si fuerit $\nu=1$, erit $z=1$, unde sequentes omnes sine ullo negotio reperiuntur.

Quae regula eo magis est notatu digna, quod sine eiectionis ordine cognito statim ultimo eiiciendam exhibeat, etiamsi ea manifesto ab ordine ante eiectarum pendeat. Quamobrem haec regula merito tanquam insigne Theorema spectari debet, in cuius demonstrationem inquirere omnino operae erit pretium.

9. Sequenti modo autem eius demonstratio commodissime adstrui videtur. Consideretur notarum numerus $\nu+1$, unde secundum numeratorem n prima fiat eiectio, quae cadet in notam n, siquidem fuerit $n<\nu+1$, vel in notam $n-\alpha(\nu+1)$, qui indices autem omnes indici n aequivalent. Expungatur ergo haec nota, uti haec punctorum series A indicat

$$\begin{array}{lccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & & & n & n+1 & n+2 & & & & \nu+1 & \\ A & . & . & . & . . . & & . & . & . & . & . & . & . & ; \\ & & & & & & | & & & & & & & \end{array}$$

ac notae praecedentes, 1, 2, 3, ... $n-1$, ad finem adiungantur indicibus numero $\nu+1$ auctis, ut prodeat ista punctorum series

$$\begin{array}{lcccccccccc} & n+1 & n+2 & n+3 & & \nu+1 & \nu+2 & & & \nu+n & \\ B & . & . & . & . . . & . & . & . . . & & . & , \end{array}$$

in qua notarum numerus est ν, quaeque series ab ea, ubi numerus notarum est ν, quam ita repraesento

$$\begin{array}{lcccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \nu-1 & \nu \\ C & . & . & . & . & . . . & & . & ., \end{array}$$

aliter non differt, nisi quod ibi indices numeratore n sunt aucti. Utrinque ergo eiectiones secundum numeratorem n factae in easdem ordine notas cadent, ac si eiectio ultima in serie C incidat in notam, cuius index est z, ea

in serie B incidet in notam, cuius index est $n+z$; id quod etiam in serie notarum A, quarum numerus est $\nu+1$, eveniet. Quo ipso veritas nostri Theorematis evincitur. Simul autem inde patet, quod hic de notis ultimo eiectis est demonstratum, idem de penultimis, antepenultimis omnibusque ordinibus ab ultimis aequidistantibus valere.

10. Huius igitur regulae ope statim pro quovis numeratore series eiectionis formare poterimus, cuius specimen pro numeratore 5 hic appono:

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 5
1	1
2	1, 2
3	2, 3, 1
4	1, 3, 4, 2
5	5, 1, 3, 4, 2
6	5, 4, 6, 2, 3, 1
7	5, 3, 2, 4, 7, 1, 6
8	5, 2, 8, 7, 1, 4, 6, 3
9	5, 1, 7, 4, 3, 6, 9, 2, 8
10	5, 10, 6, 2, 9, 8, 1, 4, 7, 3
11	5, 10, 4, 11, 7, 3, 2, 6, 9, 1, 8
12	5, 10, 3, 9, 4, 12, 8, 7, 11, 2, 6, 1

etc.

11.[1]) Simili modo etiam pro numeratore 6 ordines eiectionis subiungimus:

numerus notarum	series eiectionis pro numeratore 6
1	1
2	2, 1
3	3, 2, 1
4	2, 1, 4, 3
5	1, 3, 2, 5, 4
6	6, 1, 3, 2, 5, 4
7	6, 5, 7, 2, 1, 4, 3
8	6, 4, 3, 5, 8, 7, 2, 1
9	6, 3, 1, 9, 2, 5, 4, 8, 7
10	6, 2, 9, 7, 5, 8, 1, 10, 4, 3
11	6, 1, 8, 4, 2, 11, 3, 7, 5, 10, 9

etc.

12. Etsi autem series notarum ultimo loco eiectarum tam simplicem ac facilem legem sequitur, tamen hoc maxime mirabile usu venit, quod in genere hanc seriem nullo modo exhibere liceat. Veluti si pro numeratore n series ultimo eiectorum ita repraesentetur

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \text{numerus notarum} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & \ldots & \nu, \\ \text{series} & 1, & A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, & H, & I, & \ldots & N, \end{array}$$

novimus quidem fore A vel 1 vel 2, seu $A = n - 2i$, vero

$$B = A + n - 3i, \quad C = B + n - 4i, \quad D = C + n - 5i \quad \text{etc.};$$

verum tamen hinc generaliter terminum N assignare non valemus, propterea quod in singulis littera i determinatum numerum denotat, tantum scilicet, ut terminus indicem supra scriptum non superet. Hinc etsi determinatio $D = C + n - 5i$ nihil habet difficultatis, tamen, si velimus pro C suum valorem $B + n - 4i$ ponere, ut prodeat $D = B + 2n - 4i - 5i$, hinc nihil con-

1) In editione principe paragraphus 11 per errorem paragrapho 17 addita est. Insuper ibi paragraphi 16 et 17 permutatae sunt. L. G. D.

cludere possumus, quandoquidem geminae litterae i valores non innotescunt. Causa igitur, cur in genere circa hanc seriem nihil definire liceat, in hoc consistit, quod continuo terminorum reductio ad alios numeros sit instituenda. Facilius hoc intelligetur, si perpendamus nullum terminum ex praecedente absolute determinari, sed ad plures interdum conditiones esse respiciendum. Scilicet si quartus detur C, quintus erit

$$\begin{aligned} &\text{vel } C+n, && \text{nisi } C+n>5,\\ &\text{vel erit } C+n-5, && \text{nisi } C+n>10,\\ &\text{vel erit } C+n-10, && \text{nisi } C+n>15,\\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

quemlibet autem terminum ad suam debitam formam deprimi oportet, antequam ex eo sequentem ope regulae demonstratae eliciamus.

13. Pro casibus autem particularibus ad terminos valde remotos per saltus progredi licet, ut non sit opus omnes intermedios evolvisse. Scilicet si pro numeratore n indici ν, qui hic notarum numerum significat, respondeat terminus a, tum indici $\nu+x$ respondebit terminus $a+nx$, dum sit $a+nx<\nu+x$ seu $x<\frac{\nu-a}{n-1}$; quin adhuc hic terminus recte se habet, si x unitate augeatur, hoc est, si $x>\frac{\nu-a}{n-1}$, ut excessus unitate sit minor, tumque indici $\nu+x$ respondebit terminus $(n-1)x-\nu+a$.

Simili modo ab hoc per saltum ad remotiorem terminum pervenire licet, saltus autem continuo fiunt maiores; per singulos autem saltus termini in progressione arithmetica secundum numeratorem n crescente procedunt. Ab initio quidem singuli termini seorsim sunt definiendi, statim autem atque ad indices numeratore maiores pervenitur, calculus per saltus commodius instituitur, cuius specimen pro numeratore 9 apponam, ubi perpetuo numerum $\nu-a$ per 8 ita dividi oportet, ut quotus nimis magnus accipiatur; tum enim ipse quotus dabit valorem ipsius x et residuum erit terminus per hunc saltum sequens.

Series pro numeratore 9

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18
Termini	1,	2,	2,	3,	2,	5,	7,	8,	8,	7,	5,	2,	11,	6,	15,	8,	17,	8

Saltus		2	3	3	4	4	4	5	6	6	7	8	9
Indices	20,	22,	25,	28,	32,	36,	40,	45,	51,	57,	64,	72,	81
Termini	6,	2,	4,	3,	7,	7,	3,	3,	6,	3,	2,	2,	2

Saltus	10	12	13	14	16	19	20	23	26	30	33	37
Indices	91,	103,	116,	130,	146,	165,	185,	208,	234,	264,	297,	334
Termini	1,	6,	7,	3,	1,	7,	2,	1,	1,	7,	7,	6

Saltus	42	47	52	60	67	75	85	95	107	120
Indices	376,	423,	475,	535,	602,	677,	762,	857,	964,	1084
Termini	8,	8,	1,	6,	7,	5,	8,	6,	5,	1

Saltus	136	152	172	193	217	244	275	309	348
Indices	1220,	1372,	1544,	1737,	1954,	2198,	2473,	2782,	3130
Termini	5,	1,	5,	5,	4,	2,	4,	3,	5

etc.

14. Hanc ergo seriem facili labore ultra ter mille terminos continuavimus, ac si ulterius progredi velimus, ex numeris postremis 3130 et 5 calculum ita instituimus:

$$\begin{array}{r} \text{ab} \quad 3130 \\ \text{subtr.} \quad 5 \\ \hline 8)\ 31^{7}25 \\ \hline 391 \end{array} \ (3)$$

Hinc saltus per 391 terminos porrigitur indeque terminus, cuius index est 3521, erit, ut residuum indicat, 3. Porro

$$\begin{array}{r} \text{ab} \quad 3521 \\ \text{subtr.} \quad 3 \\ \hline 8)\ 3518 \\ \hline 440 \end{array} \ (2)$$

Hic saltus fit per 440 terminos, unde oritur index $3521 + 440 = 3961$, cui respondet terminus 2 residuo indicatus.

$$
\begin{array}{rr}
\text{Ab} & 3961 \\
\text{subtr.} & 2 \\
\hline
8) & 39^{7}5^{3}9 \\
\hline
 & 495 \;(1)
\end{array}
$$

Hinc colligitur pro indice 4456 terminus 1. Ab hoc autem saltus sequens ultra 5000 extenditur; neque tamen video, quomodo huius seriei terminus, verbi gratia decies millesimus vel adeo centies millesimus, nisi saltibus hoc modo continuandis assignari possit; indices quidem per hos saltus crescentes secundum progressionem geometricam in ratione $8:9$ proxime crescunt, sed quia hoc tantum proxime fit, hinc nullum subsidium pro continuatione obtinetur.

15. Hinc ergo pro quovis notarum numero, dummodo 5000 non longe superet, [apparet], in quam eiectionis sors postremo cadet; ex serie scilicet hic per saltus exhibita is terminus quaeri debet, qui indici notarum numero aequali respondet. Perpetuo scilicet index proxime minor sumatur indeque progressio arithmetica usque ad indicem propositum per differentiam 9 continuetur, quod in nonnullis exemplis declarari expediet.

I. Quaeratur seriei illius terminus centesimus. Proxime inferior index per saltus inventus est 91, cui convenit terminus 1. Iam inde ad centesimum sunt loca 9 et nonies novem seu 81 ad illum terminum 1 adiiciendo prodit terminus centesimus 82. Quare si ex centum sontibus is sit supplicio afficiendus, qui, postquam reliqui per numerationem ad 9 fuerint liberi, tandem solus relinquatur, haec poena in 82^{dum} ordine incidet.

II. Ut terminus 200^{mus} reperiatur, calculus ita instituatur:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 200 & & \\
\text{index proximus} & 185, & \text{terminus} & 2 \\
\cline{2-2}
 & 15 & \text{per 9 dat} & 135 \\
\cline{4-4}
 & & \text{terminus quaesitus} & 137
\end{array}
$$

III. Quaeratur terminus 500$^{\text{mus}}$:

	500		
index proximus	475,	terminus	1
	25	per 9 dat	225
		terminus quaesitus	226

IV. Quaeratur terminus millesimus:

	1000		
index proximus	964,	terminus	5
	36	per 9 dat	324
		terminus quaesitus	329

V. Quaeratur terminus 5000$^{\text{mus}}$:

	5000		
index proximus	4456,	terminus	1
	544	per 9 dat	4896
		terminus quaesitus	4897

16. Vicissim autem si detur ordo eiectorum, qui ab ultimo regrediendo sit

$$z, \quad y, \quad x, \quad v, \quad u, \quad t, \quad s, \quad r \quad \text{etc.},$$

ex eo pro quovis numeratore et quolibet notarum numero initialis ordo notarum investigari poterit. Quod quo clarius appareat, sit numerator $= 4$; et pro quolibet notarum numero ordo notarum sequenti modo se habebit:

multitudo notarum	ordo notarum initialis
1	z
2	$z\ y$
3	$x\ z\ y$
4	$x\ z\ y\ v$
5	$z\ y\ v\ u\ x$
6	$v\ u\ x\ t\ z\ y$
7	$t\ z\ y\ s\ v\ u\ x$
8	$v\ u\ x\ r\ t\ z\ y\ s$
9	$z\ y\ s\ q\ v\ u\ x\ r\ t$
10	$x\ r\ t\ p\ z\ y\ s\ q\ v\ u$
11	$q\ v\ u\ o\ x\ r\ t\ p\ z\ y\ s$
12	$z\ y\ s\ n\ q\ v\ u\ o\ x\ r\ t\ p$
13	$r\ t\ p\ m\ z\ y\ s\ n\ q\ v\ u\ o\ x$
14	$u\ o\ x\ l\ r\ t\ p\ m\ z\ y\ s\ n\ q\ v$
15	$n\ q\ v\ k\ u\ o\ x\ l\ r\ t\ p\ m\ z\ y\ s$
16	$z\ y\ s\ i\ n\ q\ v\ k\ u\ o\ x\ l\ r\ t\ p\ m$
17	$t\ p\ m\ h\ z\ y\ s\ i\ n\ q\ v\ k\ u\ o\ x\ l\ r$
18	$x\ l\ r\ g\ t\ p\ m\ h\ z\ y\ s\ i\ n\ q\ v\ k\ u\ o.$

Consideratio horum ordinum non solum eorum naturam satis luculenter declarat, sed etiam plures insignes speculationes suppeditare poterit.

17. Consideratio huiusmodi serierum tam facili negotio formandarum non solum est iucunda, sed etiam non parum ad numerorum naturam tantopere nobis adhuc absconditam felicius perscrutandam conferre quicquam posse videtur. Eximium certe hoc est exemplum et omni attentione dignum, quod series tam levi opera non solum formari, sed etiam, quousque libuerit, continuari possit, cum tamen eius natura et vera indoles nobis maneat prorsus incognita neque ut aliae ad terminum generalem revocari possit.

DIIUDICATIO MAXIME PROBABILIS JRIUM OBSERVATIONUM DISCREPANTIUM ATQUE RISIMILLIMA INDUCTIO INDE FORMANDA

Auctore DANIELE BERNOULLI[1])

Acta academiae scientiarum Petropolitanae (1777: I), 1778, p. 3—23

\stronomis potissimum, genti sagacissime scrupulosae, diiudicandas 1 haesitationes, quas mihi aliquoties feci, de regula, ad quam con- omnes, quoties plures de eadem re factas prae se habent observationes lum inter se discrepantes; scilicet observationes tunc omnes in unam summam, quam postmodum dividunt per observationum numerum; livisione oritur, pro vera accipiunt quantitate quaesita, donec aliunde et certiora fuerint edocti. Hoc modo si singulae observationes eiusdem nderis censeantur, incidunt in centrum gravitatis, quod pro vera ob- lorati positione accipiunt; haec quoque regula convenit cum ea, qua in arte coniectandi, si omnes aberrationes in observando commissae cile contingere supponantur.

An vero recte statuitur singulas observationes eiusdem esse ponderis enti, sive in quosvis errores aeque pronas esse? an errores aliquot aeque facile committentur atque alii totidem minutorum? an eadem probabilitas? absona plane foret haec affirmatio; haec procul dubio t, quod malint astronomi prorsus reiicere observationes, quas iudicant a veritate recedere, caeteras vero retineant, immo plane ad eundem

). BERNOULLI, 1700—1782. Vide etiam dissertationem sequentem. L. G. D.

censum referant. Id vero dum faciunt, satis et plus satis monstrant multum abesse, ut idem statuant pretium singulis a se factis observationibus, dum alias reiiciunt totas, alias omnes non solum retineant, sed insuper eodem modulo metiantur; nec video limites, quos ultra citrave sint vel penitus reiiciendae vel integrae retinendae; quin forte evenire potest, ut observatio, quae reiicitur, optimam praestitura fuisset reliquis correctionem. Attamen non improbo ubiquaque consilium reiiciendae unius alteriusve observationis, immo probo, quoties inter observandum sinistri aliquid acciderit, quod per se ipsum protinus scrupulum iniiciat observatori, antequam consuluerit eventum eumque cum caeteris observationibus contulerit; si nihil tale habeat, quod conqueratur, existimo admittendas esse singulas observationes, qualescunque fuerint, modo observator sibi sit conscius omnis adhibitae industriae.

3. Liceat observatorem comparare cum sagittario tela sua in propositam metam coniiciente adhibita omni, qua pollet, industria. Detur ipsi pro meta integra linea verticalis, ita ut singulae aberrationes sub unica directione horizontali aestimandae veniant; putetur meta linearis depicta in medio plano verticali perpendiculariter ad axem visionis erecto totumque planum ab utroque latere in fascias verticales, angustas sed singulas eiusdem latitudinis, divisum sit. Quodsi nunc persaepe sagitta vibrata fuerit et pro quovis iactu locus illisionis examinatus eiusque distantia a meta verticali in charta notetur, etiamsi eventus minime possit exacte praedici, multa tamen sunt, quae cum ratione praesumi debent et quae imprimis ad rem nostram facere poterunt, si modo nulli alii committantur errores, quam qui in utramque partem aeque faciles sunt et quorum eventus penitus incerti sola veluti sorte haud vitabili deciduntur; sic in astronomia pro errore non habetur, quodcunque *a priori* correctionem admittit. Factis omnibus, quas theoria docet, correctionibus, quod tunc reliquum est pro conciliandis singulis observationibus aliquantulum inter se discrepantibus, hoc solius artis coniectandi opus est; quid proprie inter observandum acciderit, hoc, per ipsam hypothesin, profunde ignoramus, sed ipsa haec ignorantia asylum erit, ad quod confugere cogimur, dum consistimus in eo, non quod verissimum, sed quod verisimillimum, nec certum, sed probabilissimum, ut ars illa docet. An vero flatus iste semper et ubique competat medio arithmetico adhiberi solito, non sine ratione dubitari potest.

DIIUDICATIO MAXIME PROBABILIS PLURIUM OBSERVATIONUM DISCREPANTIUM ATQUE VERISIMILLIMA INDUCTIO INDE FORMANDA

Auctore DANIELE BERNOULLI[1])

Acta academiae scientiarum Petropolitanae (1777: I), 1778, p. 3—23

1. Astronomis potissimum, genti sagacissime scrupulosae, diiudicandas proponam haesitationes, quas mihi aliquoties feci, de regula, ad quam confugiunt omnes, quoties plures de eadem re factas prae se habent observationes aliquantulum inter se discrepantes; scilicet observationes tunc omnes in unam colligunt summam, quam postmodum dividunt per observationum numerum; quod a divisione oritur, pro vera accipiunt quantitate quaesita, donec aliunde meliora et certiora fuerint edocti. Hoc modo si singulae observationes eiusdem veluti ponderis censeantur, incidunt in centrum gravitatis, quod pro vera obiecti explorati positione accipiunt; haec quoque regula convenit cum ea, qua utuntur in arte coniectandi, si omnes aberrationes in observando commissae aeque facile contingere supponantur.

2. An vero recte statuitur singulas observationes eiusdem esse ponderis vel momenti, sive in quosvis errores aeque pronas esse? an errores aliquot graduum aeque facile committentur atque alii totidem minutorum? an eadem ubique probabilitas? absona plane foret haec affirmatio; haec procul dubio causa est, quod malint astronomi prorsus reiicere observationes, quas iudicant nimium a veritate recedere, caeteras vero retineant, immo plane ad eundem

1) D. BERNOULLI, 1700—1782. Vide etiam dissertationem sequentem. L. G. D.

censum referant. Id vero dum faciunt, satis et plus satis monstrant multum abesse, ut idem statuant pretium singulis a se factis observationibus, dum alias reiiciunt totas, alias omnes non solum retineant, sed insuper eodem modulo metiantur; nec video limites, quos ultra citrave sint vel penitus reiiciendae vel integrae retinendae; quin forte evenire potest, ut observatio, quae reiicitur, optimam praestitura fuisset reliquis correctionem. Attamen non improbo ubiquaque consilium reiiciendae unius alteriusve observationis, immo probo, quoties inter observandum sinistri aliquid acciderit, quod per se ipsum protinus scrupulum iniiciat observatori, antequam consuluerit eventum eumque cum caeteris observationibus contulerit; si nihil tale habeat, quod conqueratur, existimo admittendas esse singulas observationes, qualescunque fuerint, modo observator sibi sit conscius omnis adhibitae industriae.

3. Liceat observatorem comparare cum sagittario tela sua in propositam metam coniiciente adhibita omni, qua pollet, industria. Detur ipsi pro meta integra linea verticalis, ita ut singulae aberrationes sub unica directione horizontali aestimandae veniant; putetur meta linearis depicta in medio plano verticali perpendiculariter ad axem visionis erecto totumque planum ab utroque latere in fascias verticales, angustas sed singulas eiusdem latitudinis, divisum sit. Quodsi nunc persaepe sagitta vibrata fuerit et pro quovis iactu locus illisionis examinatus eiusque distantia a meta verticali in charta notetur, etiamsi eventus minime possit exacte praedici, multa tamen sunt, quae cum ratione praesumi debent et quae imprimis ad rem nostram facere poterunt, si modo nulli alii committantur errores, quam qui in utramque partem aeque faciles sunt et quorum eventus penitus incerti sola veluti sorte haud vitabili deciduntur; sic in astronomia pro errore non habetur, quodcunque *a priori* correctionem admittit. Factis omnibus, quas theoria docet, correctionibus, quod tunc reliquum est pro conciliandis singulis observationibus aliquantulum inter se discrepantibus, hoc solius artis coniectandi opus est; quid proprie inter observandum acciderit, hoc, per ipsam hypothesin, profunde ignoramus, sed ipsa haec ignorantia asylum erit, ad quod confugere cogimur, dum consistimus in eo, non quod verissimum, sed quod verisimillimum, nec certum, sed probabilissimum, ut ars illa docet. An vero flatus iste semper et ubique competat medio arithmetico adhiberi solito, non sine ratione dubitari potest.

4. Errores, in observando inevitabiles, in singulas utique cadere possunt observationes; attamen unaquaevis observatio suo gaudet iure nec liceret ullam vim ipsi inferre, si sola facta fuisset; igitur quaevis observatio per se sarta atque tecta sit oportet; nulli aliud statuendum est pretium, quam quod ipsi compertum fuit; quia vero sibi contradicunt, pretium statuendum erit toti observationum complexui intactis partibus. Sic singulis observationibus certus quidam error attribuitur; existimo autem, quod inter infinitos modos, quibus observationum errores contingere potuerunt, is seligendus sit, qui maximo probabilitatis gradu, pro integro observationum complexu, donatus fuerit.

Regulam hanc, quam propono, ultro admittent omnes, si modo pro quavis observatione probabilitatis gradus ratione puncti, quod pro vero assumitur, definiri possit. Equidem libens fateor hanc postremam conditionem haud esse determinatam, simul autem mihi persuadeo non esse omnia perinde incerta atque meliora dari posse, quam quae a regula communiter recepta expectari possint; videamus, annon quaedam iure merito praesumi debeant in hoc argumento, quae non nihil ad maiorem probabilitatem conferant. Examen incipiam a generalioribus.

5. Si innumeros veluti iactus fecerit sagittarius, de quo § 3 verba feci, et quidem omnes tota sua, qua pollet, industria, sagittae ferient modo fasciam primam metae proximam, modo secundam, modo tertiam et sic porro, idque perinde intelligendum est de utroque latere an dextro an sinistro; annon per se clarum est tanto densiores et frequentiores praesumendos esse ictus in unamquamvis fasciam, quanto propius haec fuerit posita a meta. Si omnes in plano erecto loci utcunque a meta distantes essent aeque expositi, nihil valeret dexterrimus iaculator prae caeco. Id tamen statuunt tacite, qui regula utuntur communi in aestimandis variis observationibus discrepantibus, quando nullo discrimine omnes habent. Hoc igitur modo unius cuiusvis aberrationis gradus probabilitatis *a posteriori* determinari aliquatenus posset, cum dubium non sit pro magno iactuum numero, quin probabilitas sit ut numerus iactuum impingentium in fasciam ad datam a meta distantiam positam.

Porro non est dubium, quin maxima aberratio suos habeat limites, quos nunquam transgrediatur, et quidem tanto angustiores, quanto exercitatior atque dexterior fuerit observator. Extra hosce limites omnis probabilitas nulla est; a limitibus versus mediam metam increscet probabilitas atque maxima erit in ipsa hac meta.

6. Praefatae annotationes aliquam sistunt ideam de scala probabilitatum pro omnibus aberrationibus, quam quisque observator sibimet ipsi formare debeat, non quidem ad amussim veram, sed tamen naturae quaestionis haud male accommodatam. Meta proposita est veluti centrum virium, in quod nituntur observatores; his vero conatibus innumerae opponuntur imperfectiones minimaque alia obstacula latitantia, quae parvulos iniicere possunt observationibus errores fortuitos, alios conspirantes ad eandem plagam, alios sibi invicem contrarios, prouti fortuna fuerit plus minusve infesta. Intelligitur hinc aliquam esse relationem inter errores commissos et ipsam veram positionem centri virium, ita ut pro alia metae positione aliter aestimandus sit fortunae eventus. Hoc modo incidimus proprie in problema, quo determinanda est positio metae quam maxime probabilis ex cognitis aliquot ictuum locis. Ex allatis sequitur, quod ante omnia scala concipienda sit inter varias distantias a centro virium, quod in ipso scopo vel meta positum erit, et respondentes probabilitates; utcunque vaga sit huius scalae determinatio, videtur tamen variis subiici axiomatibus, quibus si satisfaciamus, non possimus non in meliora incidere, quam si ponamus singulas aberrationes utcunque magnas aequa facilitate committi atque adeo aequa probabilitate esse donatas.

Concipiamus lineam rectam, in qua diversa puncta sint positione data, quae nimirum diversarum observationum eventus indicent; notetur in hac linea punctum aliquod intermedium, quod pro vera positione determinanda accipiatur; ex singulis punctis erigantur perpendiculares, quae probabilitates cuivis puncto convenientes exprimant; si curva ducatur per extremitates singularum perpendicularium, haec nobis scala erit probabilitatum, de qua sermo est.

7. Ad huius descriptionis sensum mihi verisimile fit sequentia scalae probabilitatum vix denegari posse lemmata.

a) Ex eo, quod aberrationes a vero puncto intermedio ad utramque partem sint aeque faciles, sequitur scalam duos habituram esse ramos perfecte similes et aequales.

b) Frequentiores utique erunt atque adeo probabiliores prope a centro virium observationes simulque tanto rariores, quanto magis ab isto centro recedunt; ergo scala ab utraque parte verget ad lineam rectam, in quam coniecta censemus loca observata.

c) Intensitas probabilitatis maxima erit in medio, ubi centrum virium locatum supponimus, eritque tangens scalae pro hoc puncto parallela cum praefata linea recta.

d) Si verum est, quod autumo, observationes vel inauspicatissimas suos habere limites, quos quisque observator sibimet ipsi optime statuet, sequitur scalam recte ordinatam in ipsis limitibus esse pertacturam ad observationum lineam; etenim pro ambabus extremitatibus evanescit tota probabilitas errorque maior fit impossibilis.

e) Denique ex eo, quod ambae aberrationes maximae tanquam limites censentur inter id, quod contingere potest et quod fieri nequit, oportet, ut ultima scalae particula, ab utroque latere, praecipitanter tendat ad lineam, in qua puncta observata locantur, sic ut tangentes in punctis extremis fiant ad eandem lineam propemodum perpendiculares et ut ipsa scala indicet transgressum fieri vix posse ultra limites suppositos; nec tamen haec conditio omnem requiret rigorem, si modo haud nimis confidenter erroribus limites posueris.

8. Quodsi iam super linea, quae totum aberrationum possibilium campum repraesentat, veluti super axe construatur semiellipsis cuiuscunque parametri, haec profecto haud male praefatis conditionibus satisfaciet; parameter autem ellipsis ideo arbitraria est, quod hic tantum de proportione inter probabilitates, pro quavis aberratione militantes, sermo sit; utcunque elongata vel compressa fuerit ellipsis super eodem axe constructa, idem praestabit officium, quod indicat non esse, ut nimis simus solliciti de accurata scalae descriptione. Licebit adeoque ipsum adhibere circulum, non ut geometrice verum, sed ut vero multo propiorem, quam est linea recta indefinita axi parallela, quae singulas observationes supponit aeque ponderosas atque probabiles utcunque a vera positione distantes; est quoque haec scala circularis aptissima calculis numericis; hoc interim in antecessum monuisse e re erit utramque hypothesin ad idem recidere, quoties singulae aberrationes pro infinite parvis habentur; ita quoque conspirant ambae hypotheses, si radius semicirculi auxiliaris ponatur infinite magnus aeque ac si aberrationibus nulli limites essent circumscripti.

Hoc modo si aberratio observationis a vera positione consideretur tanquam sinus alicuius arcus circularis, repraesentabitur probabilitas illius observationis per cosinum eiusdem arcus. Liceat semicirculum subsidiarium, quem nunc descripsi, epitheto *moderatoris* insignire; ubi autem centrum ponitur istius

semicirculi, ibi vera positio, observationibus quam maxime conveniens, statuenda est. Equidem precaria aliquo usque, at certissime communi praeferenda est hypothesis nostra nec unquam intelligentibus periculosa erit, quoniam eventus, quem statuent, semper erit maiori probabilitate donatus, quam si methodo communi adhaerescant; cum ex natura rei decisio certa non detur, nil superest, quam ut probabilius praeferatur minus probabili.

9. Methodum istam philosophandi triviali quodam illustrabo exemplo; conciliandae proprie sunt observationes discrepantes; ergo de differentia observationum agitur; quodsi autem aleator una cum alea tres fecerit iactus, quorum secundus primum uno puncto, tertius secundum duobus punctis excesserit, iactus tribus modis oriri potuerunt, nempe $1 \cdot 2 \cdot 4$ vel $2 \cdot 3 \cdot 5$ vel $3 \cdot 4 \cdot 6$; horum iactuum nullus duobus caeteris est praeferendus; singuli sunt per se aeque probabiles; si praeferas modum medio loco positum, nempe $2 \cdot 3 \cdot 5$, id absque ulla ratione feceris; simile quid contingit, si observationes pro parte eventuales, sive astronomicas sive alius generis, pro aeque probabilibus haberi velis. Iam vero finge aleatorem iactibus duarum alearum, ter iterum repetitis, eundem plane habuisse eventum; tunc octo diversis modis hunc eventum obtinere potuit, nempe $2 \cdot 3 \cdot 5$; $3 \cdot 4 \cdot 6$; $4 \cdot 5 \cdot 7$; $5 \cdot 6 \cdot 8$; $6 \cdot 7 \cdot 9$; $7 \cdot 8 \cdot 10$; $8 \cdot 9 \cdot 11$ et $9 \cdot 10 \cdot 12$; at multum abest, ut eorum singuli sint aeque probabiles; notum enim est probabilitates respectivas progredi ut numeri 8; 30; 72; 100; 120; 90; 40 et 12; ex hac autem scala cognita iure concludo potiori modum contigisse quintum ceu maxima probabilitate donatum quam ullum alium atque sic tres iactus binarum alearum fuisse 6, 7 et 9. Nemo tamen infitias ibit potuisse forte fortuna modum primo loco positum 2, 3 et 5 contingere, utut tantum decima quinta probabilitatis parte, quae modo quinto competit, donatum; sic nihil aliud facio quam quod, seligere coactus, seligam, quod maxime est probabile.

Quamvis istud exemplum nondum plane quadret ad argumentum nostrum, intelligitur tamen ex illo, quid disquisitio probabilitatum ad diiudicandos casus conferre possit. Iam vero rem ipsam propius aggredior.

10. Velim ante omnia, ut quisquis observator probe secum perpendat atque aestimet maximum errorem, quem nunquam se transgressurum, quotiescunque observationem repetat, moraliter certus sit, si vel omnes Deos Deasque offendat iratas; sit ipsemet dexteritatis suae iudex nec severus nec blan-

dus. Nec tamen admodum multum refert, sive congruum sive quodammodo temerarium ea de re tulerit iudicium, dum radium *circuli moderatoris* faciat maximo errori praememorato aequalem: sit radius iste $= r$ atque proin latitudo totius campi ambigui $= 2r$; si hac de re praecepta desideres omnibus observatoribus communia, suadeo, ut iudicium demum componas ad ipsas, quas feceris, observationes: si enim differentiam inter duas observationes extremas duplices, sat tuto, mea sententia, ea uteris pro diametro circuli moderatoris vel, quod eodem recidit, facies radium aequalem differentiae inter duas observationes extremas; immo sufficiet fortasse sesquiplicare hanc differentiam ad formandam diametrum circuli, si plures institutae fuerint observationes; ego quidem duplicarem pro tribus vel quatuor observationibus ac sesquiplicarem pro pluribus. Ne vero haec vagatio quemquam offendat, haud abs re erit monuisse, quod, si infinitum faciamus semicirculum nostrum moderatorem, tunc demum incidamus in regulam communiter adhibitam pro medio arithmetico; si vero circulum diminuamus, quantum fieri absque contradictione potest, obtineamus mediam inter duas observationes extremas; quam regulam pro pluribus observationibus institutis minus plerumque fallere vidi, quam credideram nondum explorata re.

11. His omnibus praeparatis denique superest, ut positio circuli moderatoris determinetur, quandoquidem in huius circuli centro singulae observationes veluti concentratae censeri debeant. Deducitur autem praefata positio ex hoc principio, quod totus observationum complexus pro illo situ facilius proindeque probabilius contingat quam pro ulla alia circuli positione; habebimus sic verum probabilitatis gradum pro toto observationum complexu, si pro singulis observationibus institutis respondentem probabilitatem notemus atque omnes probabilitates inter se multiplicemus, plane ut feci § 9. Deinde productum, quod a multiplicatione oritur, differentietur tandemque hoc differentiale ponatur $= 0$. Hoc modo aequationem obtinebimus, cuius radix dabit distantiam centri a dato aliquo loco.

Ponatur radius circuli moderatoris $= r$, minima observatio $= A$, secunda $= A + a$, tertia $= A + b$, quarta $= A + c$ etc., distantia centri semicirculi moderatoris a minima observatione $= x$, ita ut $A + x$ denotet quantitatem, quae probabilissime ex omnibus observationibus praesumenda sit; erit, per hypothesin nostram, probabilitas pro sola prima observatione exprimenda per

$$\sqrt{rr - xx},$$

pro secunda observatione per

$$\sqrt{rr-(x-a)^2},$$

deinde per

$$\sqrt{rr-(x-b)^2},$$

postea per

$$\sqrt{rr-(x-c)^2}$$

et sic porro. Postmodum velim secundum praecepta artis coniectandi, ut singulae probabilitates inter se multiplicentur; quo facto habebitur

$$\sqrt{rr-xx}\cdot\sqrt{rr-(x-a)^2}\cdot\sqrt{rr-(x-b)^2}\cdot\sqrt{rr-(x-c)^2}\cdot\text{etc.}$$

Denique si huius producti differentiale ponatur $=0$, dabit aequatio, vi nostrarum hypothesium, valorem quaesitum x ceu maxima probabilitate donatum. Quoniam vero praefata quantitas ad statum maximi valoris reducenda est, patet fore simul eius quadratum ad hunc statum reductum; licebit igitur, commodioris calculi ergo, formula uti ex meris terminis rationalibus composita, nempe

$$(rr-xx)\cdot(rr-(x-a)^2)\cdot(rr-(x-b)^2)\cdot(rr-(x-c)^2)\cdot\text{etc.},$$

cuius differentiale iterum ponendum est $=0$; caeterum tot sumendi sunt factores, quot observationes factae fuerunt.

12. Si unica instituta fuerit observatio, aliter non possumus, quin ipsam observationem pro vera accipiamus; id vero etiam indicat hypothesis nostra; si enim primus factor

$$rr-xx$$

solus accipiatur, habebitur

$$-2xdx=0$$

vel

$$x=0$$

proindeque $A+x=A$; sic nostra cum communi hypothesi coincidit hoc casu.

Si duae factae fuerint observationes, A et $A+a$, accipiendi sunt duo factores, scilicet

$$(rr-xx)\cdot(rr-(x-a)^2)$$

vel

$$r^4-2rrxx+x^4+2arrx-aarr-2ax^3+aaxx,$$

cuius quantitatis differentiale

$$= -4rrxdx + 4x^3dx + 2arrdx - 6axxdx + 2aaxdx = 0$$

sive

$$2x^3 - 3axx - 2rrx + aax + arr = 0,$$

quae aequatio pro radice utili dat

$$x = \frac{1}{2}a$$

atque $A + x = A + \frac{1}{2}a$, quod idem rursus hypothesis communis docet. Haecque coincidentia subsistit, qualiscunque adhibeatur radius circuli moderatoris, quod satis indicat pro pluribus institutis observationibus magnitudinem circuli nostri moderatoris ad amussim exactam nec in huiusmodi negotio requiri nec expectandam esse. Id vero, quod haud dissimulabo, sinistrum est, quod pro pluribus observationibus calculus requiratur prolixissimus, ita ut vix aliter quam *in abstracto* discussiones hasce proponere audeam.

Liceat saltem theoriam trium observationum, quae maximi est momenti, exponere.

13. Quando praesto sunt tres observationes, nempe A, $A + a$ et $A + b$, habebimus tres factores

$$(rr - xx) \cdot (rr - \overline{x - a}^2) \cdot (rr - \overline{x - b}^2),$$

pro quibus status valoris maximi est definiendus. Si vero hi factores actu inter se multiplicentur, obtinebitur

$$\begin{array}{rrrrrrr}
r^6 + & 2ar^4x - & 3r^4xx - & 4arrx^3 + & 3rrx^4 + & 2ax^5 - & x^6. \\
- aar^4 - & 2abbrrx + & 2bbrrxx + & 2abbx^3 - & bbx^4 + & 2bx^5 & \\
- bbr^4 + & 2br^4x - & aabbxx - & 4brrx^3 - & 4abx^4 & & \\
+ aabbrr - & 2aabrrx + & 4abrrxx + & 2aabx^3 - & aax^4 & & \\
 & & + 2aarrxx & & & &
\end{array}$$

Si haec quantitas differentietur tumque, postquam divisa fuit per elementum dx, pro statu maximi valoris ponatur $= 0$, sequens habebitur aequatio generalis pro institutis tribus observationibus qualibuscunque

$$\begin{array}{l} 2ar^4 - \quad 6r^4x - 12arrxx + 12rrx^3 + 10ax^4 - 6x^5 = 0. \\ -2abbrr + 4bbrrx + \quad 6abbxx - \quad 4bbx^3 + 10bx^4 \\ + \quad 2br^4 - 2aabbx - 12brrxx - 16abx^3 \\ -2aabrr + 8abrrx + \quad 6aabxx - \quad 4aax^3 \\ \qquad + 4aarrx \end{array}$$

Radix huius aequationis, quae quidem est quinque dimensionum et ex viginti terminis constat, dabit distantiam centri circuli moderatoris a prima observatione atque quantitas $A + x$ dabit valorem probabilissime ex factis tribus observationibus deducendum.

14. Pauci fortasse erunt, nisi omni cum attentione principiorum nostrorum energiam perpenderint, qui ullam aliquam suspicentur relationem inter aequationem enormem levissimamque quae videtur quaestiunculam; statuitur enim communiter $x = \frac{a+b}{3}$. Attamen non male respondet aequatio nostra omnibus notionibus aliunde obviis, quarum nunc aliquas exponam.

a) Si statuatur radius circuli moderatoris infinitus prae vagantibus quantitatibus a et b, reiiciendi sunt omnes termini praeter illos, in quibus littera r ad maximam dimensionem ascendit; sic integra aequatio ad hanc simplicissimam reducitur

$$2ar^4 + 2br^4 - 6r^4x = 0$$

sive

$$x = \frac{a+b}{3};$$

ergo regula communis continetur in aequatione nostra. Quodsi vero definitio nostra, paragrapho decimo exposita, perpendatur, apparebit, quam incongrua sit hypothesis pro radio infinito et quam manifeste alia aptior ipsi substitui possit.

b) Si ponatur $b = 2a$, perspicuum est fore $x = a$, qualiscunque valor detur radio r, idque rursus commune erit utrique theoriae. Videamus igitur, quid pro hoc casu doceat aequatio nostra; haec facta substitutione pro quantitate b abit in hanc alteram

$$\begin{array}{l} 6ar^4 - \quad 6r^4x - 36arrxx + 12rrx^3 + 30ax^4 - 6x^5 = 0. \\ -12a^3rr + 36aarrx + \quad 36a^3xx - 52aax^3 \\ \qquad - \quad 8a^4x \end{array}$$

Huic autem aequationi, qualiscunque fuerit valor r, omnino satisfacit valor

$$x = a,$$

quod ipsa rei natura postulat pro hoc casu.

c) Si fuerit $b = -a$, oportet utique, ut fiat $x = 0$, quiscunque sit valor r; id ipsum vero egregie itidem indicat aequatio nostra, quae nunc abit in hanc alteram

$$\begin{aligned} -6r^4x + 12rrx^3 - 6x^5 &= 0; \\ -2a^4x + 8aax^3 & \end{aligned}$$

haec autem primo intuitu monstrat radicem utilem

$$x = 0.$$

15. Haec et alia similia corollaria satis confirmant verum nexum principiorum nostrorum cum argumento, quod commentamur, utcunque enormis appareat in quaestione tam simplici inventa aequatio. Progredior ad exempla, in quibus radius circuli moderatoris nec infinitus nec adiaphorus sit; huc autem pertinent fere omnia. In his exemplis semper differt nova ista theoria a communi et tanto magis differt, quanto magis observatio intermedia accedit ad alterutram extremam. In his discussionibus cardo negotii vertitur. Igitur recurrere debemus ad exempla pure numerica.

EXEMPLUM 1

Assumamus tres observationes

$$A,\ A + 0{,}2000 \quad \text{et} \quad A + 1{,}0000,$$

ita ut sit

$$a = 0{,}2000 \quad \text{et} \quad b = 1{,}0000,$$

ponaturque pro valore ex his tribus observationibus quam probabilissime praesumendo $A + x$; dabit regula communis

$$x = 0{,}4000.$$

Videamus novam, meo iudicio, probabiliorem; utamur autem positione $r = 1{,}000$ (conf. § 10). His positis emergit sequens aequatio pure numerica

$$1{,}9200 - 0{,}3200\,x - 12{,}9600\,xx + 4{,}6400\,x^3 + 12{,}0000\,x^4 - 6x^5 = 0,$$

pro qua invenitur, quam proxime,

$$x = 0{,}4427,$$

qui valor alterum, communiter receptum, plus quam decima eius parte excedit. Notabilis iste excessus exinde originem duxit, quod observatio media multum admodum propior sit primae quam tertiae. Hinc facile praesumitur excessum in defectum mutatum iri, si media observatio propior sit tertiae quam primae, istumque defectum tanto minorem fore, quanto minor assumpta fuerit differentia observationis mediae inter utramque distantiam a duabus observationibus extremis. Ut coniecturam experirer, retentis caeteris valoribus solam mutavi observationem mediam, ut sequitur.

EXEMPLUM 2

Sit igitur nunc $a = 0{,}5600$ posito rursus $r = b = 1{,}0000$; habebimus pro regula communiter recepta

$$x = 0{,}5200.$$

Videamus de nostra. Dabit nunc aequatio paragraphi decimi tertii sequentem aequationem numericam

$$1{,}3728 + 3{,}1072x - 13{,}4784xx - 2{,}2144x^3 + 15{,}6000x^4 - 6x^5 = 0,$$

cui proxime satisfacit

$$x = 0{,}5128;$$

nunc igitur valor x minor fit secundum principia nostra, quam est medius arithmeticus communiter receptus; differentia autem inter utrumque valorem iam admodum exigua est, quippe $= 0{,}0072$, plane ut in antecessum rem fore praesumpseram. Hinc etiam videtur maximum discrimen inter utramque aestimationem fore, si forte fortuna contigerit, ut duae observationes perfecte coinciderent sola tertia evagante; id duobus diversis modis obtinetur, nempe si ponatur vel $a = 0$ vel $a = b$. Eventum pro utroque casu exponam.

EXEMPLUM 3

Sit $a = 0$ retentis reliquis denominationibus; habebimus (facta divisione aequationis per $2b - 2x$) hanc aequationem numericam

$$1{,}0000 - 6{,}0000xx - 2{,}0000x^3 + 3{,}0000x^4 = 0,$$

cui proxime satisfacit valor

$$x = 0{,}3977,$$

qui ab regula communi reperitur

$$x = 0{,}3333;$$

prior alterum superat quantitate 0,0644.

Quodsi vero ponatur $a = b$, oritur aequatio (postquam divisa fuit per $2x$), quae sequitur,

$$4{,}0000 - 6{,}0000x - 6{,}0000xx + 10{,}0000x^3 - 3{,}0000x^4 = 0;$$

huic nunc aequationi satisfacit valor

$$x = 0{,}6022$$

quam proxime, qui communiter statuitur

$$x = 0{,}6666.$$

Ergo differentia inter utrumque valorem est iterum, ut ante, $= 0{,}0644$; nunc autem novus noster valor minor est communi, cum in priori casu esset maior, unde apparet methodum nostram collimare ad punctum aliquod intermedium melius quam methodus communis; huiusmodi criteria haud parum commendant methodum, quam propono; hanc animadversionem paulo accuratius discutiam, ut saltem argumentum, quod dicitur ad hominem, habeatur in re, quae demonstrationem geometricam haud admittit.

16. Si utrumque casum in exemplo tertio expositum inter se combinemus, ita ut sex institutas fuisse observationes putemus, nempe

$$A,\ A,\ A + b \quad \text{et} \quad A + b,\ A + b,\ A,$$

patet sic tres observationes facere pro valore A et totidem pro valore $A + b$; vidimus autem § 12 in hoc casu utramque methodum indicare medium valorem quaesitum $= A + \frac{1}{2}b$ sive, pro exemplo tertio, $= A + 0{,}5000$ aut, omissa quantitate permanente A, simpliciter $= 0{,}5000$; de hoc valore, ex unitis sex observationibus deducto, nemo dubium movebit. Nunc vero hasce sex observationes resolvamus in duas alias triades, scilicet

$$A,\ A,\ A + 1{,}0000 \quad \text{atque} \quad A + 1{,}0000,\ A + 1{,}0000,\ A;$$

hoc modo dabit regula communiter recepta, pro prima triade, reiecta iterum quantitate A, dabit, inquam, pro prima triade valorem 0,3333 et pro secunda triade 0,6666; uterque a medio valore 0,5000 differt quantitate 0,1666, alter in defectu, alter in excessu; nostra autem methodus eosdem pro quavis triade valores indicat 0,3977 et 0,6022, quorum uterque a medio valore 0,5000 differt 0,1022 et quidem pariter alter in excessu, alter in defectu.

Sic itaque theoria communis pro quavis observationum triade seorsim sumpta errorem committeret 0,1666, nostra vero 0,1022, notabiliter minorem; huiusmodi criteria alia quam plurima afferri possent, quibus principia nostra magis stabiliantur; at vereor, ne nimius videar in adstruenda re, quae certam omnique titulo perfectam determinationem haud admittit; nec enim ad altiora contendimus, quam ut diiudicare possimus id, quod magis, ab eo, quod minus probabile est.

17. Si quae ulterior perfectio expectanda sit, consistet in accuratiori et strictiori determinatione scalae moderatricis eiusque amplitudine; de hoc rei momento aliquas superaddam notationes.

Ex praemissis perpensationibus liquet non multum admodum recedere aestimationes nostras ab regula communiter recepta; agitur ergo de correctione aliqua, quam admittere videtur haec regula; istam correctionem subministrant ipsi discessus observationum a vero puncto quaesito, qui ita ordinari possunt pro quavis data scalae moderatricis amplitudine, ut probabilissime conveniant cum hoc puncto. At equidem nihil video, quo amplitudo praememoratae scalae stricte determinari possit, nisi quod submonui § 10. Si quis autem observator, virium suarum ultra quam par erat diffisus, nimium auxerit magnitudinem semicirculi moderatoris, hic quidem non omnem tulerit opem, sed certiorem; si, e contrario, nimium constrinxerit hanc scalam, incidet caeteris paribus in correctionem paulo maiorem et aliquantulum minus probabilem. Prudentia non minus quam perspicacia hic opus esse videtur. Si ipsis institutis observationibus uti velis ad formandam *a posteriori* aestimationem de adhibenda amplitudine scalae moderatricis, haud imprudenter actum erit, si tecum perpenderis, an feliciter vel infeliciter observationes cessisse statuendum sit; quanto plus fortunae dederis, tanto minus dexteritati in observando adhibitae tribues tantoque proinde maiorem circulum moderatorem adhibebis. In paragrapho decimo quinto assumpsi $r = b$ sive radium circuli moderatoris aequalem distantiae inter duas observationes extremas; fateor

tamen, re melius perpensa, hancce radii magnitudinem mihi videri nimia aliquantulum confidentia positam; tutior utique futura fuisset positio $r = \frac{3}{2}b$ vel etiam $r = 2b$; sub hac positione correctio prodiret notabiliter minor at tanto certior maiorique fiducia adhibenda.

18. Si quae efficacia insit principiis nostris, etiamsi metaphysicis potius quam mathematicis, iure merito exinde concludemus, nunquam aut saltem rarissime nec sine omni adhibita circumspectione reiiciendam esse aliquam observationem; qua de re sententiam meam in antecessum aperui § 2. Totus enim observationum complexus nihil aliud est quam eventus fortuitus dexteritate observatoris modificatus et intra certos fines coercitus. Inter tres observationes contingere utique potest, quamvis casu rarissimo, ut duae mirum in modum inter se conspirent, tertia autem infausta sorte ab ambabus prioribus longissime recedat. Id vero si mihi contigerit atque si certus fuero me haud nimium coarctasse limites maximorum errorum possibilium aut nimium dexteritate mea fidisse, non haesitarem totius rei examen ad principia nostra revocare ex iisque aestimationem formare. Modo observator pro singulis observationibus parem adhibuerit industriam, quiscunque fuerit earum eventus velim, ut omnium aequa ratio habeatur.

19. Unicum superest monendum de scala, quam adhibui, moderatrice; usurpavimus semicirculum, tanquam sic satis respondentem conditionibus § 7 expositis simulque calculis subducendis aptissimum; notabile interim est infinitas dari alias curvas, quae plane ad eandem aequationem, quam in fine paragraphi decimi tertii exposui, perducant. Pro scala circulari fecimus paragrapho undecimo probabilitaest respective proportionales applicatis

$$\sqrt{rr - xx}, \quad \sqrt{rr - (x - a)^2}, \quad \sqrt{rr - (x - b)^2}.$$

Quodsi autem semicirculi loco supponamus arcum parabolicum super linea $2r$, constructum, cuius axis per medium huius lineae perpendiculariter transeat, habebimus retentis iisdem denominationibus applicatas quasvis sive probabilitates inde expressas aequales

$$\frac{\varrho}{rr} \cdot (rr - xx), \quad \frac{\varrho}{rr} \cdot (rr - \overline{a - x}^2), \quad \frac{\varrho}{rr} \cdot (rr - \overline{b - x}^2) \quad \text{etc.},$$

ubi per novam literam ϱ intelligo maximam applicatam pro abscissa $x = 0$.

Quia vero factor $\frac{\varrho}{rr}$ omnibus terminis communis est, poterit huic factori simpliciter unitas substitui, quando productum ex omnibus et singulis probabilitatibus ad *maximum* reducendum est; unde sequitur parametrum parabolae arbitrariam manere; monui etiam in praefato paragrapho undecimo, quod, si idem productum ad statum suum *maximum* fuit reductum, simul omnes eius dignitates praerogativa maximi vel minimi gaudeant; hinc liquet utramque scalam, parabolicam aeque ac circularem, ad eundem valorem quaesitum x perducere. Sed et porro perspicuum est innumeras alias scalas idem praestare officium; erunt autem omnes eius indolis, ut a summitate sua in utramque partem ad lineam $2r$, in quam singulae observationes necessario incidere ponuntur, accedant eamque intersecent. Ergo omnes huiusmodi scalae ad scopum nostrum collimant nec est, ut hac in re nimis simus meticulosi, ad meliora si non ad optimum contendisse contenti.

20. Quod denique attinet ad incommodam fereque monstrosam aequationis nostrae fundamentalis § 13 expositae formam, poterit et huic incommodo aliquatenus occurri; dico enim fore propemodum radicem utilem

$$x = \frac{a+b}{3} + \frac{2a^3 - 3aab - 3abb + 2b^3}{27rr}.$$

Prius membrum nil aliud est quam commune medium arithmeticum pro tribus observationibus, alterum indicat proxime correctionem, quam principia nostra porro exigunt; ista quidem radix tanto accuratius cum aequatione § 13 conveniet, quanto maior assumpta fuerit amplitudo scalae moderatricis indicata per $2r$; absit tamen, ut sola calculi commoditate inducti valorem literae r praeter necessitatem augeamus, quia omne augmentum inutile momento correctionis nostrae aliquid detrahit. Nec minus periculosum foret nimium viribus suis in observando tribuere atque sic radium r ultra quam par est contrahere: *Certi sunt fines, quos ultra citraque nequit subsistere rectum*[1]); conf. § 10.

Docent vel ipsa principia nostra fieri nunquam posse, ut sit $r < \frac{1}{2}b$, quia haec positio manifestam implicaret contradictionem, dum id ipsum impossibile

1) Legitur apud Horatium, *Sat.* I 1, 106:

„Est modus in rebus, sunt certi denique fines,
Quos ultra citraque nequit consistere rectum.“ L. G. D.

poneretur, quod contigisse supponitur. Caeterum haud dissimulavi, quae in argumentatione nostra paullo liberius assumpta fuerunt; crediderim tamen criteria nostra institutarum observationum non omnia propterea esse reiicienda; hoc saltem mihi persuadeo *regulam communem pro tribus observationibus peccare aliquantulum in defectu, quoties* $a < \frac{1}{2}b$, *atque in excessu, si* $a > \frac{1}{2}b$, *nec unquam certius adhiberi, quam cum observatio intermedia proxime aequidistat a duabus extremis.*

Deinde mihi probabile videtur aequationem nostram § 13 tutius et melius determinare positionem seligendam, modo radius circuli moderatoris haud temere diminuatur ultra limites, quos vires observatoris permittunt; conf. § 17. Quaestio autem, quam tractavi, proprie haec est, ut datis tribus pluribusve sagittae iactibus, in linea recta notatis, determinetur positio probabilissima loci, quem sagittarius pro scopo suo habebat. Sed unusquisque observator harum rerum intelligens pro natura argumenti, quod prae manibus habet, alia atque alia sibi formabit criteria scopo suo haud inutilia, si modo regulis ex arte combinatoria depromptis caute utatur.

RECAPITULATIO

Problema nostrum per se utique est indeterminatum, quandoquidem pendet ab usu, experientia, dexteritate observatoris, a praecisione instrumentorum, ab acie sensuum, ab innumeris denique circumstantiis plus minus faventibus; horum omnium ratio habebitur assumpta amplitudine aberrationum campi, qua de re, omni adhibita circumspectione, sententiam meam aperui. Deinde energia sortis fortuitae exploranda est, quae pro quavis aberratione militet, quia utile est, ut cuivis aberrationi sua pro natura rei conveniens assignetur probabilitas; haec equidem probabilitatum scala rursus incerta atque indeterminata manet, si accurata desideretur, attamen plures manifestat ex ipsa rei natura proprietates; quibus si satisfiat, poterit pro sufficienter cognita haberi, quod plura tentamina me docuerunt.

Inde modus innotescit exprimendi, secundum praecepta in *Arte coniectandi*[1]) demonstrata, probabilitatem absolutam cuivis systemati observationum dato convenientem pro quovis situ assumpto eiusdem systematis. Sic aliud non superest, quam ut ille seligatur propositi systematis situs, qui maxima gaudet

1) Jac. Bernoulli (1654—1705), *Ars coniectandi*, quod opus anno 1713 Basileae edidit Nic. Bernoulli (1687—1759), filius fratris auctoris. L. G. D.

probabilitate. Mirabile prorsus mihi visum est, quod aequatio algebraica, qua situs iste definitur, tam longe petita, ad quintam dimensionem, pro tribus tantum observationibus, assurgens, permagno terminorum numero expressa, ex principiis nunquam usitatis deducta, denique nihil indicet, undecunque examinetur; quod ullo modo displicere possit, multo minus ad absurdum aliquod perducat; quod in quovis exemplo ab calculo emergit, semper parum ab eo, quod methodus communis docet, differt, si modo haud temere impingatur in praecepta, quae praescripsi; quoties tres observationes datae ita sunt comparatae, ut media ab extremis fere aequaliter distet, absque scrupulo regulae communi adhaerebimus; at si ambo intervalla sint notabiliter inaequalia, consultius existimo ad theoriam nostram confugere, si modo ad mentem praeceptorum, quae exposui, omnique adhibita prudentia, aequi fines aberrationum campo statuti fuerint.

Caeterum haec omnia velim, ut trutina potius metaphysica quam mathematica perpendantur. Qui maxime principiis nostris offenditur, si modo maximum simul statuat aberrationum possibilium campum, nil porro, quod redarguat, habebit.

OBSERVATIONES IN PRAECEDENTEM DISSERTATIONEM ILLUSTRIS BERNOULLI[1]

Commentatio 488 indicis Enestroemiani
Acta academiae scientiarum Petropolitanae (1777: I), 1778, p. 24—33

1. Quaestionem haud exigui momenti hic tractat Illustris Bernoulli, quemadmodum quantitatem incognitam ex pluribus observationibus inter se parumper discrepantibus concludi oporteat. Cuius quaestionis indoles quo clarius perspiciatur, ponamus cuiuspiam loci elevationem poli inveniri debere, plures autem observationes hunc in finem institutas praebere tales valores inter se discrepantes

$$\Pi + a, \quad \Pi + b, \quad \Pi + c, \quad \Pi + d \quad \text{etc.},$$

ubi litterae a, b, c, d etc. v. gr. in minutis secundis expressae habeantur, ex quibus vera huius loci elevatio poli, quae sit $\Pi + x$, sit concludenda. Vulgo quidem haec quantitas x per medium arithmeticum inter omnes quantitates a, b, c, d etc. assignari solet; unde, si observationum numerus fuerit $= n$, erit

$$x = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n}.$$

2. In hac autem regula manifesto assumitur omnes observationes pari gradu bonitatis esse praeditas. Si enim aliae aliis essent magis exactae, huius discriminis ratio utique in computum duci deberet. Quanquam autem ex circumstantiis nulla pateat ratio, cur uni harum observationum maius pretium sit tribuendum quam reliquis, tamen Celeberrimus Auctor observat

1) Vide etiam Commentationem 628 huius voluminis. L. G. D.

his observationibus eo maiorem gradum bonitatis adiudicari debere, quo propius ad veritatem accesserint, quemadmodum etiam vulgo eiusmodi observationes, quae nimis a veritate recedere censentur, prorsus reiici solent. Totum igitur negotium huc redit, ut indicetur, quomodo gradus bonitatis singulis observationibus conveniens sit aestimandus.

3. Secundum mentem autem Illustris Auctoris aberrationem cuiusque observationis a veritate, quasi iam esset cognita, perpendi conveniet; quae cum pro prima observatione sit $x-a$, pro secunda $x-b$, pro tertia $x-c$ etc., defectum cuiusque observationis non tam ex his differentiis quam earum quadratis aestimari oportet, quandoquidem defectus ipse idem est statuendus, sive observatio in excessu sive defectu aberraverit. Hinc ergo si quaepiam observatio cum veritate perfecte conveniat, eius defectus erit nullus; unde, si istius observationis gradus bonitatis indicetur per

$$rr,$$

evidens est gradum bonitatis primae observationis indicari debere per

$$rr-(x-a)^2,$$

secundae per

$$rr-(x-b)^2,$$

tertiae per

$$rr-(x-c)^2$$

et ita porro, ubi litterae r talis valor tribui debet, ut pro huiusmodi observatione, quae tantum non reiicienda videatur, gradus bonitatis evanescat. Quare si sumamus hoc contingere in observatione, quae dedisset $\Pi+u$, quoniam eius gradus foret bonitatis

$$rr-(x-u)^2,$$

statui ubique debebit

$$rr=(x-u)^2.$$

4. His circa gradum bonitatis cuiusque observationis stabilitis Illustris Auctor in subsidium vocat sequens principium, cuius quidem nullam affert rationem, quod productum omnium illarum formularum, quibus gradus bonitatis singularum observationum exprimitur, valorem *maximum* sortiri debeat.

Ex hoc ergo principio iubet istud productum differentiare eiusque differentiale nihilo aequare, quandoquidem tum ex hac aequatione verus valor x sit proditurus; id quod nonnullis exemplis ad ternas observationes accommodatis illustrat, unde eiusmodi valores pro x derivat, qui veritati admodum conformes videantur.

5. Istud autem principium pro tribus tantum observationibus deduxit ad aequationem quinti ordinis, cuius radicem x assignare oportebat; et si quis idem principium ad quatuor observationes accommodare vellet, perveniret ad aequationem septimi gradus; quinque autem observationes deducerent ad aequationem noni gradus et ita porro. Unde manifesto liquet hanc methodum nullo modo ad casus, ubi plures observationes proponuntur, in usum vocari posse, id quod etiam Illustris Auctor ingenue concedit, dum totam dissertationem tanquam speculationem mere metaphysicam in medium attulerit.

6. Verum quia Illustris Auctor hoc principium *maximi* nulla demonstratione corroboravit, haud aegre feret, si dubia quaedam contra illud proposuero. Namque assumamus inter observationes propositas unam reperiri, quae tantum non reiici debuisset, cuius ergo gradus bonitatis esset quam minimus, evidens est productum omnium memoratarum formularum etiam ad nihilum redigi, ita ut nullo modo amplius pro maximo haberi possit, quantumvis magnum etiam fuisset omissa ista observatione. Principia autem artis coniectandi manifesto declarant eundem valorem quantitatis incognitae x prodire debere, sive talis observatio omni bonitate destituta in calculum introducatur sive penitus reiiciatur.

7. Arbitror autem in hac quaestione opus non esse ad principium maximorum confugere, cum praecepta certissima artis coniectandi prorsus sufficiant ad omnes huiusmodi quaestiones resolvendas. Si enim primae observationi, quae dederat $\Pi + a$, tribuamus pretium seu gradum bonitatis $= \alpha$, secundae $= \beta$, tertiae $= \gamma$, ex regulis huius artis quantitas incognita x ita determinatur, ut sit

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \text{etc.}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}}.$$

Hinc igitur erit

$$\alpha(x - a) + \beta(x - b) + \gamma(x - c) + \delta(x - d) + \text{etc.} = 0.$$

Manifestum autem est, si omnes gradus bonitatis inter se essent aequales numerusque observationum foret $= n$, tum reperiri

$$x = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n},$$

quemadmodum regula vulgaris exhibet. Ex quo intelligitur, quatenus gradus bonitatis inter se discrepant, eatenus diversos valores pro quantitate incognita x prodire posse.

8. Cum igitur, ut Illustris Auctor ipse affirmat, gradus bonitatis litteris α, β, γ, δ etc. indicati sint

$$\alpha = rr - (x - a)^2,$$
$$\beta = rr - (x - b)^2,$$
$$\gamma = rr - (x - c)^2,$$
$$\delta = rr - (x - d)^2$$
$$\text{etc.},$$

posterior forma aequationis inventa erit

$$\begin{aligned} &rr(x-a) + rr(x-b) + rr(x-c) + \text{etc.} \\ &-(x-a)^3 - \quad (x-b)^3 - \quad (x-c)^3 - \text{etc.} \quad = 0. \end{aligned}$$

Unde, si numerus observationum $= n$ et brevitatis gratia ponatur

$$a + b + c + d + \text{etc.} = A,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} = B,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} = C,$$

ista aequatio redigetur ad sequentem formam satis simplicem

$$nrrx - Arr - nx^3 + 3Axx - 3Bx + C = 0$$

sicque pervenimus ad aequationem cubicam, ex qua incognitam x facile definire licebit, quantuscunque fuerit observationum numerus n.

9. Quodsi quantitatem r quasi infinitam spectemus, qui est casus, quo omnibus observationibus idem bonitatis gradus tribui solet, neglectis reliquis terminis ex hac aequatione statim deducitur

$$x = \frac{A}{n} = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n},$$

prorsus ut regula vulgo adhiberi solita postulat. Quodsi iam istum valorem designemus littera p et in ipsis observationibus loco Π scribamus $\Pi + p$, singulos numeros a, b, c, d etc. eadem quantitate p diminui oportebit sicque summa omnium, quam posuimus A, nunc erit $A = 0$. Ne autem hic novas litteras in calculum introducamus, statim quantitatem Π ita constituere poterimus, ut, si valores singularum observationum statuantur

$$\Pi + a, \quad \Pi + b, \quad \Pi + c, \quad \Pi + d \quad \text{etc.},$$

summa litterarum $a + b + c + d + \text{etc.}$ futura sit $= 0$; tum igitur pro quantitate x invenienda habebitur ista aequatio multo simplicior

$$nx^3 - nrrx + 3Bx - C = 0,$$

unde, si r esset infinitum, sequeretur $x = 0$; hincque evidens est, si ista aequatio plures habeat radices reales, tum minimam pro x sumi debere, ita ut verus valor quaesitus futurus sit

$$= \Pi + x.$$

10. At vero eandem hanc quaestionem adeo ad aequationem quadraticam revocare licebit introducendo eiusmodi observationem, quae, perpensis omnibus circumstantiis, reiicienda videretur, propterea quod nullum gradum bonitatis esset habitura. Sit igitur talis observatio $\Pi + u$; et quia per hypothesin eius gradus bonitatis, qui est $rr - (x - u)^2$, debet esse nullus, fiet

$$rr = (x - u)^2.$$

Hic autem valor in aequationem postremo loco inventam introductus producet hanc formam

$$2nuxx - nuux + 3Bx - C = 0.$$

In qua aequatione terminum $-nuux$ ut maximum spectari conveniet, ita ut aequatio hac forma referri queat

$$x(nuu - 3B - 2nux) = -C,$$

unde sequitur

$$x = \frac{-C}{nuu - 3B - 2nux};$$

ubi si loco x valor modo inventus substituatur, pro x reperiemus hanc fractionem continuam

$$x = \cfrac{-C}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{\text{etc.}}}}}}$$

quae forma mox verum ipsius x valorem declarabit.

11 Quoniam Illustris Auctor suam solutionem eiusmodi principio superstruxit, quod proprietate cuiuspiam maximi esset praeditum, nunc haud difficile erit eiusmodi formulam analyticam exhibere, quae maximo aequalis posita verum valorem ipsius x esset ostensura. Utamur hunc in finem forma primum inventa

$$\begin{aligned} &rr(x-a) + rr(x-b) + rr(x-c) + \text{etc.} \\ &-(x-a)^3 - (x-b)^3 - (x-c)^3 - \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

quae spectetur tanquam differentiale cuiuspiam formulae, quae ad maximum reduci debeat; ipsa igitur haec formula prodibit, si haec expressio in dx ducta integretur. Multiplicemus autem per $4dx$ et integratio dabit

$$\begin{aligned} &2rr(x-a)^2 + 2rr(x-b)^2 + 2rr(x-c)^2 + \text{etc.} \\ &-(x-a)^4 - (x-b)^4 - (x-c)^4 - \text{etc.} + C. \end{aligned}$$

Haec autem forma, si pro constante sumamus $-nr^4$ existente n numero observationum, mutatis signis manifesto hinc nascitur ista formula

$$(rr-(x-a)^2)^2 + (rr-(x-b)^2)^2 + (rr-(x-c)^2)^2 + \text{etc.}$$

12. Loco ergo formulae, quam Illustris BERNOULLI maximo aequari debere censuit, nunc assecuti sumus aliam formulam ad quaestionis naturam maxime accommodatam, quae ad maximum reducta verum praebet valorem ipsius x, quandoquidem ista formula obtinetur, si quadrata omnium graduum bonitatis in unam summam colligantur.

13. Ut nostrae methodi exemplum proferamus, consideremus observationes[1]), quibus Tomo I priorum Academiae Commentariorum longitudo observatorii Petropolitani est conclusa ex differentia meridianorum inter observatorium Parisinum et Petropolitanum, quae ita referuntur

$$\text{I. } 1^0\,51'\,50'', \quad \text{II. } 1^0\,51'\,52'', \quad \text{III. } 1^0\,51'\,39'',$$
$$\text{IV. } 1^0\,51'\,50'', \quad \text{V. } 1^0\,51'\,50'', \quad \text{VI. } 1^0\,51'\,50''.$$

Ex quibus medium arithmeticum more solito sumptum dat

$$1^0\,51'\,48\tfrac{1}{2}''.$$

14. Nunc ut formulas nostras ad hunc casum applicemus, sumamus

$$\Pi = 1^0\,51'\,48\tfrac{1}{2}''$$

eruntque valores sex nostrarum litterarum a, b, c, d, e, f sequentes

$$a = 1\tfrac{1}{2}, \quad b = 3\tfrac{1}{2}, \quad c = -9\tfrac{1}{2}, \quad d = 1\tfrac{1}{2}, \quad e = 1\tfrac{1}{2}, \quad f = 1\tfrac{1}{2},$$

unde utique earum summa sit $A = 0$; tum vero invenitur summa quadratorum $B = \frac{223}{2}$, summa cuborum vero $C = -801$. Unde aequatio nostra ob $n = 6$ erit

$$12uxx - 6uux + 334\tfrac{1}{2}x + 801 = 0.$$

1) *Eclipses satellitum Jovis nostris respondentes, observatae in observatorio regio Parisino a D. D. Cassino et Maraldo.* Comment. acad. sc. Petrop. **1** (1726), 1728, p. 474—479.
L. G. D.

15. Nunc numerum u ex eiusmodi casu definiamus, quem Auctor observationum reiiciendum censuit; talis erat $1^0\,52'\,20''$, unde fit $u = 31\frac{1}{2}$. Ponamus autem esse $u = 30$ et aequatio nostra quadratica erit

$$360xx - 5065\tfrac{1}{2}x + 801 = 0,$$

cuius loco in numeris rotundioribus scribere licet

$$36xx = 500x - 80,$$

unde fit

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{59620}}{36},$$

hincque colligitur vel

$$x = \frac{250 + 244}{36} = 14$$

vel

$$x = \frac{250 - 244}{36} = \frac{1}{6},$$

qui posterior valor solus locum habere potest, quem etiam statim colligere potuissemus neglecto in aequatione primo termino, unde fuisset valor $x = \frac{8}{50} = \frac{1}{6}$ proxime, sicque hinc erit differentia meridianorum quaesita

$$= 1^0\,51'\,48\tfrac{2}{3}''.$$

16. Deinde etiam reiecta fuerat observatio, quae dederat $1^0\,51'\,0''$, unde fit $u = -48\frac{1}{2}$. Sumatur autem $u = -48$ et aequatio nostra erit

$$-576xx - 13489\tfrac{1}{2}x + 801 = 0,$$

unde neglecto primo termino fit $x = \frac{8}{135} = \frac{1}{17}$ [proxime]. Quoniam autem haec observatio reiici meruisset, si fuisset circiter $u = -300$, hinc subducto ut ante calculo prodiisset $x = \frac{1}{6}$ circiter; unde patet hoc casu regula communi nos contentos esse potuisse, cum nequidem unum minutum secundum spectari possit.

17. Quoniam autem inter has observationes tertia tantopere a reliquis discrepat, fortasse conveniet non procul ab ea limitem constituere. Quodsi

faciamus pro casu $1^0\,51'\,33\frac{1}{2}''$ $u = -15$, hinc aequatio nostra foret

$$-180xx - 1000x + 800 = 0,$$

cuius aequationis minor radix erit $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, ita ut hinc differentia meridianorum proditura sit

$$1^0\,51'\,49\tfrac{1}{6}''.$$

Ex hoc casu denuo patet nullum notabilem errorem esse metuendum, nisi valde enormiter in assumptione numeri u aberraverimus, in quo negotio sufficiet notasse semper nuu multo maius esse debere quam $3B$.

18. Imprimis haec methodus applicari meretur ad illas observationes, ex quibus non ita pridem Cel. LEXELL[1]) parallaxin Solis determinavit, unde exempli loco tantum depromamus sequentes quatuor conclusiones ex observationibus formatas, quae erant

I.	II.	III.	IV.
8,52	8,43	8,86	8,28,

inter quas medium arithmeticum sumendo prodit 8,52. Quodsi ergo statuamus

$$\Pi = 8{,}52,$$

valores quatuor litterarum a, b, c, d sequenti modo constitui possunt

$$a = 1, \quad b = 9, \quad c = -34, \quad d = +24,$$

ut eorum summa prodeat $A = 0$, scilicet hi numeri denotant partes centesimas unius minuti secundi. Hinc ergo erit summa quadratorum $B = 1814$, summa vero cuborum $C = -24750$; unde ob $n = 4$ aequatio nostra erit

$$8uxx - 4uux + 5442x + 24750 = 0.$$

19. Quodsi iam sumamus pro termino, ubi gradus bonitatis evanescit, $u = 40$, aequatio nostra evadet

$$320xx - 958x + 24750 = 0.$$

1) A. J. LEXELL (1740—1784), *Disquisitiones de investiganda vera quantitate parallaxeos Solis ex transitu Veneris ante discum Solis 1769 etc. Petropoli 1772.* L. G. D.

Unde autem valor ipsius x prodiret imaginarius; hanc ob rem sumamus $u = 50$ ac aequatio fiet

$$400xx - 10000x + 5442x + 24750 = 0,$$

unde adhuc in imaginaria incidimus. Sumpto autem $u = 60$ erit minor valor ipsius $x = 3\frac{5}{12}$ [1]), qui autem valor nimis magnus videri posset. Eo autem admisso foret parallaxis Solis $= 8{,}555$. Ceterum notetur ex maioribus valoribus ipsius u minores valores pro x deduci. Et quoniam applicatio huius methodi tam est vaga, merito dubitare licet, num hac ratione propius ad veritatem accedere queamus. Ac fortasse sufficiet hinc saltem didicisse, utrum valor ipsius x prodituras sit positivus an negativus.

20. Hoc quidem casu vidimus valorem ipsius x certe esse positivum, praeterea quod pro C numerum negativum invenimus; unde in genere observasse iuvabit, quoties numerus C prodierit positivus, tum x fieri negativum, contra autem, si C fuerit negativum, valorem ipsius x fore positivum. Utroque autem casu tam exiguus statui debebit, ut determinatio a regula vulgari vix discrepet. Saltem hoc adiici poterit, quo maior fuerit numerus C, etiam valorem ipsius x augeri debere. Si enim etiam summa cuborum C evanesceret, tum semper foret $x = 0$, quicunque valor pro u acciperetur, prorsus ut regula vulgaris postulat.

21. Hinc autem, non obstante incertitudine a numero u oriunda, aliquid si non certum tamen satis probabile statui posse videtur, si ad haec momenta attendamus. Primo certum est, quoties fuerit summa cuborum $C = 0$, tum etiam semper fore $x = 0$, secundo, quo maior fuerit quantitas C, eo maiorem quoque futurum esse valorem ipsius x sub signo contrario affectum. Tertio satis clarum est quantitatem nuu plurimum superare debere quantitatem $3B$. Quibus perpensis satis probabili ratione statui posse videtur

$$x = -\frac{C}{\lambda nB},$$

ubi quidem numerus λ arbitrio nostro relinquitur. Verumtamen pro omnibus casibus vix a veritate aberrabitur, si ponatur $\lambda = 2$ vel ad summum $\lambda = 3$;

1) Aequatio $480x^2 - 8958x + 24750 = 0$ dat pro radice minore valorem accuratiorem $x = 3\frac{3}{8}$.
L. G. D.

discrimen enim hinc oriundum plerumque tam parvi erit momenti, ut vix attendi mereatur. Casus enim, quo maximus error esset metuendus, sine dubio foret, si plures observationes, quarum numerus sit $= i$, prorsus inter se convenirent, singulis existentibus $= a$, quibuscum unica observatio coniungeretur praebens $-ia$, ut fiat summa omnium $A = 0$; tum autem erit summa quadratorum

$$B = iaa + iiaa = i(i+1)aa,$$

summa vero cuborum

$$ia^3 - i^3a^3 = -i(ii-1)a^3.$$

Nunc ergo, si $n = i + 1$, nostra formula dabit

$$x = +\frac{i(ii-1)a}{\lambda i(i+1)^2} = \frac{(i-1)a}{\lambda(i+1)};$$

ergo si fuerit i numerus praegrandis et capiatur $\lambda = 2$, prodit $x = \frac{1}{2}a$. Sumpto igitur $\lambda = 2$ in exemplo priore [§ 14], ubi erat $n = 6$, $B = 111\frac{1}{2}$ et $C = -801$, fiet

$$x = +\frac{801}{12 \cdot 111\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

propemodum. Pro altero vero exemplo [§ 18], quo $n = 4$, $B = 1814$ et $C = -24750$, fit

$$x = +\frac{24750}{8 \cdot 1814} = \frac{8}{5}$$

circiter, qui valores nihil absurdi involvere videntur.

Si quis autem putet maiori iure sumi debere $\lambda = 3$, operae vix pretium erit super differentia disputare, cum ipsa observationum natura maiorem gradum praecisionis non recipiat.

RECHERCHES SUR UNE NOUVELLE ESPECE DE QUARRES MAGIQUES[1]

Commentatio 530 indicis ENESTROEMIANI
Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen 9, Middelburg 1782, p. 85—239
Commentationes arithmeticae 2, 1849, p. 302—361

1. Une question fort curieuse, qui a exercé pendant quelque temps la sagacité de bien du monde, m'a engagé à faire les recherches suivantes, qui semblent ouvrir une nouvelle carrière dans l'Analyse et en particulier dans la doctrine des combinaisons. Cette question rouloit sur une assemblée de 36 officiers, de six différens grades et tirés de six régimens différens, qu'il s'agissoit de ranger dans un quarré de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât six officiers tant de différens caractères que de régimens différens. Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnoître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse.

2. Pour mieux expliquer l'état de la question mentionnée, je marquerai les six régimens différens par les lettres latines

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f,$$

et les six différens grades par les grecques

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \zeta;$$

1) Voir le mémoire 795 de ce volume. L. G. D.

et il est clair que le caractère de chaque officier est déterminé par deux lettres, l'une latine et l'autre grecque, dont la première marque son régiment et l'autre son grade, et qu'il y aura en effet trente-six combinaisons de deux de ces lettres, que voici:

$$\begin{array}{cccccc} a\alpha & a\beta & a\gamma & a\delta & a\varepsilon & a\zeta \\ b\alpha & b\beta & b\gamma & b\delta & b\varepsilon & b\zeta \\ c\alpha & c\beta & c\gamma & c\delta & c\varepsilon & c\zeta \\ d\alpha & d\beta & d\gamma & d\delta & d\varepsilon & d\zeta \\ e\alpha & e\beta & e\gamma & e\delta & e\varepsilon & e\zeta \\ f\alpha & f\beta & f\gamma & f\delta & f\varepsilon & f\zeta \end{array}$$

dont chacune exprime le caractère d'un officier. Il s'agit donc d'inscrire ces 36 termes dans les 36 cases d'un quarré en sorte que sur chaque bande, tant horizontale que verticale, on rencontre tant les six lettres latines que les grecques.

3. On aura donc trois conditions à remplir, dont la première exige que sur chaque ligne horizontale on trouve les six lettres tant latines que grecques, en second lieu, que les douze mêmes caractères se rencontrent dans toutes les bandes verticales, et enfin, que tous les trente-six termes rapportés se trouvent réellement inscrits dans le quarré ou, ce qui revient au même, qu'aucun terme ne s'y rencontre deux fois. Car, s'il ne s'agissoit que de satisfaire aux deux premières conditions, il ne seroit pas difficile de trouver plusieures solutions; en voici une:

$$\begin{array}{cccccc} a\alpha & b\zeta & c\delta & d\varepsilon & e\gamma & f\beta \\ b\beta & c\alpha & f\varepsilon & e\delta & a\zeta & d\gamma \\ c\gamma & d\varepsilon & a\beta & b\zeta & f\delta & e\alpha \\ d\delta & f\gamma & e\zeta & c\beta & b\alpha & a\varepsilon \\ e\varepsilon & a\delta & b\gamma & f\alpha & d\beta & c\zeta \\ f\zeta & e\beta & d\alpha & a\gamma & c\varepsilon & b\delta \end{array}$$

mais cet arrangement a le défaut que les termes $b\zeta$ et $d\varepsilon$ s'y rencontrent deux fois et que les termes $b\varepsilon$ et $d\zeta$ y manquent entièrement.

4. Puis donc que tous les soins employés pour la construction d'un tel quarré de trente-six cases ont été inutiles, pour donner plus d'étendüe à mes recherches, au lieu de six régimens et de six différens grades, je mettrai un nombre quelconque n, de sorte qu'il y ait n lettres latines

$$a, \ b, \ c, \ d \text{ etc.}$$

et autant de grecques

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta \text{ etc.}$$

à combiner de nn manières différentes et à ranger tellement dans un quarré de nn cases, que chaque bande, tant horizontale que verticale, contienne toutes les lettres latines et grecques et qu'aucun terme ne se rencontre deux fois dans le quarré.

5. Parce donc que chaque ligne du quarré contient toutes ces différentes lettres et que partant la somme en est partout la même, il est clair qu'un tel arrangement satisfera à la condition des quarrés magiques ordinaires. Car, pour produire tous les nombres dans l'ordre naturel, on n'a qu'à donner aux lettres latines a, b, c, d, e etc. les valeurs 0, n, $2n$, $3n$, $4n$, ... $(n-1)n$, et aux lettres grecques α, β, γ, δ, ε etc. les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, ... n. Mais puisque dans ces quarrés il s'agit seulement de la somme de tous les nombres qui se trouvent dans chaque bande, tant horizontale que verticale, il n'est point nécessaire que tous les nombres s'y trouvent sur chaque bande, pourvu que la somme en soit partout la même; ce qui est aussi la raison par laquelle on peut construire des quarrés magiques ordinaires de 36 cases.

6. Pour rendre plus commodes les opérations que j'aurai à faire dans la suite, je mettrai au lieu des lettres latines et grecques les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 etc., dont je nommerai, pour les distinguer entre eux, les uns les *nombres latins* et les autres les *nombres grecs*; et afin de ne jamais les confondre, je joindrai les nombres grecs aux latins en forme d'exposans, de la manière qu'on va voir dans le quarré ci-joint de 49 cases

$$\begin{matrix} 1^1 & 2^6 & 3^4 & 4^3 & 5^7 & 6^5 & 7^2 \\ 2^2 & 3^7 & 1^5 & 5^4 & 4^1 & 7^6 & 6^3 \\ 3^3 & 6^1 & 5^6 & 7^5 & 1^2 & 4^7 & 2^4 \\ 4^4 & 5^2 & 6^7 & 1^6 & 7^3 & 2^1 & 3^5 \\ 5^5 & 1^3 & 7^1 & 2^7 & 6^4 & 3^2 & 4^6 \\ 6^6 & 7^4 & 4^2 & 3^1 & 2^5 & 5^3 & 1^7 \\ 7^7 & 4^5 & 2^3 & 6^2 & 3^6 & 1^4 & 5^1 \end{matrix}$$

dans lequel j'ai rangé les nombres latins suivant leur ordre naturel tant dans la première bande horizontale que verticale, de sorte que ces nombres représentent en même temps les indices de ces deux bandes et ceux de leurs compagnes. J'ai égalé aussi les nombres grecs, ou exposans, aux latins dans la première bande verticale, comme je ferai partout dans la suite, puisque la signification de ces nombres est absolument arbitraire.

7. Puisqu'il est aisé de se convaincre que tous les termes inscrits dans le quarré précédent satisfont parfaitement aux trois conditions requises et rapportées ci-dessus; pour rapprocher le lecteur du point de vüe duquel il faut envisager la plupart des méthodes qui nous ont conduit aux recherches suivantes, nous allons en faire le commencement par l'analyse de la construction du quarré rapporté. Pour cet effet, nous reprenons le quarré latin fondamental qui, en omettant les exposans, aura la forme suivante:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 \end{matrix}$$

où chacune des sept bandes, tant horizontales que verticales, contient tous les sept nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

8. Ayant donc établi ce *quarré latin*, tout revient à trouver une méthode sure pour joindre les nombres grecs, ou exposans, à chaque nombre latin de ce quarré; et d'abord, pour commencer par l'exposant 1, puisqu'il faut qu'il se rencontre dans chaque bande tant horizontale que verticale, il s'agit de tirer des bandes verticales sept nombres différens entre eux et tels qu'ils se rapportent en même temps à des bandes différentes horizontales; ou bien: ces nombres qu'on tire de chaque bande verticale doivent tous être pris à différentes hauteurs, ce qu'il faut faire pareillement par rapport aux autres exposans, 2, 3, 4, 5 etc. Où il faut encore remarquer que, puisque nous supposons les exposans de la première verticale connus et que nous les égalons toujours aux nombres latins de cette bande, les premiers termes de ces formules que nous venons de décrire suivront toujours l'ordre des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

9. Puis donc que dans les recherches suivantes tout dépend de ces formules qui nous servent à régler l'inscription des exposans, ou à déterminer les grades des officiers rangés, je les nommerai dans la suite *les formules directrices*; il faut en avoir une pour chaque exposant. Ainsi, dans le quarré de 49 cases rapporté ci-dessus au paragraphe 6$^{\text{ième}}$, les formules directrices sont

pour	l'exposant	1	celle-ci	1 6 7 3 4 2 5,
„	„	2	„	2 5 4 6 1 3 7,
„	„	3	„	3 1 2 4 7 5 6,
„	„	4	„	4 7 3 5 6 1 2,
„	„	5	„	5 4 1 7 2 6 3,
„	„	6	„	6 2 5 1 3 7 4,
„	„	7	„	7 3 6 2 5 4 1.

Voila donc ce qu'il faut entendre par le terme *formules directrices*, dont nous nous servirons partout dans la suite; et il est d'abord évident que, pour construire un quarré complet, il faut avoir une telle formule directrice pour chaque nombre grec ou exposant. Ensuite, il faut nécessairement que toutes ces formules directrices s'accordent tellement entre elles qu'en les écrivant l'une sous l'autre on rencontre dans chaque rangée verticale tous les différens nombres; puisque autrement, le même nombre du quarré latin ou principal devroit recevoir deux exposans différens.

10. Ayant donc établi pour un cas quelconque un quarré de nombres latins, la première opération consiste à chercher les formules directrices pour chaque exposant; et s'il arrive que pour un seul de ces nombres on ne puisse pas trouver une telle formule, on peut hardiment prononcer que le quarré latin est incapable de fournir un quarré complet. Et quand même on aura trouvé des formules directrices pour tous les exposans, s'il est impossible de les choisir ensorte qu'elles s'accordent entre elles, de la manière que je viens d'assigner et comme cela a réussi dans l'exemple rapporté, c'est encore une marque sure que le quarré latin n'est pas propre à fournir une solution du problème. Mais il faut bien prendre garde de ne faire cette conclusion qu'après s'être pleinement convaincu qu'on a trouvé et examiné toutes les formules directrices que le quarré proposé peut admettre.

11. La formation des formules directrices est donc le premier et le principal objet dans ces recherches; mais je dois avouer que jusqu'ici je n'avois aucune méthode sure qui puisse conduire à cette investigation. Il semble même qu'on doive se contenter d'une espèce de simple tâtonnement, que je vais expliquer pour le quarré latin de 49 cases rapporté ci-dessus.

Pour trouver, par exemple, la formule directrice de l'exposant 4 de ce quarré, choisissons à volonté les quatre premiers termes, que je prendrai comme ils ont été marqués

$$4 \quad 7 \quad 3 \quad 5$$

et qui sont tirés des quatre premières bandes verticales et des quatre horizontales qui répondent aux indices 4, 6, 1, 2; et il est clair que les trois derniers termes de nôtre formule,

$$1 \quad 2 \quad 6,$$

doivent être tirés des trois dernières bandes verticales et des trois horizontales qui répondent aux indices 3, 5, 7. Or, les morceaux des bandes horizontales 3^ième^, 5^ième^ et 7^ième^ nous fournissent les termes suivans:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{matrix}$$

desquelles résultent évidemment les trois derniers termes de nôtre directrice

dans l'ordre 6, 1, 2, comme nous les avons assignés ci-dessus. Si les quatre premiers termes ne nous avoient point été connus, on voit par ce que nous venons de dire qu'il auroit falu examiner de la même manière toutes les combinaisons possibles.

12. Après avoir exposé en général les opérations qu'on doit entreprendre pour construire de tels quarrés complets, je passe à des recherches plus particulières, qui varieront naturellement par rapport à la nature des quarrés latins, qui peuvent être formés en d'autant plus de manières différentes que le nombre de cases dont il est composé est grand; et on s'apperçoit aisément que bientôt le nombre de toutes les façons de le construire possibles devient si grand qu'on n'en sauroit plus faire le dénombrement. C'est pourquoi je me contenterai ici de parcourir quelques espèces simples et régulières de quarrés latins, qui ne manqueront pas de nous conduire à des espèces beaucoup plus compliquées.

13. D'abord, le quarré latin le plus simple est sans doute celui où tous les nombres 1, 2, 3, 4, ... n marchent dans leur ordre naturel, en observant qu'étant parvenu au dernier, on doit recommencer par l'unité. Les quarrés de cette première espèce, d'une classification qui s'est présentée pour ainsi dire d'elle-même, auront en général pour tout nombre nn de cases la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n & 1 \\
3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n & 1 & 2 \\
4 & 5 & 6 & \ldots & n & 1 & 2 & 3 \\
5 & 6 & \ldots & n & 1 & 2 & 3 & 4 \\
6 & \ldots & n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

etc.

Les quarrés de cette première espèce, qui a lieu pour tous les nombres des bandes horizontales et verticales n, seront nommés dans la suite *quarrés latins à simple marche.*

14. La seconde espèce contiendra, suivant cette classification, les *quarrés latins à double marche,* qui naissent en prennant les nombres de la première horizontale, rangés dans leur ordre naturel, deux à deux et les transposant dans la seconde horizontale, qui sera par conséquent

2 1 4 3 6 5 8 7 etc.

De celle-ci et de la première horizontale, on construit ensuite la troisième et la quatrième en ajoutant 2 à chacun de leurs termes, la cinquième et sixième en ajoutant 2 aux termes de la troisième et quatrième, et ainsi de suite. Les *quarrés à double marche* ainsi formés auront en général la forme suivante

1	2	3	4	5	6	7	8	etc.
2	1	4	3	6	5	8	7	etc.
3	4	5	6	7	8	9	10	etc.
4	3	6	5	8	7	10	9	etc.
5	6	7	8	9	10	11	12	etc.
6	5	8	7	10	9	12	11	etc.

etc.,

par laquelle on peut voir facilement que cette seconde espèce ne sauroit avoir lieu que pour les quarrés dont le nombre des cases dans chaque bande est pair.

15. A la troisième classe, je rapporte les *quarrés latins à triple marche,* où l'on considère dans la première bande horizontale trois nombres conjointement, pour les varier en trois différentes manières, avant que de former les bandes suivantes qu'on obtient trois à trois en ajoutant 3 aux termes des trois précédentes, comme on peut voir dans la forme générale suivante

1	2	3	4	5	6	7	8	9	etc.
2	3	1	5	6	4	8	9	7	etc.
3	1	2	6	4	5	9	7	8	etc.
4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.
5	6	4	8	9	7	11	12	10	etc.
6	4	5	9	7	8	12	10	11	etc.
7	8	9	10	11	12	13	14	15	etc.

etc.,

qui nous fait voir que cette construction ne peut valoir que lorsque le nombre des cases qu'une bande renferme est divisible par 3.

16. De la même manière, on peut former les quarrés de la quatrième classe procédans *à quadruple marche,* en prennant séparément quatre à quatre des termes de la première bande horizontale et passant par toutes les transpositions qu'ils admettent et qui forment les quatre premières bandes horizontales, dont on tire les quatre suivantes en ajoutant 4 à chaque terme, et ainsi des autres. Mais, comme les quatre premiers termes,

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4,$$

admettent plusieures différentes transpositions, nous aurons plusieures formes générales pour les quarrés de cette espèce, dont il suffira de rapporter le premier membre (j'appelle „membre d'un quarré“ une quelconque de ses parties qui forme un quarré à part), attendu qu'il est facile d'en déduire la formule générale, les transpositions étant les mêmes dans tous les autres membres ou quarrés simples dont est composé le grand quarré latin qui, dans cette classe, doit toujours avoir un nombre de cases divisible par $4^2 = 16$. Voici quatre transpositions semblables

I				II				III				IV			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1	4	3	2	1	4	3	2	3	4	1	2	4	1	3
3	4	1	2	3	4	2	1	3	4	1	2	3	1	4	2
4	3	2	1	4	3	1	2	4	1	2	3	4	3	2	1

dont il seroit superflu de former ou de rapporter les formes générales pour les quarrés composés de pareils membres. On s'aperçoit aisément qu'on n'a qu'à varier suivant les mêmes loix les quaternaires suivans de la première horizontale.

On voit aussi que cette classification pourroit nous conduire à bien d'autres quarrés réguliers; mais nous nous arrêtons ici, pour développer plus soigneusement dans les sections suivantes les quatre espèces que nous venons d'établir et pour en déduire des quarrés complets.

SECTION PREMIERE

DES QUARRES LATINS A SIMPLE MARCHE DE LA FORME GENERALE

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & & n & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & \ldots & & n & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & \ldots & & n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & \ldots & & n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

etc.

CAS DE $n=2$

17. Commençons par le cas le plus simple, où $n=2$ et le quarré latin

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

d'où l'on ne sauroit tirer aucune formule directrice, et par conséquent ce cas est impossible, puisqu'on n'en peut déduire aucun autre quarré. Et en effet, si l'on satisfait aux deux premières conditions de la question, rapportées au § 3, on parvient au quarré

$$\begin{array}{cc} 1^1 & 2^2 \\ 2^2 & 1^1 \end{array}$$

où les deux termes 1^1 et 2^2 se trouvent deux fois, pendant que les deux autres, 2^1 et 1^2, manquent entièrement. Donc, si la question rouloit sur une assemblée de quatre officiers de deux différens grades et régimens, on voit d'abord qu'il seroit impossible de les ranger dans un quarré de la manière préscrite.

CAS DE $n = 3$

18. Passons au cas où $n = 3$, et nôtre quarré latin sera

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

dont la diagonale à termes différens, 1 3 2, fournit d'abord une formule directrice pour l'exposant 1; et puisque tous les nombres croissent, en descendant, de l'unité, il est clair que les formules directrices suivront le même ordre et qu'elles seront par conséquent

pour l'exposant	1	1 3 2,
„ „	2	2 1 3,
„ „	3	3 2 1.

En insérant donc les exposans conformément à ce système de directrices, on obtiendra le quarré complet suivant:

$$\begin{matrix} 1^1 & 2^3 & 3^2 \\ 2^2 & 3^1 & 1^3 \\ 3^3 & 1^2 & 2^1 \end{matrix}$$

ce qui est la seule solution qui peut avoir lieu pour les quarrés à simple marche de neuf cases, puisque la formule 1, 3, 2 est la seule directrice pour l'exposant 1 et que le quarré fondamental ou latin proposé est le seul pour le cas rapporté.

CAS DE $n = 4$

19. Considérons le cas où $n = 4$, qui nous amène le quarré latin suivant:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

mais ici, on voit d'abord qu'il est impossible de trouver aucune directrice pour l'exposant 1, et, en examinant le quarré selon les regles préscrites, on verra qu'il [en] est de même de tous les autres exposans; d'où l'on doit conclure que ce quarré latin ne sauroit fournir aucun quarré complet pour le cas $n = 4$. Mais il faut bien remarquer que ce quarré latin n'est pas le seul qui puisse avoir lieu pour le cas rapporté, attendu qu'on peut former trois autres, parmi lesquels il s'en trouvera un qui nous conduira à de très belles solutions, et il n'y a donc que le quarré de 16 cases à simple marche qui se refuse aux conditions requises.

20. Le même inconvénient se rencontre dans tous les cas où le nombre n est pair, et cette observation nous conduit au théorème suivant:

Pour tous les cas où le nombre n est pair, le quarré latin à simple marche ne sauroit jamais fournir une solution de la question proposée.

Pour le démontrer, on n'a qu'à faire voir qu'il est impossible de trouver des directrices pour l'exposant 1 de tout quarré à simple marche dont le nombre des cases horizontales ou verticales est pair. Supposons pour cet effet qu'une telle formule directrice soit

$$1 \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad \text{etc.},$$

où les lettres a, b, c, d etc., dont le nombre est $n-1$, marquent les nombres 2, 3, 4, ... n, dans un ordre quelconque, qui est déterminé par les colonnes horizontales correspondantes aux indices α, β, γ, δ, ε etc., qui marquent aussi les nombres 2, 3, 4, 5 etc., de sorte que la somme de tous les nombres α, β, γ, δ etc. doit être égale à la somme des a, b, c, d etc.

Puis donc que, dans nôtre quarré latin, tous les nombres des bandes horizontales croissent en progression arithmétique dont la différence est 1, en remarquant qu'en passant à des nombres au delà de n il faut recommencer par l'unité, il s'ensuit que, parce que le second nombre, a, de la directrice supposée est tiré de la seconde bande verticale et de l'horizontale qui répond à l'indice α, on aura

$$a = \alpha + 1.$$

De la même manière, puisque le troisième terme, b, de cette directrice est tiré de la troisième bande verticale et de l'horizontale correspondante à l'indice β, il y aura

$$b = \beta + 2.$$

En poursuivant ce raisonnement, on trouve qu'il y aura pour les autres termes

$$c = \gamma + 3, \quad d = \delta + 4, \quad e = \varepsilon + 5, \quad f = \zeta + 6 \quad \text{etc.},$$

en observant toujours qu'étant parvenu à un nombre plus grand que n, on mettra à sa place l'excès au dessus de n. Soit maintenant la somme de toutes les lettres

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = S,$$

et la somme des lettres $a + b + c + d + \text{etc.}$ sera $= S + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$, ou bien il y aura

$$a + b + c + d + \text{etc.} = S + \tfrac{1}{2} n(n-1).$$

Or, la somme des lettres latines, $a + b + c + d + \text{etc.}$, et celle des grecques, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$, comme nous avons observé ci-dessus, doivent être égales entre elles, ou, ce qui revient au même, la différence doit être un multiple du nombre n, ce qui étant mis $= \lambda n$ nous conduit à cette équation

$$\tfrac{1}{2} n(n-1) = \lambda n,$$

qui donne

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(n-1).$$

Par conséquent, puisque λ est un nombre entier, cette égalité ne sauroit subsister à moins que $n-1$ ne fût un nombre pair ou bien n un nombre impair. De cette façon, la vérité de nôtre théorème est rigoureusement démontrée, et il seroit inutile de vouloir appliquer les quarrés latins à aucun des cas où n est un nombre pair.

CAS DE $n = 5$

21. Revenons à nos quarrés, et le cas de $n = 5$ nous conduit au quarré latin à simple mache suivant

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

dont on peut tirer sans difficulté les trois directrices suivantes pour l'ex-

posant 1:

1	3	5	2	4
1	4	2	5	3
1	5	4	3	2

En ajoutant l'unité à chacun des termes de ces directrices, on obtiendra celles pour l'exposant 2, qui, en y ajoutant de nouveau l'unité, donneront celles pour l'exposant 3, et ainsi des autres. De cette façon, on pourra construire les trois quarrés suivans propres à diriger l'inscription des exposans:

1	3	5	2	4	1	4	2	5	3	1	5	4	3	2
2	4	1	3	5	2	5	3	1	4	2	1	5	4	3
3	5	2	4	1	3	1	4	2	5	3	2	1	5	4
4	1	3	5	2	4	2	5	3	1	4	3	2	1	5
5	2	4	1	3	5	3	1	4	2	5	4	3	2	1

22. Moyennant ces trois systèmes complets de directrices, on pourra former trois quarrés complets de 25 cases et partant autant de solutions, si le problème rouloit sur un assemblage de 25 officiers de cinq différens rangs de cinq régimens différens. Voici les trois quarrés complets.[1])

I					II					III				
1^1	2^5	3^4	4^3	5^2	1^1	2^3	3^5	4^2	5^4	1^1	2^4	3^2	4^5	5^3
2^2	3^1	4^5	5^4	1^3	2^2	3^4	4^1	5^3	1^5	2^2	3^5	4^3	5^1	1^4
3^3	4^2	5^1	1^5	2^4	3^3	4^5	5^2	1^4	2^1	3^3	4^1	5^4	1^2	2^5
4^4	5^3	1^2	2^1	3^5	4^4	5^1	1^3	2^5	3^2	4^4	5^2	1^5	2^3	3^1
5^5	1^4	2^3	3^2	4^1	5^5	1^2	2^4	3^1	4^3	5^5	1^3	2^1	3^4	4^2

La construction de ces trois quarrés est d'autant plus aisée qu'après avoir inscrit l'exposant 1, les autres se succèdent dans leur ordre naturel, en descendant par les colonnes verticales.

23. Il nous reste à remarquer encore à l'égard des formules directrices, que leurs termes vont en progression arithmétique, en croissant dans la première de 2, dans la seconde de 3, dans la troisième de 4, dans la qua-

1) Pour établir la correspondance entre ces trois carrés complets et les directrices à la fin du § 21, il faudrait intervertir l'ordre des carrés II et III. L. G. D.

trième de 5 et ainsi des autres. Ensuite, que les exposans des premières bandes horizontales des trois quarrés complets sont

dans le premier	1	5	4	3	2,
dans le second	1	3	5	2	4,
dans le troisième	1	4	2	5	3,

qui conviennent avec les trois formules directrices. Enfin, le premier de ces trois espèces de quarrés, en changeant l'ordre des bandes horizontales, fournit le quarré très remarquable suivant

$$\begin{array}{ccccc} 1^1 & 2^5 & 3^4 & 4^3 & 5^2 \\ 3^3 & 4^2 & 5^1 & 1^5 & 2^4 \\ 5^5 & 1^4 & 2^3 & 3^2 & 4^1 \\ 2^2 & 3^1 & 4^5 & 5^4 & 1^3 \\ 4^4 & 5^3 & 1^2 & 2^1 & 3^5 \end{array}$$

dans lequel non seulement les bandes verticales et horizontales renferment les différentes lettres grecques et latines, mais où même les diagonales et leurs paralleles complettées[1]), comme

$$3^3 \quad 1^4 \quad 4^5 \quad 2^1 \quad 5^2,$$

satisfont aux conditions préscrites.

CAS DE $n = 7$

24. Le cas de $n = 7$ nous fournit le quarré latin à simple marche de 49 cases suivant

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

1) C'est ce qu'on appelle *les diagonales brisées*. L. G. D.

où la considération des directrices croissantes en progression arithmétique (§ 20) nous fournit d'abord les formules directrices suivantes pour l'exposant 1

1	3	5	7	2	4	6
1	4	7	3	6	2	5
1	5	2	6	3	7	4
1	6	4	2	7	5	3
1	7	6	5	4	3	2

dont la première croit de 2, la seconde de 3, la troisième de 4, la quatrième de 5 et la cinquième de 6. Mais il ne faut pas penser que ce sont là toutes les directrices pour l'exposant 1, puisqu'en examinant le quarré plus soigneusement on trouve encore les 14 suivantes:

1	3	6	2	7	5	4
1	3	7	6	4	2	5
1	4	6	3	2	7	5
1	4	7	5	3	2	6
1	4	7	2	6	5	3
1	4	2	7	6	3	5
1	5	4	2	7	3	6
1	5	7	3	6	4	2
1	6	4	7	3	5	2
1	6	4	3	7	2	5
1	6	5	2	4	7	3
1	6	2	5	7	4	3
1	7	4	6	2	5	3
1	7	5	3	6	2	4

25. Toutes ces formules directrices ont été trouvées de la manière très embarrassante expliquée ci-dessus (§ 8); mais le bel ordre qui regne dans les quarrés à simple marche nous fournit des moyens très faciles pour trouver plusieures telles formules, dès qu'on en a trouvé une seule, ce qui sera le sujet du problème suivant:

Ayant trouvé une formule directrice pour un quarré quelconque à simple marche dont le nombre n est impair, trouver des regles sures moyennant lesquelles on puisse trouver plusieures autres formules directrices.

26. Soit

$$1 \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad \text{etc.}$$

la formule directrice qu'on a trouvée, qui se rapporte à l'exposant 1 et dont le terme qui répond à l'indice indéterminé t soit $= x$, de sorte que, prennant $t = 1$, il devienne aussi $x = 1$. Il faut donc remarquer 1°) que, donnant à t toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à n, aussi le terme x doive recevoir toutes ces différentes valeurs; 2°) que, puisque t est l'indice de la colonne verticale de laquelle le nombre x est tiré, l'indice de la bande horizontale sera, comme on voit par la construction du quarré, $= x - t + 1$, qui répond aussi au terme x. Puis donc que les nombres a, b, c, d etc. doivent être tirés de différentes bandes horizontales, il s'ensuit que cette formule $x - t + 1$, et partant aussi $x - t$, doit comprendre toutes les différentes valeurs, de même que les nombres t et x.

27. Cela remarqué, soit

$$1 \quad A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad \text{etc.}$$

une nouvelle formule directrice qu'on veut dériver de la donnée et dont l'indice d'un terme quelconque X soit $= T$; et on comprend, par ce que nous avons dit ci-dessus, qu'en donnant à T toutes les valeurs possibles, non seulement le terme X, mais aussi la différence $X - T$ doit recevoir de même toutes ces différentes valeurs. Ces conditions seront évidemment remplies en prennant

$$T = x \quad \text{et} \quad X = t$$

et partant on obtiendra toujours une nouvelle directrice en échangeant les deux nombres t et x entre eux, d'où résulte cette regle pour la formation d'une nouvelle directrice:

Prenés x pour l'indice et t pour le terme qui lui répond.

Cette nouvelle directrice sera donc formée *per inversionem*, par renversement.

28. On pourra former une autre nouvelle directrice en prennant

$$T = t \quad \text{et} \quad X = \alpha + t - x.$$

Car, si l'on fait varier t par toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n, il est clair que le terme $\alpha + t - x$ recevra aussi toutes ces différentes valeurs, quel que soit le nombre α. Ensuite, puisque $X - T = \alpha - x$, cette formule recevra de même toutes les valeurs possibles. Mais, pour que cette directrice trouvée réponde à l'exposant 1, il faut que, mettant $t = 1$ et $x = 1$, il devienne aussi $X = 1$, ce qui nous donne $\alpha = 1$.

On obtiendra donc toujours une autre nouvelle directrice en prennant

$$T = t \quad \textit{et} \quad X = 1 + t - x,$$

et c'est en quoi consiste la seconde regle que je m'étois proposé de donner.

29. En combinant les deux regles que je viens d'expliquer, il sera facile de tirer d'une seule directrice donnée quantité de nouvelles formules qu'on pourra représenter de la manière suivante:

	I	II	III	IV	V	VI
$T = t$	t	x	$1+t-x$	x	$1+t-x$	$1+x-t$
$X = x$	$1+t-x$	t	t	$1+x-t$	$2-x$	x
	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	$2-x$	$1+x-t$	$2-x$	$2-t$	$2-t$	$2-t$
	$1+t-x$	$2-t$	$2-t$	$1+x-t$	$2-x$	$2-x$

Voila donc onze regles différentes moyennant lesquelles on peut déduire onze nouvelles directrices, toutes différentes entre elles, d'une seule formule proposée comme directrice.

30. Pour éclaircir les deux regles principales et celles du § précédent, qui en ont été déduites, par un exemple, prenons au hazard une des formules directrices rapportées ci-dessus (§ 24), par exemple celle-ci

$$1 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 3 \quad 5,$$

à laquelle nous pourrons appliquer alternativement la première et la seconde regle, ou bien la seconde et la première. Les deux suites de directrices qui en naissent sont les suivantes:

directrice donnée	1 4 2 7 6 3 5	directrice donnée	1 4 2 7 6 3 5
1re regle	1 3 6 2 7 5 4	2de regle	1 6 2 5 7 4 3
2de „	1 7 5 3 6 2 4	1re „	1 3 7 6 4 2 5
1re „	1 6 4 7 3 5 2	2de „	1 7 4 6 2 5 3
2de „	1 4 7 5 3 2 6	1re „	1 5 7 3 6 4 2
1re „	1 6 5 2 4 7 3	2de „	1 5 4 2 7 3 6
2de „	1 4 6 3 2 7 5	1re „	1 4 6 3 2 7 5
1re „	1 5 4 2 7 3 6	2de „	1 6 5 2 4 7 3
2de „	1 5 7 3 6 4 2	1re „	1 4 7 5 3 2 6
1re „	1 7 4 6 2 5 3	2de „	1 6 4 7 3 5 2
2de „	1 3 7 6 4 2 5	1re „	1 7 5 3 6 2 4
1re „	1 6 2 5 7 4 3	2de „	1 3 6 2 7 5 4
2de „	1 4 2 7 6 3 5	1re „	1 4 2 7 6 3 5

parfaitement égales, à la seule différence près qu'en faisant le commencement par la seconde regle, l'ordre des directrices est renversé.

31. Voila donc onze nouvelles directrices qui toutes tirent leur origine d'une seule, et même d'une seule quelconque d'entre elles. Aussi toutes ces nouvelles directrices se trouvent parmi les 14 rapportées ci-dessus (§ 24), et il n'y en a que deux qui sont échappées à cette opération, savoir

1 4 7 2 6 5 3 et 1 6 4 3 7 2 5,

toutes deux de nature tout à fait particulière, puisque l'une et l'autre se reproduit soi-même par la première regle, pendant que, par la seconde regle, l'une est reproduite par l'autre.

32. Après avoir trouvé pour le cas de $n = 7$ dix-neuf différentes formules directrices, nous pourrions déduire de chacune un quarré complet, et partant dix-neuf espèces différentes. Car en prennant une quelconque, qui soit 1, a, b, c, d, e, f, et continuant ces nombres suivant leur ordre naturel,

on aura les directrices pour les exposans suivans, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, et de cette manière, on obtiendra le quarré suivant de directrices

1	a	b	c	d	e	f
2	$a+1$	$b+1$	$c+1$	$d+1$	$e+1$	$f+1$
3	$a+2$	$b+2$	$c+2$	$d+2$	$e+2$	$f+2$
4	$a+3$	$b+3$	$c+3$	$d+3$	$e+3$	$f+3$
5	$a+4$	$b+4$	$c+4$	$d+4$	$e+4$	$f+4$
6	$a+5$	$b+5$	$c+5$	$d+5$	$e+5$	$f+5$
7	$a+6$	$b+6$	$c+6$	$d+6$	$e+6$	$f+6$

où il est clair que chaque bande verticale contient tous les nombres différens, depuis 1 jusqu'à 7, aussi bien que les bandes horizontales, quel que soit l'ordre des nombres a, b, c, d, e et f.

33. Pour faciliter la construction du quarré complet cherché, il sera bon d'assigner les exposans qui conviennent à la première ligne horizontale, qui est toujours la série naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pour cet effet, soit dans la formule directrice proposée

$$1 \; a \; b \; c \; d \; e \; f$$

le terme qui répond à l'indice $t = x$; et à ce terme x du quarré on devra joindre l'exposant 1. Puis donc que les exposans croissent, en descendant par chaque bande verticale, suivant leur ordre naturel, le terme suivant, $x+1$, aura l'exposant 2 et, en général, le terme $x+\lambda$ aura l'exposant $\lambda+1$. Prenons donc λ ensorte qu'il devienne $x+\lambda=t$, d'où l'on tire $\lambda=t-x$; et partant, le nombre t dans la première horizontale aura l'exposant

$$\lambda+1=t+1-x.$$

Donnons donc à t successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 etc.; et les exposans de la première bande horizontale seront les suivans:

$$1, \quad 3-a, \quad 4-b, \quad 5-c, \quad 6-d, \quad 7-e, \quad 8-f.$$

34. Nous avons vu ci-dessus que cette formule est aussi une directrice qui résulte de la première en vertu de la seconde regle. C'est pourquoi,

pour construire le quarré complet, on pourra d'abord prendre chaque formule directrice, pour représenter les exposans qu'il faut donner aux nombres de la première bande horizontale; ensuite, en descendant par les colonnes verticales, on n'a qu'à augmenter les exposans supérieurs suivant leur ordre naturel. De cette manière, si la formule directrice proposée 1, a, b, c, d, e, f est en même temps la suite des exposans de la première horizontale, le quarré complet qui en nait aura la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccc}
1^1 & 2^a & 3^b & 4^c & 5^d & 6^e & 7^f \\
2^2 & 3^{a+1} & 4^{b+1} & 5^{c+1} & 6^{d+1} & 7^{e+1} & 1^{f+1} \\
3^3 & 4^{a+2} & 5^{b+2} & 6^{c+2} & 7^{d+2} & 1^{e+2} & 2^{f+2} \\
4^4 & 5^{a+3} & 6^{b+3} & 7^{c+3} & 1^{d+3} & 2^{e+3} & 3^{f+3} \\
5^5 & 6^{a+4} & 7^{b+4} & 1^{c+4} & 2^{d+4} & 3^{e+4} & 4^{f+4} \\
6^6 & 7^{a+5} & 1^{b+5} & 2^{c+5} & 3^{d+5} & 4^{e+5} & 5^{f+5} \\
7^7 & 1^{a+6} & 2^{b+6} & 3^{c+6} & 4^{d+6} & 5^{e+6} & 6^{f+6}
\end{array}$$

35. Ayant donc trouvé en tout dix-neuf formules directrices pour le cas $n = 7$, nous en pourrions former autant de quarrés complets; de sorte que, si la question rouloit sur 49 officiers de sept différens grades et tirés de sept régimens différens, on en pourroit tirer un grand nombre de solutions différentes, toutes tirées d'un seul quarré latin à simple marche. On peut même puiser de la même source plusieures autres solutions; car, puisque le nombre des formules directrices est si considérable, en ayant pris une à volonté pour l'exposant 1, on pourra tirer les formules pour les exposans suivans des autres espèces, ensorte toutefois qu'en rangeant ces différentes formules dans un quarré, les nombres des colonnes verticales soyent tous différens entre eux. On voit bien que, de cette façon, on obtiendra un beaucoup plus grand nombre de nouvelles espèces de quarrés complets, mêlés de plusieures formules directrices jointes ensemble. Il suffira d'éclaircir ce mélange de directrices par un seul exemple.

Formules des exposans							Espèces des directrices						
1	4	7	2	6	5	3	1	4	7	2	6	5	3
2	7	5	4	1	3	6	1	6	4	3	7	2	5
3	6	1	5	4	2	7	1	4	6	3	2	7	5
4	1	3	6	2	7	5	1	5	7	3	6	4	2
5	2	6	3	7	4	1	1	5	2	6	3	7	4
6	3	2	7	5	1	4	1	5	4	2	7	3	6
7	5	4	1	3	6	2	1	6	5	2	4	7	3

On comprend aisément, de ce seul exemple, qu'on peut trouver plusieures autres combinaisons également convenables, dont il seroit même très difficile de déterminer le nombre.

36. En insérant les exposans conformément à ces directrices, le quarré complet qui en résulte aura cette forme:

$$\begin{array}{ccccccc}
1^1 & 2^5 & 3^4 & 4^2 & 5^6 & 6^7 & 7^3 \\
2^2 & 3^6 & 4^7 & 5^3 & 6^1 & 7^4 & 1^5 \\
3^3 & 4^1 & 5^2 & 6^4 & 7^5 & 1^6 & 2^7 \\
4^4 & 5^7 & 6^5 & 7^6 & 1^2 & 2^3 & 3^1 \\
5^5 & 6^3 & 7^1 & 1^7 & 2^4 & 3^2 & 4^6 \\
6^6 & 7^2 & 1^3 & 2^1 & 3^7 & 4^5 & 5^4 \\
7^7 & 1^4 & 2^6 & 3^5 & 4^3 & 5^1 & 6^2
\end{array}$$

Ici, on voit d'abord que les exposans des lignes horizontales ne sont plus des formules directrices, comme dans les dix-neuf espèces précédentes, et qu'on n'y sauroit découvrir aucun ordre, puisqu'on y rencontre un mélange de sept différentes espèces. Cette observation est de la dernière importance, par ce que la considération des quarrés réguliers nous pourroit séduire à croire que les exposans des premières bandes horizontales devroient avoir en général la propriété des directrices.

Au reste, il est sans doute fort surprenant que, pendant que le cas de $n = 7$ nous fournit un si prodigieux nombre de solutions, qui sera encore augmenté dans la suite, le cas de $n = 6$ n'en sauroit fournir aucune, quoique même le cas qui le précède, $n = 5$, nous a conduit à trois solutions différentes.

CAS DE $n = 9$

37. Soit maintenant $n = 9$; et le quarré latin à simple marche, auquel se rapporteront les recherches suivantes, aura cette forme:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

38. Puisqu'il seroit trop pénible de chercher toutes les formules directrices qui pourroient avoir lieu dans ce quarré latin et dont le nombre sera sans doute énorme, je me contenterai d'en considérer celles seulement qui vont en progression arithmétique, en excluant celles dont la différence seroit 3 ou 6, puisqu'elle ne seroit pas première au nombre $n = 9$. Car en général, il faut toujours que la différence de ces progressions, de même que la différence des nombres x et t ou bien $x - t$, n'ait aucun diviseur commun avec le nombre n, parcequ'une formule choisie sans avoir eu égard à cette regle ne renfermeroit plus toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n, ou ne pourroit être rangée dans la classe des directrices. En excluant donc ces deux cas, les formules qui vont en progression arithmétique seront celles-ci

1	3	5	7	9	2	4	6	8
1	6	2	7	3	8	4	9	5
1	9	8	7	6	5	4	3	2

desquelles on pourra former trois quarrés complets de 81 cases, en prennant les formules directrices pour les exposans suivans de la même espèce, attendu que nous nous sommes dispensés de faire le dénombrement des autres.

39. Or, en prenant quelqu'une de ces trois directrices, qui soit

$$1 \quad a \quad b \quad c \quad d \text{ etc.,}$$

pour l'exposant 1, on verra, par ce que nous avons dit ci-dessus (§ 23 et 33), que les exposans de la première ligne horizontale, qui sont 1, $3-a$, $4-b$, $5-c$, $6-d$ etc., constituent aussi une directrice et que, par conséquent, on pourra prendre d'abord chacune de ces trois directrices que nous avons trouvées pour les exposans de la première bande horizontale, ce qui nous fournit les trois quarrés complets que voici:

I.

1^1	2^3	3^5	4^7	5^9	6^2	7^4	8^6	9^8
2^2	3^4	4^6	5^8	6^1	7^3	8^5	9^7	1^9
3^3	4^5	5^7	6^9	7^2	8^4	9^6	1^8	2^1
4^4	5^6	6^8	7^1	8^3	9^5	1^7	2^9	3^2
5^5	6^7	7^9	8^2	9^4	1^6	2^8	3^1	4^3
6^6	7^8	8^1	9^3	1^5	2^7	3^9	4^2	5^4
7^7	8^9	9^2	1^4	2^6	3^8	4^1	5^3	6^5
8^8	9^1	1^3	2^5	3^7	4^9	5^2	6^4	7^6
9^9	1^2	2^4	3^6	4^8	5^1	6^3	7^5	8^7

II.

1^1	2^6	3^2	4^7	5^3	6^8	7^4	8^9	9^5
2^2	3^7	4^3	5^8	6^4	7^9	8^5	9^1	1^6
3^3	4^8	5^4	6^9	7^5	8^1	9^6	1^2	2^7
4^4	5^9	6^5	7^1	8^6	9^2	1^7	2^3	3^8
5^5	6^1	7^6	8^2	9^7	1^3	2^8	3^4	4^9
6^6	7^2	8^7	9^3	1^8	2^4	3^9	4^5	5^1
7^7	8^3	9^8	1^4	2^9	3^5	4^1	5^6	6^2
8^8	9^4	1^9	2^5	3^1	4^6	5^2	6^7	7^3
9^9	1^5	2^1	3^6	4^2	5^7	6^3	7^8	8^4

III.

1^1	2^9	3^8	4^7	5^6	6^5	7^4	8^3	9^2
2^2	3^1	4^9	5^8	6^7	7^6	8^5	9^4	1^3
3^3	4^2	5^1	6^9	7^8	8^7	9^6	1^5	2^4
4^4	5^3	6^2	7^1	8^9	9^8	1^7	2^6	3^5
5^5	6^4	7^3	8^2	9^1	1^9	2^8	3^7	4^6
6^6	7^5	8^4	9^3	1^2	2^1	3^9	4^8	5^7
7^7	8^6	9^5	1^4	2^3	3^2	4^1	5^9	6^8
8^8	9^7	1^6	2^5	3^4	4^3	5^2	6^1	7^9
9^9	1^8	2^7	3^6	4^5	5^4	6^3	7^2	8^1

40. Voila donc trois quarrés complets, déduits des trois directrices régulières que nous nous étions proposé d'examiner. Pour mieux éclaircir l'usage des regles rapportées ci-dessus (§ 26, 27 et 28) pour la formation des directrices et à fin de pouvoir juger plus aisément de leur nombre, nous allons choisir une des directrices au hazard; et en y appliquant successivement les deux regles, nous obtiendrons les douze directrices suivantes:

directrice adoptée		1	6	5	9	2	4	8	7	3
dont la renversée est		1	5	9	6	3	2	8	7	4
d'où l'on tire	par la 2de regle	1	6	8	5	4	3	9	2	7
		1	7	4	8	3	5	9	2	6
	par la 1re regle	1	8	6	5	4	2	9	3	7
		1	8	5	3	6	9	2	4	7
	par la 2de regle	1	4	7	9	2	5	8	6	3
		1	4	8	2	9	7	6	5	3
	par la 1re regle	1	5	9	2	6	8	3	7	4
		1	4	9	2	8	7	6	3	5
	par le 2de regle	1	7	4	3	9	8	5	2	6
		1	8	4	3	7	9	2	6	5

où il faut s'arrêter à la sixième paire, puisque, si l'on vouloit y appliquer de nouveau la première regle, on obtiendroit les mêmes formules, dont l'une reproduit l'autre par le renversement; ainsi, nos deux regles nous ont fourni en tout onze nouvelles directrices.

41. Une remarque très importante qu'il y a encore à faire, c'est qu'en faisant usage d'une troisième regle, dont nous avons pu nous passer dans l'article précédent de $n = 7$, puisqu'elle n'y auroit été d'aucun secours, on pourra trouver encore une autre douzaine de nouvelles directrices. Cette regle pourra être énoncée de la manière suivante:

Posant pour la directrice proposée l'indice $= t$ *et le terme qui lui répond* $= x$, *on pourra prendre pour la nouvelle formule l'indice* $T = 2t - 1$ *et le terme même* $X = 2x - 1$;

dont la raison est évidente, 1°) puisque, en prennant $t = 1$ et $x = 1$, il devient

$$T = 1 \quad \text{et} \quad X = 1;$$

2°) puisque, si les x varient par toutes les valeurs, aussi les $2x$ et partant les $2x - 1$ passeront de même par toutes les valeurs différentes; et 3°) puisque, si $x - t$ contient toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à 9, aussi

$$X - T = 2(x - t)$$

passera par toutes les variations convenables.

42. Il sera bon d'éclaircir par un exemple cette regle nouvelle, si fertile en directrices conjointement avec les deux précédentes; et pour cet effet, nous allons reprendre la directrice choisie ci-dessus, qui nous fournira la douzaine suivante.

La directrice adoptée		1	6	5	9	2	4	8	7	3
fournit par la 3^{me} regle		1	7	2	6	9	4	8	5	3
d'où l'on tire par la 1^{re} regle		1	3	9	6	8	4	2	7	5
et ensuite	par la 2^{de} regle	1	5	2	8	6	3	9	4	7
		1	9	4	8	7	3	6	2	5
	par la 1^{re} regle	1	3	6	8	2	5	9	4	7
		1	8	6	3	9	7	5	4	2
	par la 2^{de} regle	1	9	7	6	4	2	8	5	3
		1	4	7	2	6	9	3	5	8
	par la 1^{re} regle	1	6	9	5	8	4	3	7	2
		1	4	7	2	8	5	3	9	6
	par la 2^{de} regle	1	6	4	9	7	3	5	2	8
		1	8	6	3	7	2	5	9	4

43. Appliquons de nouveau cette troisième regle à la première de la nouvelle douzaine de directrices que nous venons de trouver et nous en obtiendrons, avec le secours des deux regles précédentes, la nouvelle douzaine suivante.

De la directrice adoptée		1	7	2	6	9	4	8	5	3
on obtient par la 3^{me} regle		1	7	4	6	3	9	2	5	8
et de là par la 1^{re} regle		1	7	5	3	8	4	2	9	6
ce qui fournit	par la 2^{de} regle	1	5	9	8	3	7	6	4	2
		1	5	8	2	7	3	6	9	4
	par la 1^{re} regle	1	9	5	8	2	7	6	4	3
		1	4	6	9	2	7	5	3	8
	par la 2^{de} regle	1	3	8	6	4	9	2	5	7
		1	8	7	5	4	9	3	6	2
	par la 1^{re} regle	1	7	2	5	8	4	9	3	6
		1	9	7	5	4	8	3	2	6
	par la 2^{de} regle	1	5	2	9	7	3	8	6	4
		1	3	6	9	2	8	5	7	4

Ici comme partout ailleurs, on a continué jusqu'à la reproduction des anciennes directrices, qui s'est faite jusqu'à présent à la sixième paire.

44. Si l'on vouloit appliquer la troisième regle à la première de ces directrices, savoir

1 7 4 6 3 9 2 5 8,

on en déduiroit celle-ci

1 8 4 3 7 9 2 6 5

qui se rencontre déjà dans la première douzaine; de sorte que nos trois regles ne nous ont fourni que trois douzaines de directrices, quoiqu'il y en a pour ce cas certainement un bien plus grand nombre: vu que, parmi toutes celles que nous venons de trouver, il n'y a aucune qui convienne avec sa renversée. Cependant, il en doit se trouver plusieures pour ce cas, puisque dans le cas précédent, où $n = 7$, il y en avoit deux au moins de semblables directrices.

45. Pour nous en convaincre pleinement, cherchons une directrice qui ait la propriété de se reproduire par le renversement.

Telle est celle-ci	1	8	5	9	3	7	6	2	4
qui se reproduit par la 1re regle	1	8	5	9	3	7	6	2	4
nous aurons donc par la 2de regle	1	4	8	5	3	9	2	7	6
par la 1re regle	1	7	5	2	4	9	8	3	6
par la 2de regle	1	5	8	3	2	7	9	6	4
par la 1re regle	1	5	4	9	2	8	6	3	7
par la 2de regle	1	7	9	5	4	8	2	6	3

La première directrice adoptée comme renversible nous a donc amené cinq autres directrices nouvelles; d'où l'on voit qu'il y a aussi des formules non renversibles qui se trouvent dans une étroite liaison avec les renversibles et qui ne se rencontrent point dans les douzaines précédentes.

46. En examinant la première des directrices rapportées, nous verrons qu'elle peut nous fournir une autre demie douzaine de formules tout à fait nouvelles. Car cette directrice de l'ordre précédent

1 8 5 9 3 7 6 2 4

nous donne par la 3^me^ regle celle-ci

1 4 6 2 9 3 8 7 5

qui, étant renversible, nous donnera les directrices suivantes.

La directrice renversible	1	4	6	2	9	3	8	7	5
fournit par la 2^de^ regle	1	8	7	3	6	4	9	2	5
par la 1^re^ regle	1	8	4	6	9	5	3	2	7
par la 2^de^ regle	1	4	9	8	6	2	5	7	3
par la 1^re^ regle	1	6	9	2	7	5	8	4	3
par la 2^de^ regle	1	6	4	3	8	2	9	5	7

où nous avons continué les opérations, comme auparavant, jusqu'à la reproduction d'une directrice renversible.

47. De la même manière, en appliquant la troisième regle à la première directrice de l'ordre précédent, on obtient la formule renversible suivante

1 5 7 6 2 4 3 9 8,

de laquelle se déduisent, par l'application alternative de la seconde et première regle, les directrices suivantes.

Directrice renversible	1	5	7	6	2	4	3	9	8
2^de^ regle	1	7	6	8	4	3	5	9	2
1^re^ regle	1	9	6	5	7	3	2	4	8
2^de^ regle	1	3	7	9	8	4	6	5	2
1^re^ regle	1	9	2	6	8	7	3	5	4
2^de^ regle	1	3	2	8	7	9	5	4	6

48. Si nous voulions réïterer ces opérations, en appliquant de nouveau la troisième regle à la première directrice de ce nouvel ordre, nous reviendrions à la première demie douzaine et ensuite aux autres, de sorte que cette source de directrices paroit avoir été épuisée par les trois regles em-

ployées. Ayant donc trouvé jusqu'ici trois classes de 12 et trois autres de 6 directrices, nous en avons en tout 54, et avec les trois premières procédantes en progressions arithmétiques, 57 différentes formules directrices dont chacune peut fournir un quarré complet; et en les mêlant ensemble, comme on peut faire de la manière enseignée ci-dessus (§ 35 et 36), on comprend aisément que le nombre de toutes les solutions possibles doit devenir incomparablement plus grand.

49. Il s'en faut même beaucoup que les 57 formules que nous venons de trouver renferment toutes les directrices possibles; attendu qu'en employant la première méthode directe, que j'ai exposée ci-dessus (§ 8, 9, 10), on peut trouver facilement les 8 suivantes qui ne sont comprises dans aucun des ordres rapportés:

1	3	5	8	2	9	6	4	7
1	3	5	9	8	4	2	7	6
1	3	6	8	2	4	9	7	5
1	3	6	8	4	2	9	5	7
1	3	6	9	4	8	2	5	7
1	3	6	2	9	8	4	7	5
1	3	6	9	7	4	2	5	8
1	3	7	6	2	9	5	4	8

d'où l'on peut conclure que le nombre de toutes les directrices sera au moins quatre fois plus grand.

DES QUARRES MAGIQUES IMPAIRS DONT LES DIAGONALES ET LEURS PARALLELES SONT AUSSI DOUEES DES CONDITIONS PRESCRITES

50. Soit n un nombre impair quelconque et d la différence des termes d'une formule directrice qui procède en progression arithmétique

$$1, \quad 1+d, \quad 1+2d, \quad 1+3d \quad \text{etc.}$$

et dont les termes, en retranchant le nombre n de tous ceux qui surpassent ce nombre, doivent produire toutes les différentes valeurs depuis 1 jusqu'à n, après l'avoir continuée jusqu'au terme $1+(n-1)d$.

Cela posé, il est clair que la différence d doit être un nombre premier à n et que par conséquent, lorsque n est un nombre premier, on pourra donner à d toutes les valeurs au dessous de n; au lieu que, si n a un facteur p, il faudra exclure toutes les progressions dont la différence d est p, $2p$, $3p$, $4p$ etc. Cette condition essentielle n'est pas même suffisante pour donner à cette progression la propriété des directrices; car puisque à l'indice $t = 1 + \lambda$ il répond le terme $x = 1 + \lambda d$, il faut, comme nous avons fait voir autre part (§ 26), que la formule $x - t = \lambda(d - 1)$ produise aussi tous les nombres différens. De là, il est évident que le nombre $d - 1$ doit être premier à n; que partant, il faut toujours exclure la valeur $d = 1$, et les valeurs $d = p + 1$, $d = 2p + 1$, $d = 3p + 1$ etc. toutes les fois que n renferme un facteur p.

51. Maintenant, il n'est pas difficile de déterminer en général, pour chaque nombre n, le nombre des valeurs que la différence d peut recevoir. Car, si n est un nombre premier, le nombre des valeurs de d, qu'on prend toujours plus petites que n, sera $n - 2$, et le nombre des formules en progression, qui auront lieu, sera aussi de $n - 2$. Si n est un produit de deux facteurs différens entre eux, comme $n = pq$, le nombre de toutes les valeurs de d sera

$$(p - 2)(q - 2).$$

Et en général, si n est un produit de plusieurs facteurs différens, $p\,q\,r\,s$ etc., les valeurs de d seront au nombre de

$$(p - 2)(q - 2)(r - 2)(s - 2) \text{ etc.}$$

Mais lorsque n a deux ou plusieurs facteurs égaux entre eux, la forme de l'expression pour le nombre des valeurs de d en sera un peu différente. Car si $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc., le nombre des valeurs qu'on peut donner à d sera

$$p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1} \text{ etc. } (p - 2)(q - 2)(r - 2)(s - 2) \text{ etc.}$$

52. Après ces réflexions, il sera aisé de construire en général un quarré magique tel que non seulement les bandes horizontales et verticales, mais même les deux diagonales et toutes leurs paralleles (chacune complettée par sa correspondante de l'autre côté [§ 23]) renferment des termes différens entre eux. Pour cet effet, je dois d'abord remarquer que, quelle que soit la forme

d'un tel quarré représenté par les lettres latines et grecques, comme nous faisions au commencement, on pourra toujours le réduire à des nombres, et ensorte que la première colonne verticale contienne tous les termes dans leur ordre naturel, comme nous avons supposé jusqu'ici; et tout reviendra à voir de quelle manière on doit transposer les autres bandes verticales des quarrés complets, pour que la propriété requise s'étende aux diagonales et à toutes leurs paralleles.

53. Puisque nous ne considérons ici que les formules directrices qui vont en progression arithmétique, on voit bien que, dans les bandes horizontales, tant les nombres latins que les grecs ou exposans marcheront aussi en progression arithmétique, et qu'en mettant d pour la différence de celle des nombres latins et δ pour celle de la progression des nombres grecs, la première bande horizontale sera

$$1^1 \quad (1+d)^{1+\delta} \quad (1+2d)^{1+2\delta} \quad \text{etc.}$$

Où donc, puisque pour les bandes suivantes on n'a qu'à ajouter l'unité aux nombres tant latins que grecs, le quarré complet aura la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccc}
1^1 & (1+d)^{1+\delta} & (1+2d)^{1+2\delta} & (1+3d)^{1+3\delta} & \text{etc.} \\
2^2 & (2+d)^{2+\delta} & (2+2d)^{2+2\delta} & (2+3d)^{2+3\delta} & \text{etc.} \\
3^3 & (3+d)^{3+\delta} & (3+2d)^{3+2\delta} & (3+3d)^{3+3\delta} & \text{etc.} \\
4^4 & (4+d)^{4+\delta} & (4+2d)^{4+2\delta} & (4+3d)^{4+3\delta} & \text{etc.} \\
 & & \text{etc.} & &
\end{array}$$

54. Maintenant, puisque les nombres latins de chaque bande horizontale doivent renfermer tous les nombres possibles, il s'en suit que la différence d doit être prise comme nous avons montré ci-dessus, c'est à dire en sorte que ni d ni $d-1$ n'ait aucun diviseur commun avec le nombre n; et cette même condition s'étend aussi à la différence de la progression des exposans δ et requiert que tant δ que $\delta - 1$ soit premier au nombre n. Ensuite, il est évident que les deux différences d et δ doivent être inégales entre elles, car si elles étoient égales, tous les termes se trouveroient déjà dans la première verticale; et cette seconde condition suffit quand le nombre n est premier; mais s'il n'est pas premier, il faut outre cela que le nombre $d - \delta$ soit premier à n.

55. Ces trois conditions remplies, on aura satisfait à la première des conditions principales préscrites pour la construction des quarrés à diagonales et paralleles différentes, c'est à dire qu'on obtiendra un quarré dont les bandes horizontales et verticales contiennent tous les nombres différens, tel que nous en avons construit dans la 1re partie de cette section. Il ne reste donc qu'à voir de quelle manière on pourra remplir l'autre condition, des diagonales et de leurs paralleles.

56. Considérons pour cet effet la première diagonale, qui descend de la gauche à la droite; et puisque les nombres latins qui la composent forment cette progression

$$1, \quad 2+d, \quad 3+2d, \quad 4+3d, \quad 5+4d, \quad 6+5d \quad \text{etc.}$$

dont la différence est $d+1$, on voit que cette diagonale renfermera tous les nombres différens toutes les fois que $d+1$ est un nombre premier à n; et puisque toutes les paralleles de cette diagonale croissent par la même différence $d+1$, la propriété requise s'étendra aussi aux paralleles. Il en est de même des nombres grecs ou exposans, qui recevront aussi toutes les valeurs possibles, pourvu que la différence de leurs progressions, $\delta+1$, soit première au nombre n.

57. Considérons aussi la seconde diagonale, qui monte de gauche à droite; et nous verrons d'abord que les nombres latins et les grecs tant de cette diagonale que de ses paralleles forment des progressions arithmétiques dont la différence des uns est $d-1$ et des autres $\delta-1$. Pourvu donc que tant $d-1$ que $\delta-1$ soyent des nombres premiers à n, tous les termes qui se trouveront dans cette diagonale et dans toutes ces paralleles seront aussi différens entre eux. D'ailleurs, cette dernière condition est déjà comprise dans la nature des directrices.

58. Voila donc toutes les conditions qu'exige la construction des quarrés qui sont l'objet de cette 2me partie. Elles se réduisent aux trois suivantes: 1°) que les nombres d, $d+1$ et $d-1$ soyent premiers au nombre n; 2°) que les nombres δ, $\delta+1$ et $\delta-1$ soyent aussi premiers au nombre n et 3°) que le nombre $d-\delta$ n'ait de même aucun diviseur commun avec n.

59. Supposons donc que p soit un diviseur ou facteur quelconque du nombre n; et il faudra exclure des valeurs de d celles-ci:

$$d = \lambda p, \quad d = \lambda p + 1, \quad d = \lambda p - 1,$$

et des valeurs de la lettre δ les suivantes:

$$\delta = \lambda p, \quad \delta = \lambda p - 1, \quad \delta = \lambda p + 1.$$

Soit $p = 3$; et il faudra exclure des valeurs de d et de δ tous les nombres possibles; d'où l'on voit que, dans tous les cas où le nombre n est divisible par 3, il sera impossible de construire un quarré dont les diagonales et les paralleles satisfassent aux conditions requises.

60. Or, quand le nombre n est premier, le nombre de toutes les valeurs différentes qu'on peut donner aux différences d et δ sera

$$= n - 3.$$

Ensuite, si n est un produit de deux nombres premiers inégaux entre eux, comme $n = pq$, le nombre des valeurs de d et δ sera

$$(p-3)(q-3).$$

Et en général, si $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ etc., le même nombre sera exprimé par cette formule

$$p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} \text{ etc. } (p-3)(q-3)(r-3) \text{ etc.}$$

61. Après ces remarques générales, développons quelques cas particuliers, et puisque nous venons d'exclure des valeurs de n les multiples de 3, prenons $n = 5$, d'où les valeurs convenables pour d et δ seront 2 et 3, dont l'une pourra être prise pour d et l'autre pour δ. Soit donc $d = 2$ et $\delta = 3$; et le quarré qui en résulte aura cette forme

$$\begin{array}{ccccc}
1^1 & 3^4 & 5^2 & 2^5 & 4^3 \\
2^2 & 4^5 & 1^3 & 3^1 & 5^4 \\
3^3 & 5^1 & 2^4 & 4^2 & 1^5 \\
4^4 & 1^2 & 3^5 & 5^3 & 2^1 \\
5^5 & 2^3 & 4^1 & 1^4 & 3^2
\end{array}$$

et il est évident qu'en changeant les valeurs de d et de δ, c'est à dire en mettant $d = 3$ et $\delta = 2$, on pourroit former un autre quarré; mais il ne vaut pas la peine de le distinguer de celui-ci.

62. Soit $n = 7$; et les valeurs convenables de d et δ seront 2, 3, 4, 5, qui, renfermant deux inégales entre elles, donnent six combinaisons différentes, savoir

$$d = 2 \text{ et } \delta = 3, \qquad d = 3 \text{ et } \delta = 4,$$

$$d = 2 \text{ et } \delta = 4, \qquad d = 3 \text{ et } \delta = 5,$$

$$d = 2 \text{ et } \delta = 5, \qquad d = 4 \text{ et } \delta = 5,$$

et les quarrés qui en résultent sont les suivans:

I. Si $d = 2$ et $\delta = 3$

1^1	3^4	5^7	7^3	2^6	4^2	6^5
2^2	4^5	6^1	1^4	3^7	5^3	7^6
3^3	5^6	7^2	2^5	4^1	6^4	1^7
4^4	6^7	1^3	3^6	5^2	7^5	2^1
5^5	7^1	2^4	4^7	6^3	1^6	3^2
6^6	1^2	3^5	5^1	7^4	2^7	4^3
7^7	2^3	4^6	6^2	1^5	3^1	5^4

II. Si $d = 2$ et $\delta = 4$

1^1	3^5	5^2	7^6	2^3	4^7	6^4
2^2	4^6	6^3	1^7	3^4	5^1	7^5
3^3	5^7	7^4	2^1	4^5	6^2	1^6
4^4	6^1	1^5	3^2	5^6	7^3	2^7
5^5	7^2	2^6	4^3	6^7	1^4	3^1
6^6	1^3	3^7	5^4	7^1	2^5	4^2
7^7	2^4	4^1	6^5	1^2	3^6	5^3

IV. Si $d = 3$ et $\delta = 4$

1^1	4^5	7^2	3^6	6^3	2^7	5^4
2^2	5^6	1^3	4^7	7^4	3^1	6^5
3^3	6^7	2^4	5^1	1^5	4^2	7^6
4^4	7^1	3^5	6^2	2^6	5^3	1^7
5^5	1^2	4^6	7^3	3^7	6^4	2^1
6^6	2^3	5^7	1^4	4^1	7^5	3^2
7^7	3^4	6^1	2^5	5^2	1^6	4^3

V. Si $d = 3$ et $\delta = 5$

1^1	4^6	7^4	3^2	6^7	2^5	5^3
2^2	5^7	1^5	4^3	7^1	3^6	6^4
3^3	6^1	2^6	5^4	1^2	4^7	7^5
4^4	7^2	3^7	6^5	2^3	5^1	1^6
5^5	1^3	4^1	7^6	3^4	6^2	2^7
6^6	2^4	5^2	1^7	4^5	7^3	3^1
7^7	3^5	6^3	2^1	5^6	1^4	4^2

III. Si $d = 2$ et $\delta = 5$

1^1	3^6	5^4	7^2	2^7	4^5	6^3
2^2	4^7	6^5	1^3	3^1	5^6	7^4
3^3	5^1	7^6	2^4	4^2	6^7	1^5
4^4	6^2	1^7	3^5	5^3	7^1	2^6
5^5	7^3	2^1	4^6	6^4	1^2	3^7
6^6	1^4	3^2	5^7	7^5	2^3	4^1
7^7	2^5	4^3	6^1	1^6	3^4	5^2

VI. Si $d = 4$ et $\delta = 5$

1^1	5^6	2^4	6^2	3^7	7^5	4^3
2^2	6^7	3^5	7^3	4^1	1^6	5^4
3^3	7^1	4^6	1^4	5^2	2^7	6^5
4^4	1^2	5^7	2^5	6^3	3^1	7^6
5^5	2^3	6^1	3^6	7^4	4^2	1^7
6^6	3^4	7^2	4^7	1^5	5^3	2^1
7^7	4^5	1^3	5^1	2^6	6^4	3^2

63. La nature de ces quarrés nous procure encore cet avantage, qu'on peut commencer l'inscription de ses termes par quelque case du quarré qu'on voudra. Pour montrer la multiplicité des formes qui en nait, prennons le premier des six quarrés que nous venons de construire et remplissons-en les cases de la manière suivante:

4^7	6^3	1^6	3^2	5^5	7^1	2^4
5^1	7^4	2^7	4^3	6^6	1^2	3^5
6^2	1^5	3^1	5^4	7^7	2^3	4^6
7^3	2^6	4^2	6^5	1^1	3^4	5^7
1^4	3^7	5^3	7^6	2^2	4^5	6^1
2^5	4^1	6^4	1^7	3^3	5^6	7^2
3^6	5^2	7^5	2^1	4^4	6^7	1^3

64. Si l'on veut appliquer tout cela aux quarrés magiques ordinaires, on n'a qu'à mettre au lieu des nombres latins ces valeurs

$$0,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42$$

et au lieu des nombres grecs les suivantes

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$$

dans un ordre quelconque, et à mettre ensuite à la place de chaque terme du quarré précédent la somme des deux nombres latins et grecs transformés de cette manière. Ainsi, dans le quarré complet que nous venons de trouver, mettons

au lieu des nombres latins	1	2	3	4	5	6	7
les valeurs suivantes	14	42	0	35	21	7	28
et au lieu des nombres grecs	1	2	3	4	5	6	7
substituons celles-ci	5	4	1	7	2	3	6

et nous obtiendrons le quarré magique ordinaire suivant:

41	8	17	4	23	33	49
26	35	48	36	10	18	2
11	16	5	28	34	43	38
29	45	39	9	19	7	27
21	6	22	31	46	37	12
44	40	14	20	1	24	32
3	25	30	47	42	13	15

Dans ce quarré, non seulement toutes les bandes horizontales et verticales, mais aussi toutes les diagonales et leurs paralleles correspondantes et complettées, comme par exemple

$$8 \quad 26 \quad 38 \quad 7 \quad 46 \quad 20 \quad 30,$$

produiront la même somme, savoir 175.

65. Pour donner encore une idée des cas où le nombre n n'est pas premier, mais indivisible par 3, considérons celui de

$$n = 35 = 5 \cdot 7,$$

dans lequel le nombre de toutes les valeurs qu'on peut donner aux lettres d et δ sera 8. Car puisque ici, en mettant $n = pq$, il y a $p = 5$ et $q = 7$, la formule qui exprime le nombre des valeurs est

$$(p-3)(q-3) = 2 \cdot 4 = 8,$$

c'est ce qui est très bien d'accord; car les valeurs que peuvent recevoir les lettres d et δ sont rééllement les 8 suivantes

$$2, \quad 3, \quad 12, \quad 17, \quad 18, \quad 23, \quad 32, \quad 33.$$

Ensuite, en excluant les nombres de d et δ dont la différence $d-\delta$ est divisible par 5 ou par 7, les combinaisons admissibles seront

$$\begin{array}{llll}
d = 2 \text{ et } \delta = 3, & & d = 12 \text{ et } \delta = 23, \\
d = 2 \text{ et } \delta = 18, & & d = 17 \text{ et } \delta = 18, \\
d = 2 \text{ et } \delta = 33, & & d = 17 \text{ et } \delta = 23, \\
d = 3 \text{ et } \delta = 12, & & d = 17 \text{ et } \delta = 33, \\
d = 3 \text{ et } \delta = 32, & & d = 23 \text{ et } \delta = 32, \\
d = 12 \text{ et } \delta = 18, & & d = 32 \text{ et } \delta = 33,
\end{array}$$

d'où l'on pourroit former douze quarrés différens de 1225 cases dans lesquels toutes les conditions préscrites seroient remplies; mais on nous dispensera volontiers de la construction actuelle même d'un seul d'entre eux.

Fin de la Section première.

SECTION SECONDE

DES QUARRES LATINS A DOUBLE MARCHE DE LA FORME GENERALE

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\ldots & n-1 & n \\
2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & \ldots\ldots & n & n-1 \\
3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n-1 & n & 1 & 2 \\
4 & 3 & 6 & 5 & \ldots & n & n-1 & 2 & 1 \\
5 & 6 & \ldots\ldots & & n & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}$$

etc.

66. Nous avons déjà remarqué ci-dessus, dans la section précédente, en établissant les classes des quarrés réguliers, que cette espèce exclud entièrement les nombres n impairs; et nous verrons dans la suite que les valeurs de n doivent non seulement être pairs, mais même pairement pairs, ou que le nombre des cases du quarré à double marche doit être divisible par le quarré de 4. Mais avant que de venir à la démonstration de cette vérité, il faudra déterminer en général la relation qui se trouve entre les différens nombres du quarré et leur position. Pour cet effet, j'observe d'abord que, parce que les termes de la première bande horizontale sont en même temps les indices des colonnes verticales qui leur répondent, aussi bien que ceux de la première bande verticale le sont des horizontales, chaque case du quarré sera déterminée par deux indices, l'un vertical et l'autre horizontal. Soit donc en général t l'indice vertical d'un terme quelconque x, et u son indice horizontal, et il s'agira de trouver la relation entre les trois lettres t, u et x. Pour cet effet, il faut distinguer soigneusement le cas où l'un ou l'autre des deux nombres t et u est [im]pair de celui où tous les deux sont pairs; et on verra d'abord que le premier cas fournit

$$x = t + u - 1,$$

et l'autre

$$x = t + u - 3,$$

ce qui fait voir en même temps que les deux indices t et u peuvent être échangés entre eux, sans que le terme x change de valeur, puisqu'il ne dépend que de la somme de ces deux lettres. Après cette observation, nous pourrons proposer nôtre théorème mentionné, énoncé de la manière suivante:

Tous les quarrés à double marche ne sauroient fournir aucune formule directrice, à moins que le nombre des termes horizontaux ou verticaux ne soit divisible par 4.

67. Pour démontrer ce théorème, soit la série

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad \text{etc.}$$

une formule directrice quelconque pour l'exposant indéterminé a; soit

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon \quad \text{etc.}$$

la série des indices horizontaux indiqués par la lettre u[1]), celle des indices verticaux marqués par t[1]), qui marchent toujours suivant la série des nombres naturels, étant

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \quad \text{etc.};$$

et il faudra, en vertu de la nature des directrices, exposée dans la section précédente, que l'une et l'autre de ces deux séries renferme tous les nombres différens depuis 1 jusqu'à n. Ayant donc les deux indices, l'un vertical t et l'autre horizontal u, nous pourrons en déduire facilement par les regles précédentes la valeur de chaque terme de nôtre directrice.

68. D'abord il est clair que pour le premier terme on aura toujours $a = \alpha$. Pour le second terme, b, il y a $t = 2$ et $u = \beta$; d'où, en distinguant les deux cas de la valeur de β, qui peut être paire ou impaire, on aura pour le dernier $b = \beta + 1$, pour l'autre $b = \beta - 1$. Pour le troisième terme, c, à cause de $t = 3$ impair et $u = \gamma$, il y aura toujours $c = \gamma + 2$. Pour le quatrième terme, d, où $t = 4$ est pair et $u = \delta$, il faut distinguer encore les deux cas de la valeur de δ; si elle est impaire, il y aura $d = \delta + 3$, et si

1) Dans l'édition originale, par suite d'une erreur, les lettres t et u sont permutées ici. Nous avons rétabli la correspondance avec les notations subséquentes. L. G. D.

elle est paire, $d=\delta+1$; et ainsi des autres. On aura donc pour la formule directrice

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g \text{ etc.}$$

d'un quarré dont les indices horizontaux sont

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta \text{ etc.}$$

et les verticaux

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ etc.}$$

les termes suivans:

$$a=\alpha$$

$$b=\begin{cases}\beta+1 & (\beta \text{ impair})\\ \beta-1 & (\beta \text{ pair})\end{cases}$$

$$c=\gamma+2$$

$$d=\begin{cases}\delta+3 & (\delta \text{ impair})\\ \delta+1 & (\delta \text{ pair})\end{cases}$$

$$e=\varepsilon+4$$

$$f=\begin{cases}\zeta+5 & (\zeta \text{ impair})\\ \zeta+3 & (\zeta \text{ pair})\end{cases}$$

$$g=\eta+6$$

$$h=\begin{cases}\theta+7 & (\theta \text{ impair})\\ \theta+5 & (\theta \text{ pair})\end{cases}$$

$$i=\iota+8$$

etc.

69. Nous voyons donc que la détermination des lettres a, b, c, d etc. par les indices α, β, γ, δ etc. seroit tout à fait régulière, si des lettres alternes, β, δ, ζ etc., aucune n'étoit paire, et que nous aurions alors

$$a=\alpha,\quad b=\beta+1,\quad c=\gamma+2,\quad d=\delta+3,\quad e=\varepsilon+4,\quad f=\zeta+5 \quad \text{etc.},$$

le nombre de ces termes étant toujours $=n$. Supposons, pour un instant que toutes ces lettres alternantes soyent impaires. Soit la somme de la série des indices horizontaux

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc.}=\Sigma$$

et celle des termes de la directrice

$$a+b+c+d+e+\text{etc.}=S;$$

et en ajoutant tous ces termes, nous aurons cette équation

$$S=\Sigma+1+2+3+4+5+\cdots+(n-1)=\Sigma+\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Or, puisque l'une et l'autre de nos deux séries doit comprendre tous les nombres différens depuis 1 jusqu'à n, il s'en suit que les deux sommes S et Σ doivent être égales entre elles, ou bien leur différence doit être un multiple du nombre n, qui soit λn, d'où l'on tire

$$S=\Sigma+\lambda n$$

et partant, il faudra être dans ce cas-ci

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)=\lambda n.$$

Mais nous avons déjà dit plus haut que les quarrés à double marche excluent entièrement les valeurs impaires de n; d'où, en supposant n pair $=2k$, k étant un nombre entier quelconque, nous aurons

$$k(2k-1)=2\lambda k$$

ou bien $\lambda=k-\frac{1}{2}$ ou $k=\lambda+\frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

70. Mais cette conclusion tire son origine de la supposition que toutes les lettres alternantes β, δ, ζ, θ etc. sont impaires, et ce n'est que pour ce cas-ci que les directrices deviennent entièrement impossibles, quelque valeur qu'on donne à n. Pour que le quarré à double marche ait des directrices, il est donc absolument nécessaire que parmi les lettres β, δ, ζ, θ etc. il se trouve des paires; et pour voir ce qui en résultera, nous supposerons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule, ce qui diminuera la somme de la série des indices horizontaux de 2, et nous aurons[1])

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)-2=\lambda n;$$

1) L'édition originale porte ici, par erreur, $n(2n-1)-2=\lambda n$, et quatre lignes plus bas n au lieu de k. L. G. D.

ou bien, en mettant $n = 2k$, il faudra être

$$k(2k-1)-2 = 2\lambda k,$$

d'où il est évident que k doit être un nombre pair. Soit donc $k = 2m$ et partant $n = 4m$; et nôtre équation deviendra

$$m(4m-1)-1 = 2\lambda m$$

ou bien

$$1 = m(4m-1) - 2\lambda m = m(4m-2\lambda-1).$$

Or, puisque cette équation ne sauroit avoir lieu à moins que $m = 1$ et $\lambda = 1$, il est clair que ce cas ne peut subsister que lorsque $n = 4$.

71. Supposons en général que parmi les nombres alternes β, δ, ζ, θ etc. il se trouve π pairs; et puisque le nombre de toutes ces lettres est $\frac{1}{2}n$, il est clair que π ne sauroit surpasser $\frac{1}{2}n$. Ensuite, puisque chaque valeur paire de ces lettres produit dans la somme $\frac{1}{2}n(n-1)$ une diminution de deux unités, nôtre équation sera

$$\frac{1}{2}n(n-1)-2\pi = \lambda n$$

ou bien, en prennant $n = 2k$, nous aurons celle-ci

$$k(2k-1)-2\pi = 2\lambda k,$$

qui ne sauroit avoir lieu que lorsque k est un nombre pair, $= 2m$, et partant $n = 4m$. Alors, nôtre équation sera

$$m(4m-1)-\pi = 2\lambda m,$$

de laquelle on tire les nombres des lettres alternantes qui sont paires, savoir

$$\pi = m(4m-2\lambda-1),$$

c'est à dire égal à un produit de deux facteurs, l'un m et l'autre $4m-2\lambda-1$. Or, puisque π ne sauroit surpasser $\frac{1}{2}n = 2m$ et que le coefficient de m, $4m-2\lambda-1$, est un nombre impair, il faut absolument qu'il soit

$$4m-2\lambda-1 = 1,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = 2m-1 \quad \text{et} \quad \pi = m.$$

Il faut donc que la moitié des lettres β, δ, ζ, θ etc. soit paire et que le nombre n soit divisible par 4; par conséquent, les nombres impairement pairs, 2, 6, 10, 14 etc., seront entièrement exclus de cette section, attendu qu'ils ne sauroient jamais fournir des directrices, ce qui est ce qu'il faloit démontrer.

72. Par cette raison, nous établirons par toute cette section que le nombre n soit divisible par 4, en mettant $n = 4m$, et dans tous ces cas, la démonstration précédente nous fait voir la possibilité des directrices. Considérons donc principalement les directrices qui répondent au premier exposant, 1, et qui, à cause de $a = 1$, auront en général cette forme

$$1 \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad \text{etc.},$$

à laquelle répond cette série des indices horizontaux

$$1, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \zeta \quad \text{etc.},$$

la série des indices verticaux étant celle des nombres naturels

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6 \quad \text{etc.}$$

Cela posé, nous avons vu que, si t marque l'indice vertical et u le horizontal, on aura le terme de la directrice

$$x = t + u - 1,$$

excepté le seul cas où les nombres t et u sont pairs, pour lequel on aura

$$x = t + u - 3;$$

de sorte que, dans l'un et l'autre cas, x est un nombre impair.

73. Nous avons démontré que, pour le nombre $n = 4m$, le cas où t et u sont pairs doit toujours se rencontrer m fois; d'où il s'en suit qu'il y a aussi m cas où aux nombres pairs de t répondent des valeurs impaires pour u; et par la même raison, pour le cas de t impair on aura pour u m nombres pairs et autant d'impairs. Eclaircissons cela par l'exemple suivant où $m = 2$ et $n = 8$:

Indices verticaux $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$

Indices horizontaux $u = 1, 6, 2, 5, 7, 4, 8, 3.$

Ici, aux indices pairs $t = 2$ et 6 répondent les indices pairs $u = 6$ et 4. Aux indices pairs $u = 2$ et 8 répondent les indices impairs $t = 3$ et 7. Ensuite, les indices impairs $u = 1$ et 7 répondent aux indices impairs $t = 1$ et 5, et les indices impairs $u = 3$ et 5 aux pairs $t = 8$ et 4. Or, de ces deux séries on pourra former, par les formules $x = t + u - 1$ et $x = t + u - 3$, la directrice suivante

$$1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 7\ 6\ 2,$$

où tous les termes sont différens.

74. Il est aussi facile d'examiner chaque formule proposée, si elle est directrice ou non. Car, ayant les nombres x et les indices horizontaux t, on n'a qu'à chercher les indices u, moyennant l'une ou l'autre des formules données pour x, dont la dernière, $x = t + u - 3$ ou $u = x - t + 3$, n'a lieu que lorsque t est pair et x impair; et quand tous les nombres trouvés de cette façon pour u sont inégaux entre eux, la formule proposée sera toujours une vraye directrice. Voici quelques exemples:

I.	Indices	$t =$ 1	2	3	4
	Formule	$x =$ 1	3	4	2
	Indices	$u =$ 1	4	2	3

II.	Indices	$t =$ 1	2	3	4	5	6	7	8
	Formule	$x =$ 1	3	5	7	4	2	8	6
	Indices	$u =$ 1	4	3	6	8	5	2	7

III.	Indices	$t =$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Formule	$x =$ 1	4	6	8	10	12	2	3	5	7	9	11
	Indices	$u =$ 1	3	4	5	6	7	8	10	9	12	11	2

où l'on voit que les séries u comprennent toutes les valeurs différentes, de sorte que les formules proposées pour x sont véritablement directrices.

75. En considérant avec attention les deux derniers exemples, on verra qu'il est facile d'examiner en général les directrices pour tous les nombres divisibles par 4. On n'a qu'à les partager pour cet effet en deux parties égales, dont chacune contienne $2m$ termes, et on verra, par les regles préscrites, si les séries qu'on trouve pour u renferment toutes les valeurs différentes. Voici l'exemple de deux directrices générales pour tous les nombres $n = 4m$:

Première directrice.

$$\text{Première moitié}\;\begin{cases} t = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2m \\ x = 1 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots & 4m \end{cases}$$
$$u = 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \ldots \quad 2m+1$$

$$\text{Seconde moitié}\;\begin{cases} t = 2m+1 & 2m+2 & 2m+3 & 2m+4 & \ldots & 4m \\ x = \quad 2 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 4m-1 \end{cases}$$
$$u = 2m+2 \quad 2m+4 \quad 2m+3 \quad 2m+6 \quad \ldots \quad 2$$

où l'on s'assurera aisément que, dans les deux moitiés trouvées pour u, tous les nombres différens paroissent réellement.

Seconde directrice.

$$\text{Première moitié}\;\begin{cases} t = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2m \\ x = 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots & 4m-1 \end{cases}$$
$$u = 1 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad \ldots \quad 2m+2$$

$$\text{Seconde moitié}\;\begin{cases} t = 2m+1 & 2m+2 & 2m+3 & 2m+4 & \ldots & 4m \\ x = \quad 4 & 2 & 8 & 6 & \ldots & 4m-2 \end{cases}$$
$$u = 2m+4 \quad 2m+1 \quad 2m+6 \quad 2m+3 \quad \ldots \quad 4m-1$$

Dans la dernière moitié, le terme pénultième de u est $4m+2$ ou bien 2, d'où l'on voit que dans les valeurs de u il se trouve tous les différens nombres depuis 1 jusqu'à $4m$.

76. Or, ayant trouvé une seule formule directrice, on en pourra tirer plusieures autres, par des regles semblables à celles dont nous nous sommes servi dans la section précédente. Pour mettre cela dans tout son jour, nous

allons considérer une directrice quelconque

$$1\ a\ b\ c\ d\ e\ f \text{ etc.},$$

dont le terme qui répond à l'indice t soit $=x$, et nous avons vu que, prenant u pour l'indice horizontal, il faut distinguer deux cas; l'un où t est pair et x impair, qui donne $u=3+x-t$; et l'autre $u=1+x-t$, qui comprend toutes les autres valeurs. Pour plus de commodité, on peut représenter l'un et l'autre de ces deux cas par cette formule ambigue

$$u=x-t+2\pm 1,$$

où le signe supérieur a lieu quand x est impair et t pair; dans tous les autres cas il faudra se servir du signe inférieur.

77. Maintenant, comme la nature de toutes les formules directrices renferme les deux propriétés suivantes:

1°) que, pendant que la lettre t varie par toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $n=4m$, la lettre x doit aussi recevoir toutes ces valeurs différentes;

2°) que, pendant que l'on fait varier les deux lettres t et x par toutes les valeurs, aussi la formule $u=x-t+2\pm 1$ recevra toutes les valeurs possibles. Il en découle naturellement cette troisième propriété, que, pendant que les lettres x et t varient depuis 1 jusqu'à n, la formule $t-x+2\pm 1$ fournira de même toutes les différentes valeurs, pourvu qu'on prenne bien garde à l'ambiguité des signes, dont le supérieur n'a lieu que lorsque le nombre t est impair et x pair; surtout puisque ces deux lettres sont si étroitement liées entre elles que, pendant que l'une varie par toutes les valeurs, aussi l'autre prend les mêmes variations et qu'on peut les changer entre elles, au moins à cet égard.

78. Voyons à présent de quelle manière on peut déduire la nouvelle directrice de celle que nous avons supposée connüe. Soit pour cet effet

$$1\ A\ B\ C\ D \text{ etc.}$$

une telle directrice, dont le terme qui répond à l'indice T soit X; et il faudra que, pendant que T varie par toutes les valeurs, aussi X subisse les

mêmes variations, de même que $X-T+2\pm1$ et $T-X+2\pm1$, pourvu qu'on observe les regles préscrites à l'égard de l'ambiguité des signes. Or, ayant remarqué d'autre part que les deux lettres t et u peuvent être échangées entre elles, il s'en suit qu'on trouvera une nouvelle directrice en rapportant le même terme x à l'indice $u=x-t+2\pm1$, c'est à dire en prennant

$$T=x-t+2\pm1 \quad \text{et} \quad X=x.$$

Ainsi, ayant pour le cas $n=8$ cette formule directrice

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 7,$$

à laquelle répondent pour u

$$1 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 2,$$

on en déduira une nouvelle directrice en mettant le second terme, 3, à la quatrième place, assignée par le nombre u souscrit; le troisième terme, 5, à la place troisième, et ainsi des autres, ce qui fournit la nouvelle directrice

$$1 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 8 \quad 2 \quad 4 \quad 6.$$

79. Ensuite, on trouvera aussi toujours une nouvelle directrice en changeant entre elles les lettres t et x et prennant

$$T=x \quad \text{et} \quad X=t;$$

de cette façon, la première propriété est déjà remplie par elle-même; et l'autre, qui regarde la formule $X-T+2\pm1$, sera aussi parfaitement remplie; car cette formule, étant à présent $t-x+2\pm1$, passera par toutes les valeurs, pourvu qu'on observe que le signe supérieur n'a lieu que lorsque t est pair et x impair. On voit bien que cette regle convient avec la première de celles que nous avons données dans le § 27 de la section précédente et que nous avions caracterisée par le terme de *renversement*; de manière qu'on peut toujours employer la même regle sans aucune altération dans cette section. La formule directrice de l'exemple précédent, savoir

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 7,$$

fournira donc par le renversement celle-ci

$$1 \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 4.$$

80. Une autre regle se déduit du premier cas en prennant

$$T = t \quad \text{et} \quad X = t - x + 2 \pm 1,$$

puisqu'il en résulte $U = X - T + 2 \pm 1$, où l'ambiguité des signes est l
contraire de la précédente, de sorte qu'en substituant au lieu de T et X
leurs valeurs, on obtient

$$U = -x + 4,$$

formule qui, sans ambiguité, recevra toutes les variations possibles, pendan
que t et partant aussi x passent par toutes les valeurs. Cette regle est ana
logue à la seconde de la section précédente, où nous avions aussi

$$T = t \quad \text{et} \quad X = t - x + 1,$$

qui a lieu ici dans tous les cas, exceptés ceux où t est impair et x pai
qui nous obligent à nous servir de la valeur

$$X = t - x + 3.$$

Soyent par exemple

	les	$t = 1$	2	3	4	5	6	7	8
	les	$x = 1$	3	5	8	2	4	6	7
nous aurons pour		$X = 1$	8	7	5	6	3	4	2 [1]

81. Par le moyen de ces deux regles, on peut déduire de chaque d
rectrice connüe plusieures autres et presque toujours douze nouvelles, comm
il est arrivé dans la section précédente (confer l'exemple du § 42 et suivans
pourvu toutefois qu'on employe la seconde regle avec la rectification in
diquée.

Pour éclaircir tout cela par un exemple, reprennons la directrice don
nous avons fait usage jusqu'ici, et en lui souscrivant sa renversée et appl
quant ensuite alternativement la seconde et la première regle, on obtiendr
en tout les douze nouvelles directrices suivantes, y compris la proposée.

1) L'édition originale porte, par erreur, 1 8 7 5 6 3 2 4. L. G. D.

	La directrice proposée	1	3	5	8	2	4	6	7	I
	fournit par renversement	1	5	2	6	3	7	8	4	
et ensuite[1]	par la 2^{de} regle	1	8	7	5	6	3	4	2	II
	[appliquée à I]	1	6	4	7	3	8	2	5	
	par la 1^{re} regle	1	7	5	3	8	2	4	6	III
	[appliquée à I]	1	8	6	7	4	5	3	2	
	par la 2^{de} regle	1	4	7	2	8	5	6	3	IV
	[appliquée à III]	1	3	8	6	4	2	5	7	
	par la 1^{re} regle	1	6	2	5	7	4	8	3	V
	[appliquée à II]	1	4	8	2	6	7	3	5	
	par la 2^{de} regle	1	5	4	8	7	3	2	6	VI
	[appliquée à V]	1	7	6	3	2	8	5	4	

où nous avons continué ces opérations jusqu'à la reproduction des dernières directrices, qui s'est faite à la sixième paire.

82. Appliquons les mêmes opérations à une directrice de 12 termes, en adoptant une formée de celles qui vont en progression arithmétique, et la douzaine complette qu'on obtient par les deux regles sera:

Proposée[1]	1	3	5	7	9	11	4	2	8	6	12	10	I
renversée	1	8	2	7	3	10	4	9	5	12	6	11	
par la 2^{de} regle	1	12	11	10	9	8	6	7	4	5	2	3	II
[appliquée à I]	1	7	4	10	3	9	6	12	5	11	8	2	
par la 1^{re} regle	1	12	5	3	9	7	2	11	6	4	10	8	III
[appliquée à I]	1	11	12	9	10	7	8	6	5	4	3	2	

1) Dans l'édition originale, l'ordre de succession des formules directrices est interverti pour les groupes III et IV. La numérotation des couples de formules (chiffres romains) ne se trouve pas dans l'édition originale.

La même remarque concernant l'ordre de succession s'applique aux formules directrices du § 82 ainsi qu'à chacune des quatre douzaines du § 94. L. G. D.

par la 2de regle	1	3	11	2	9	12	8	10	6	7	4	5	IV
[appliquée à III]	1	4	6	8	10	12	2	3	5	7	9	11	
par la 1re regle	1	7	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	V
[appliquée à II]	1	4	2	11	12	9	10	7	5	8	3	6	
par la 2de regle	1	8	10	3	9	4	12	5	11	6	2	7	VI
[appliquée à V]	1	11	4	6	8	10	12	2	5	3	9	7	

dont la dernière paire se reproduit par la première regle.

83. Or, chacune des directrices trouvées pour l'exposant 1 fournit, comme nous avons fait voir ci-dessus, des directrices convenables pour tous les autres exposans, et même telles que pour toutes les colonnes verticales elles présentent des termes différens. Car il est clair, par la construction du quarré latin, qu'en augmentant de 2 les termes de la directrice pour l'exposant 1, on obtiendra une autre directrice pour l'exposant 3, et une autre pour l'exposant 5 en augmentant les termes de celle-ci de 2. Et en général, d'une directrice pour l'exposant a, qui soit

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \text{ etc.},$$

on déduira une directrice pour l'exposant $a+2$ en ajoutant 2 à chaque terme de la précédente. Ainsi pour le cas de $n=8$, chaque directrice pour l'exposant 1, dont nous avons assigné une douzaine, fournira pour les exposans impairs des directrices convenables; par exemple

pour l'exposant	1	1	3	5	7	4	2	8	6
„ „	3	3	5	7	1	6	4	2	8
„ „	5	5	7	1	3	8	6	4	2
„ „	7	7	1	3	5	2	8	6	4

où chaque colonne verticale contient des nombres différens, pairs ou impairs séparément.

84. La formation des directrices pour l'exposant 2 et les autres pairs n'est pas si évidente; cependant, comme dans le quarré latin la seconde bande horizontale se déduit de la première en augmentant tous les termes

impairs et en diminuant les pairs de l'unité, on en peut conjecturer que, faisant la même chose à l'égard de la directrice proposée, on en tirera la directrice pour l'exposant 2, parcequ'en effet tous les termes impairs produisent de cette manière tous les pairs, et réciproquement tous les termes pairs, étant diminüés de l'unité, produisent les impairs. Mais il faut démontrer encore que la formule qui en résulte est effectivement directrice.

85. Soit pour cet effet, dans la directrice pour l'exposant 1, le terme qui répond à l'indice $t = x$, et x' celui qui répond au même indice dans la directrice de l'exposant 2. De la même manière soit u l'indice horizontal du même terme x de la première directrice, et u' celui du terme x' dans l'autre; et on aura, en observant les regles préscrites par rapport à l'ambiguité des signes,

$$u = x - t + 2 \pm 1 \quad \text{et} \quad u' = x' - t + 2 \pm 1.$$

Il y aura donc quatre cas à considérer, selon que les deux nombres t et x sont pairs ou impairs; et les valeurs de u et de u' seront pour chaque cas exprimées de la manière suivante:

I.	II.	III.	IV.
$t = 2i$	$t = 2i$	$t = 2i + 1$	$t = 2i + 1$
$x = 2k$ $u = 2k - 2i + 1$	$x = 2k + 1$ $u = 2k - 2i + 4$	$x = 2k$ $u = 2k - 2i$	$x = 2k + 1$ $u = 2k - 2i + 1$
$x' = 2k - 1$ $u' = 2k - 2i + 2$	$x' = 2k + 2$ $u' = 2k - 2i + 3$	$x' = 2k - 1$ $u' = 2k - 2i + 1$	$x' = 2k + 2$ $u' = 2k - 2i + 2$

86. De là, on voit que le second et le troisième cas donnent pour u des valeurs paires et que les valeurs de u' sont plus petites de l'unité; d'où il est évident que toutes les valeurs paires de u produisent pour u' toutes les valeurs impaires.

Ensuite le premier et le quatrième cas, où les valeurs de u sont impaires, fournissent pour u' des valeurs plus grandes de l'unité, et partant, toutes les valeurs impaires de u produisent pour u' toutes les valeurs paires;

de manière que toutes les valeurs de u, différentes entre elles, produisent aussi pour u' toutes les valeurs possibles, et la formule qui en résulte est indubitablement directrice, puisqu'elle en porte le véritable caractère.

87. Ayant donc trouvé la directrice pour l'exposant 2 de la manière que nous venons d'enseigner, on en formera par la première regle les directrices pour tous les autres exposans pairs, et par ce moyen on construira facilement, de chaque directrice proposée pour l'exposant 1, un système complet de directrices semblable à celui que nous apposerons ici pour la directrice

1 3 5 7 4 2 8 6.

Pour l'exposant 1	1	3	5	7	4	2	8	6
„ „ 2	2	4	6	8	3	1	7	5
„ „ 3	3	5	7	1	6	4	2	8
„ „ 4	4	6	8	2	5	3	1	7
„ „ 5	5	7	1	3	8	6	4	2
„ „ 6	6	8	2	4	7	5	3	1
„ „ 7	7	1	3	5	2	8	6	4
„ „ 8	8	2	4	6	1	7	5	3

où l'on voit que, dans chaque bande verticale, les termes sont tous différens entre eux et que par conséquent, en joignant dans le quarré latin proposé les exposans de la manière expliquée à tous les nombres, aucun terme ne saura se rencontrer deux fois, et le quarré sera complet.

88. En considérant plus attentivement le système complet de directrices que nous avons formé, on verra d'abord que toutes les bandes verticales conviennent parfaitement avec celles du quarré latin à double marche et qu'il n'y a d'autre différence que dans leur ordre, qui y est changé, c'est à dire que les indices horizontaux, qui dans le quarré se suivoient dans l'ordre naturel 1 2 3 4 5 6 7 8, sont ici 1 3 5 7 4 2 8 6. En considérant donc en général une bande verticale quelconque, dont l'indice soit t et le terme suprême x marqué de l'exposant 1, si nous marquons les termes qui suivent l' x, en descendant, par

$$x', \quad x'', \quad x''' \quad \text{etc.}$$

et leur donnons les exposans

$$2, \quad 3, \quad 4 \quad \text{etc.},$$

le terme $x^{(\varphi)}$ aura l'exposant $\varphi+1$; et en prennant φ ensorte qu'il devienne

$$x^{(\varphi)}=t,$$

qui est le terme correspondant du même indice dans la première bande horizontale du quarré latin, il faudra donner à ce terme l'exposant $\varphi+1$. Or, puisque les valeurs $x, x', x'', x''', \ldots x^{(\varphi)}$ tiennent le même ordre que dans le quarré latin, on aura toujours $t=x+\varphi-\left\{\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right.$ ou bien $\varphi=t-x+\left\{\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right.$ et partant

$$\varphi+1=t-x+\left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.=t-x+2\pm1,$$

où l'ambiguité des signes suit la même loix que nous avons assignée ci-dessus.

89. De là, il est clair que les exposans de la première horizontale de nôtre quarré latin constituent aussi une formule directrice, tirée de la proposée par la seconde regle, et que pour construire un quarré complet on peut d'abord commencer par la première horizontale, en y mettant les exposans selon une directrice quelconque, et en continuant l'inscription des autres en descendant selon la bande verticale du quarré même, qui commence par le même nombre. Ainsi, puisqu'on tire de la directrice proposée

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \quad 8 \quad 6$$

par la seconde regle

$$1 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 3,$$

on peut d'abord commencer par cette directrice, en la combinant avec la première bande horizontale du quarré simple, aux termes de laquelle elle servira d'exposans; et les autres seront insérés de la manière que nous venons d'expliquer et que nous rendrons plus claire par l'exemple du quarré suivant:

1^1	2^8	3^7	4^6	5^4	6^5	7^2	8^3
2^2	1^7	4^8	3^5	6^3	5^6	8^1	7^4
3^3	4^2	5^1	6^8	7^6	8^7	1^4	2^5
4^4	3^1	6^2	5^7	8^5	7^8	2^3	1^6
5^5	6^4	7^3	8^2	1^8	2^1	3^6	4^7
6^6	5^3	8^4	7^1	2^7	1^2	4^5	3^8
7^7	8^6	1^5	2^4	3^2	4^3	5^8	6^1
8^8	7^5	2^6	1^3	4^1	3^4	6^7	5^2

Mais il faut bien remarquer que cette belle propriété des exposans de la première bande horizontale ne peut avoir lieu que lorsque le système des directrices est formé d'une seule directrice proposée.

90. Cependant, il est facile de combiner plusieures directrices ensemble pour en former un tel système complet, comme nous avons montré dans le § 35 de la section précédente. J'ajoute encore, par rapport à cette section, qu'après avoir tiré les directrices pour les exposans impairs d'une formule directrice quelconque de l'exposant 1, on pourra déduire celles pour les exposans pairs d'une autre formule, pourvu que ses termes suivent le même ordre par rapport au pair et impair. Ainsi pour l'exemple précédent, ayant déduit les directrices impaires de la formule 1 3 5 7 4 2 8 6, on pourra tirer celles qui dirigent l'inscription des exposans pairs de celle-ci: 1 5 7 3 8 4 6 2, qui est aussi directrice et dont les termes, par rapport au pair et impair, suivent le même ordre. Voici le système complet.

Pour l'exposant	1	1	3	5	7	4	2	8	6
„ „	2	2	6	8	4	7	3	5	1
„ „	3	3	5	7	1	6	4	2	8
„ „	4	4	8	2	6	1	5	7	3
„ „	5	5	7	1	3	8	6	4	2
„ „	6	6	2	4	8	3	7	1	5
„ „	7	7	1	3	5	2	8	6	4
„ „	8	8	4	6	2	5	1	3	7

qui, mis en usage de la manière enseignée, fournira le quarré complet suivant [1])

$$
\begin{array}{cccccccc}
1^1 & 2^6 & 3^7 & 4^2 & 5^8 & 6^5 & 7^4 & 8^3 \\
2^2 & 1^7 & 4^6 & 3^5 & 6^3 & 5^4 & 8^1 & 7^8 \\
3^3 & 4^8 & 5^1 & 6^4 & 7^2 & 8^7 & 1^6 & 2^5 \\
4^4 & 3^1 & 6^8 & 5^7 & 8^5 & 7^6 & 2^3 & 1^2 \\
5^5 & 6^2 & 7^3 & 8^6 & 1^4 & 2^1 & 3^8 & 4^7 \\
6^6 & 5^3 & 8^2 & 7^1 & 2^7 & 1^8 & 4^5 & 3^4 \\
7^7 & 8^4 & 1^5 & 2^8 & 3^6 & 4^3 & 5^2 & 6^1 \\
8^8 & 7^5 & 2^4 & 1^3 & 4^1 & 3^2 & 6^7 & 5^6
\end{array}
$$

où les exposans de la première bande horizontale tiennent cet ordre

$$1 \quad 6 \quad 7 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 4 \quad 3,$$

qui ouvertement n'est pas [une] directrice, puisque les valeurs de u seroient

$$1 \quad 5 \quad 5 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 6,$$

et partant rien moins qu'inégales entre elles.

91. Après ces réflexions générales, qui peuvent être appliquées à tous les quarrés latins à double marche, quelque grand que soit le nombre n, pourvu qu'il soit divisible par 4, nous allons développer quelques cas particuliers où $n = 4$ et $n = 8$, en omettant les suivans, qui nous meneroient trop loin; et puisque, pour le cas de $n = 8$, nous avons déjà rapporté quelques exemples, nous nous bornerons à en chercher toutes les directrices; ayant fait voir que chacune d'elles peut fournir un système complet et que deux directrices différentes peuvent aussi conduire à un système complet, pourvu que les termes tiennent le même ordre par rapport au pair et à l'impair. Ces systèmes formés, dont le nombre surpasse évidemment de beaucoup celui des premières directrices, la construction des quarrés n'a plus la moindre difficulté.

1) L'édition originale porte, par erreur, dans la quatrième colonne 8^2 au lieu de 8^6 et 7^6 au lieu de 7^1. L. G. D.

CAS DE $n = 4$

92. Le quarré latin à double marche est dans ce cas

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

qui ne fournit pour l'exposant 1 que les deux directrices suivantes

1 4 2 3 et 1 3 4 2

dont l'une, en y appliquant les deux regles préscrites, produit l'autre. De ces deux directrices, on peut former les deux systèmes complets suivans.

	I				II			
Pour l'exposant 1	1	4	2	3	1	3	4	2
„ „ 2	2	3	1	4	2	4	3	1
„ „ 3	3	2	4	1	3	1	2	4
„ „ 4	4	1	3	2	4	2	1	3

et en inscrivant selon ces directrices les exposans, on obtient les deux quarrés complets que voici:

I				II			
1^1	2^3	3^4	4^2	1^1	2^4	3^2	4^3
2^2	1^4	4^3	3^1	2^2	1^3	4^1	3^4
3^3	4^1	1^2	2^4	3^3	4^2	1^4	2^1
4^4	3^2	2^1	1^3	4^4	3^1	2^3	1^2

On se convaincra facilement que, quelque autre quarré latin qu'on voudroit établir, on n'en sauroit jamais tirer d'autres quarrés complets qui satisfassent aux conditions préscrites. Cependant, l'un et l'autre des deux quarrés que nous venons de former admet aussi des transpositions des bandes verticales telles que les propriétés préscrites sont remplies même dans les diagonales. En voici deux exemples:

I				II			
1^1	3^4	4^2	2^3	1^1	4^3	2^4	3^2
2^2	4^3	3^1	1^4	2^2	3^4	1^3	4^1
3^3	1^2	2^4	4^1	3^3	2^1	4^2	1^4
4^4	2^1	1^3	3^2	4^4	1^2	3^1	2^3

CAS DE $n = 8$

93. Le quarré latin fondamental est

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	5	6	7	8	1	2
4	3	6	5	8	7	2	1
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	1	2	3	4	5	6
8	7	2	1	4	3	6	5

pour lequel les deux formules générales fournissent d'abord les deux directrices suivantes

1	3	5	7	4	2	8	6
1	4	8	6	2	3	5	7

dont la première commence par les quatre nombres impairs; et il n'est pas difficile de trouver toutes les directrices dont les termes pairs et impairs tiennent le même ordre, qui sont les quatre suivantes:

1	3	5	7	4	2	8	6
1	5	7	3	4	8	2	6
1	5	7	3	8	4	6	2
1	7	5	3	8	2	4	6

94. Appliquons donc successivement à ces quatre directrices les deux regles enseignées et démontrées ci-dessus (§ 78 et suiv.), qui nous fourniront les quatre douzaines suivantes:

Première douzaine.[1]

Fondamentale	1	3	5	7	4	2	8	6	I
renversée	1	6	2	5	3	8	4	7	
2^de^ regle	1	8	7	6	4	5	2	3	II
[appliquée à I]	1	5	4	8	3	7	6	2	
1^re^ regle	1	8	5	3	2	7	6	4	III
[appliquée à I]	1	7	8	5	6	4	3	2	
2^de^ regle	1	3	7	2	6	8	4	5	IV
[appliquée à III]	1	4	6	8	2	3	5	7	
1^re^ regle	1	5	6	2	7	3	8	4	V
[appliquée à II]	1	4	2	7	8	5	3	6	
2^de^ regle	1	6	8	3	7	4	2	5	VI
[appliquée á V]	1	7	4	6	8	2	5	3	

Seconde douzaine.

Fondamentale	1	5	7	3	4	8	2	6	I
renversée	1	7	4	5	2	8	3	6	
2^de^ regle	1	6	5	2	4	7	8	3	II
[appliquée à I]	1	4	2	8	6	7	5	3	
1^re^ regle	1	3	8	2	7	5	6	4	III
[appliquée à I]	1	4	8	5	3	2	6	7	
2^de^ regle	1	8	6	3	7	2	4	5	IV
[appliquée à III]	1	7	6	8	3	5	4	2	
1^re^ regle	1	8	5	7	6	3	2	4	V
[appliquée à II]	1	6	4	7	8	3	5	2	
2^de^ regle	1	3	7	6	2	4	8	5	VI
[appliquée à V]	1	5	2	6	8	4	3	7	

1) Dans l'édition originale, l'ordre de succession des formules directrices est interverti dans les groupes III et IV de chacune des quatre douzaines. Voir la note 1 p. 340. L. G. D.

Troisième douzaine.

Fondamentale	1	5	7	3	8	4	6	2	I
renversée	1	8	4	6	2	7	3	5	
[$2^{\rm de}$ regle	1	6	5	2	8	3	4	7	II
appliquée à I	1	3	2	7	6	8	5	4	
$1^{\rm re}$ regle	1	3	2	8	7	5	4	6	III
appliquée à I	1	4	6	7	3	2	8	5	
$2^{\rm de}$ regle	1	8	4	5	7	2	6	3	IV
appliquée à III	1	7	8	6	3	5	2	4	
$1^{\rm re}$ regle	1	7	5	8	6	4	2	3	V
appliquée à II	1	6	8	3	4	7	5	2	
$2^{\rm de}$ regle	1	4	7	5	2	3	8	6	VI
appliquée à V]	1	5	6	2	4	8	3	7	

Quatrième douzaine.

Fondamentale	1	7	5	3	8	2	4	6	I
renversée	1	6	4	7	3	8	2	5	
[$2^{\rm de}$ regle	1	4	7	2	8	5	6	3	II
appliquée à I	1	5	2	6	3	7	8	4	
$1^{\rm re}$ regle	1	3	5	8	2	4	6	7	III
appliquée à I	1	4	8	2	6	7	3	5	
$2^{\rm de}$ regle	1	8	7	5	6	3	4	2	IV
appliquée à III	1	7	6	3	2	8	5	4	
$1^{\rm re}$ regle	1	5	4	8	7	3	2	6	V
appliquée à II	1	8	6	7	4	5	3	2	
$2^{\rm de}$ regle	1	6	2	5	7	4	8	3	VI
appliquée à V]	1	3	8	6	4	2	5	7	

95. Voila donc 48 formules directrices, qui épuisent aussi tout nôtre quarré latin; car toutes les formules qu'on en peut tirer par la méthode ordinaire se trouvent dans les quatre douzaines précédentes. En n'employant

donc qu'une seule de ces formules, on en pourra construire un quarré complet et partant 48 solutions différentes, sans compter celles qui naitroient de la combinaison de plusieures de ces directrices dont les termes pairs et impairs tiennent le même ordre et dont le nombre est sans doute très considérable. Pour faciliter les pareilles combinaisons et pour juger en même temps du nombre de toutes les solutions différentes, nous allons distribuer ces 48 directrices en différentes classes, selon l'ordre qui s'y observe par rapport aux termes pairs et impairs, dont nous désignerons les premiers par la lettre *p* et les autres par la lettre *i*; nous en obtiendrons les espèces suivantes:

I. *i*	*i*	*i*	*i*	*p*	*p*	*p*	*p*
1	3	5	7	4	2	8	6
1	5	7	3	4	8	2	6
1	5	7	3	8	4	6	2
1	7	5	3	8	2	4	6

II. *i*	*i*	*i*	*p*	*p*	*p*	*p*	*i*
1	3	5	8	2	4	6	7
1	3	7	2	6	8	4	5
1	3	7	6	2	4	8	5
1	7	5	8	6	4	2	3

III. *i*	*i*	*p*	*p*	*p*	*p*	*i*	*i*
1	3	8	6	4	2	5	7
1	5	2	6	8	4	3	7
1	5	6	2	4	8	3	7
1	7	4	6	8	2	5	3

IV. *i*	*p*	*p*	*p*	*p*	*i*	*i*	*i*
1	4	2	8	6	7	5	3
1	4	6	8	2	3	5	7
1	4	8	2	6	7	3	5
1	8	4	6	2	7	3	5

V. *i*	*i*	*p*	*i*	*p*	*p*	*i*	*p*
1	3	2	7	6	8	5	4
1	7	4	5	2	8	3	6
1	7	6	3	2	8	5	4
1	7	8	5	6	4	3	2

VI. *i*	*p*	*p*	*i*	*p*	*i*	*i*	*p*
1	4	2	7	8	5	3	6
1	6	4	7	8	3	5	2
1	6	8	3	4	7	5	2
1	8	6	7	4	5	3	2

VII. *i*	*p*	*i*	*i*	*p*	*i*	*p*	*p*
1	4	7	5	2	3	8	6
1	8	5	3	2	7	6	4
1	8	5	7	6	3	2	4
1	8	7	5	6	3	4	2[1]

VIII. *i*	*p*	*i*	*p*	*p*	*i*	*p*	*i*
1	4	7	2	8	5	6	3
1	6	5	2	4	7	8	3
1	6	5	2	8	3	4	7
1	8	7	6	4	5	2	3

1) L'édition originale porte, par erreur, 1 8 7 5 6 3 2 4. L. G. D.

IX.	i	i	p	p	i	i	p	p
	1	3	2	8	7	5	4	6
	1	3	8	2	7	5	6	4
	1	5	2	6	3	7	8	4
	1	5	4	8	3	7	6	2
	1	5	4	8	7	3	2	6
	1	5	6	2	7	3	8	4
	1	7	6	8	3	5	4	2
	1	7	8	6	3	5	2	4

X.	i	p	p	i	i	p	p	i
	1	4	6	7	3	2	8	5
	1	4	8	5	3	2	6	7
	1	6	2	5	3	8	4	7
	1	6	2	5	7	4	8	3
	1	6	4	7	3	8	2	5
	1	6	8	3	7	4	2	5
	1	8	4	5	7	2	6	3
	1	8	6	3	7	2	4	5

96. En considérant une classe de directrices quelconque de λ formules, il est clair que, puisqu'on peut combiner chacune d'entre elles avec chacune des directrices d'un autre ordre de λ directrices, on en tirera $\lambda\lambda$ solutions différentes. Or donc, puisque nous avons en tout huit classes chacune de quatre directrices, dont chacune peut être combinée avec l'une ou l'autre de la même classe[1]), on pourra déduire seize solutions de chaque classe et partant 128 solutions des huit classes; et en y ajoutant les deux classes de huit, qui en fournissent 64 chacune, le nombre de toutes les solutions possibles sera 256, qui satisferont toutes également au problème. Mais il faut bien remarquer que les quarrés latins à quadruple marche en donneront encore un bien plus grand nombre, sans compter celles qu'on peut tirer de plusieures transformations expliquées ci-dessus et à expliquer encore plus clairement dans la suite. Ce qui, joint aux différentes solutions pour les cas de $n=3$, de $n=4$, de $n=5$ et de $n=7$, doit augmenter nôtre surprise à l'égard du cas de $n=6$, dont l'impossibilité se paroît confirmer de plus en plus.

1) L'édition originale porte: . . . *combinée avec l'une ou l'autre des autres classes, on pourra* . . .
L. G. D.

Fin de la Section seconde.

SECTION TROISIEME

DES QUARRES LATINS A TRIPLE MARCHE DE LA FORME GENERALE

1	2	3	4	5	6	7	8	9	etc.
2	3	1	5	6	4	8	9	7	etc.
3	1	2	6	4	5	9	7	8	etc.
4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.

etc.

96[a].[1]) Ici, il est évident que le nombre n doit être nécessairement divisible par 3; nous mettrons donc partout $n = 3m$, où m marquera le nombre des *membres* dont chaque colonne, tant horizontale que verticale, est composée. Ainsi, le cas le plus simple sera celui où $m = 1$ ou bien $n = 3$, et le quarré latin contenant un seul membre du quarré général à triple marche

1	2	3
2	3	1
3	1	2

dont la construction a été suffisamment expliquée au § 18 de la section première.

97. La première question qui se présente ici, c'est de savoir si tous les cas de ce quarré à triple marche admettent toujours des formules directrices ou non. Or, je dois d'abord remarquer que, lorsque le quarré est composé de deux membres, il ne sauroit jamais admettre de directrices, de sorte que le cas de $n = 6$ doit encore être exclu dans cette espèce de quarrés simples. Vérité de laquelle on se pourroit convaincre par la méthode ordinaire de chercher les directrices, mais qui acquerra un degré d'autant plus haut de certitude qu'on en peut donner une démonstration très rigoureuse, tirée de

1) L'édition originale porte, par erreur, le numéro 96 deux fois. L. G. D.

principes tout à fait différens de ceux par lesquels nous avons prouvé l'impossibilité des cas précédens, où le nombre n étoit impairement pair, et qui ne sauroient être appliqués dans cette section, à cause de la multiplicité des cas différens qu'on y seroit obligé de considérer.

98. Pour rendre cette démonstration plus claire et plus facile, je marquerai le premier membre du quarré proposé à triple marche, savoir

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

par la lettre A, qui comprendra donc trois bandes horizontales et autant de verticales; et la lettre a me marquera chaque nombre contenu dans ce petit quarré, c'est à dire ou 1 ou 2 ou 3. De la même manière, j'exprimerai le second membre du quarré, savoir

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{matrix}$$

par la lettre B et chacun des nombres qu'il contient par b. Cela posé, le quarré latin de deux membres, c'est à dire pour le cas de $n = 6$, pourra être représenté de cette façon

$$\begin{matrix} A & B \\ B & A \end{matrix}$$

où chacune des bandes tant horizontales que verticales renferme six[1]) termes.

99. Maintenant j'observe que, si ce quarré admettoit une directrice, elle devroit contenir trois a et trois b, dont les uns seroient tirés de la première verticale, AB, et les autres de la seconde verticale, BA. Or, puisque tous les termes d'une directrice doivent être tirés de différentes bandes horizontales et de différentes verticales, chaque terme qu'on met dans la directrice exclud une bande horizontale et une autre verticale. Ainsi, quand on veut prendre

1) Edition originale: . . . *renferme trois termes.* L. G. D.

tous les trois a de la première verticale, puisqu'ils seroient pris de la lettre A, la première horizontale seroit d'abord exclüe, de même que la première verticale, et partant, les trois b devroient être tirés de la seconde partie de la seconde verticale, c'est à dire du membre A, le seul restant et qui ne contient du tout de b.

Supposons donc qu'on tire de la première bande verticale deux a et un b, c'est à dire trois termes; et il faudra que l'autre en donne autant, savoir un a et deux b. Or, les deux a étant pris du membre A de la première horizontale et le b du membre B de la seconde horizontale, il est clair que le terme restant de la première horizontale ne peut être que b et ceux de la seconde aa, la première verticale étant exclüe. Au lieu des termes manquans abb, nous obtiendrions aab. D'où l'on voit déjà assés clairement qu'en tirant de la première verticale un a et deux b, il seroit pareillement impossible de déduire de la seconde les termes restans aab. Par conséquent, il est démontré que le cas $n=6$ n'admet point de directrices.

100. Mais si pour le cas de $n=9$ ou $m=3$, nous marquons le troisième membre du quarré général, savoir

$$\begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{array}$$

par la lettre C et les trois nombres 7, 8, 9 qu'il contient par la lettre c, nous aurons à examiner le quarré

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array}$$

et la formule directrice, s'il y en a une, comprendra trois a, trois b et trois c. En prennant donc les trois a de la première verticale, la première horizontale en sera exclüe et par conséquent, on ne pourra prendre de la seconde verticale que les trois c, ce qui exclura la seconde horizontale; et parce qu'il reste encore dans la troisième verticale les trois b, on voit aisément que ce cas fournit des directrices; on en pourra même déduire par d'autres routes.

101. En examinant de la même manière le cas de $n = 12$ ou $m = 4$ et désignant le quatrième membre du quarré général

$$\begin{matrix} 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{matrix}$$

par la lettre D et les termes qu'il contient, 10, 11, 12, par d, de sorte que le quarré à examiner soit

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{matrix}$$

on verra que, de quelque manière qu'on tire les lettres minuscules des bandes de ce quarré, il ne fournira jamais de directrices; et il semble qu'on puisse hardiment tirer la même conclusion pour tous les cas où n est un nombre pair, de sorte que cette section ne s'étend qu'aux multiples impairs de 3, comme 3, 9, 15, 21 etc.

102. La belle démonstration pour le cas de $n = 6$, rapportée aux § 98 et 99, m'engage à faire une digression aux quarrés latins à quintuple marche, ou à septuple ou à une autre marche quelconque en nombre impair, par rapport auxquels on pourra démontrer, avec la même facilité, qu'aucun d'entre eux qui ne renferme que deux membres ne sauroit jamais admettre de directrices. Car marquant, pour le cas de $n = 10 = 2 \cdot 5$, les deux membres dont il est composé par A et B, et les cinq termes qu'ils contiennent par a et b, il s'agira de déduire du quarré

$$\begin{matrix} A & B \\ B & A \end{matrix}$$

ou

$$\begin{matrix} a & a & a & a & a & b & b & b & b & b \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a & a & a & a & a & b & b & b & b & b \\ b & b & b & b & b & a & a & a & a & a \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ b & b & b & b & b & a & a & a & a & a \end{matrix}$$

une formule directrice qui contienne, dans un ordre quelconque, cinq a et cinq b.

103. Donc, si nous voulions prendre tous les cinq a de la première verticale, la première horizontale en seroit exclüe et il ne resteroit dans la seconde verticale que le terme A, qui ne renferme pas de b. En prennant de la première verticale quatre a et un b, la seconde verticale ne sauroit fournir qu'un b et quatre a, pendant qu'il nous faudroit un a et quatre b pour completter la directrice. Le même inconvénient se rencontre en tirant trois a et deux b de la première verticale, car, au lieu des deux a et trois b qu'il nous faudroit encore, la seconde verticale ne fourniroit que deux b et trois a. D'où l'on voit qu'il n'y a pas de directrices à en attendre; et la raison consiste ouvertement en ce que le nombre des petites lettres est impair, et il semble qu'on peut soutenir que la même impossibilité subsiste dans tous les cas où le nombre des membres A, B etc. est pair.

104. Mais dans tous les cas où le nombre des petites lettres est pair, cette impossibilité cesse entièrement. Car supposons qu'il s'agisse d'un quarré à quadruple marche qui renferme deux membres, A et B, dont chacun contienne sa petite lettre, a et b, quatre fois, ce qui seroit le cas de $n=8$; il faudra tirer du quarré $\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}$ une directrice qui renferme, dans un ordre quelconque, quatre a et quatre b, ce qui n'a pas la moindre difficulté. On n'a qu'à tirer de la première verticale deux a et deux b; et puisque dans la seconde verticale le premier membre, B, fournit encore deux b et l'autre, A, deux a, la directrice sera complette. Où l'on voit en même temps que dans tous ces cas il faut toujours tirer de chaque colonne deux a et deux b; et ce raisonnement a lieu pour tous les nombres pairs.

105. Revenons à nôtre quarré à triple marche; et pour en chercher les directrices, considérons un terme quelconque, x, qui réponde à l'indice vertical t et à l'horizontal u; et en comparant ce terme à la somme de ses indices, $t+u$, on observera bientôt qu'il y a un double rapport entre eux; l'un

$$x=t+u-1$$

et l'autre

$$x=t+u-4,$$

dont la différence dépend de la divisibilité des nombres t et u par 3. Or, ces nombres se réduisent à trois espèces, que nous pourrons représenter par $3\lambda+1$, $3\lambda+2$, $3\lambda+3$ ou bien simplement par 1, 2, 3, qui pourront également

ment marquer les trois espèces. Ensuite, à cause de l'ambiguité des nombres 1 et 4 dans les deux expressions de x, nous mettrons

$$x = t + u - w.$$

Cela posé, la table suivante servira à déterminer le rapport entre x et ses indices et les valeurs de w, pour toutes les espèces de la valeur de t et u.

Si	$t =$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
	$u =$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
on aura	$w =$	1	1	1	1	1	4	1	4	4
	$x =$	1	2	3	2	3	1	3	1	2

d'où l'on voit qu'il y a $w = 4$ quand l'un ou l'autre des indices t et u est $= 3$ et ni l'un ni l'autre $= 1$.

106. Ayant donc trouvé $x = t + u - w$, on en tire réciproquement

$$u = x - t + w,$$

d'où l'on pourra trouver l'indice horizontal u de chaque terme x et de l'indice vertical qui lui répond; et de là, on pourra assigner la vraye valeur de w pour toutes les valeurs de t et x, comme on peut voir par cette table:

Si	$x =$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
	$t =$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
on aura	$w =$	1	4	4	1	1	4	1	1	1

Il y a conséquemment trois cas où $w = 4$, que nous représenterons séparément en sorte:

$w = 4$, si	$x =$	1	1	2
	$t =$	2	3	3

107. Cette dernière tablette sera d'un grand secours, en examinant si une formule proposée est directrice ou non. Car on n'a qu'à écrire cette formule ou bien la série de x et celle de t, l'une sous l'autre, et à en déduire selon cette petite table les valeurs de u, et quand on les trouve toutes différentes

entre elles, c'est une marque sure que la formule proposée est effectivement directrice. Pour éclaircir cela par un exemple, prennons pour le cas de $n=9$

cette progression pour x	1	3	5	7	9	2	4	6	8
et en lui souscrivant la série de t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
moyennant la regle rapportée, on aura $u=$	1	2	6	4	5	9	7	8	3

qui, renfermant toutes les valeurs différentes, fait voir que la progression arithmétique

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$$

est en effet directrice.

108. Or, ayant trouvé une seule directrice, on pourra, par des méthodes semblables à celles dont nous avons fait usage dans les sections précédentes, en déduire un grand nombre d'autres formules également directrices. Car, posant que pour une nouvelle directrice le terme X réponde à l'indice vertical T et à l'indice horizontal U, puisque nous avions tantôt $x=t+u-w$, on voit que les deux indices t et u sont permutables, de sorte que, prennant

$$T=u \quad \text{et} \quad U=t,$$

on aura

$$X=x.$$

Ainsi dans l'exemple précédent, ayant devant les yeux les valeurs de u, on n'a qu'à les ranger dans leur ordre naturel et de souscrire à chacun son nombre x, de cette manière

$$\begin{array}{l}T=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9\\ X=1 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 9 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 2\end{array}$$

et cette formule sera surement une nouvelle directrice, puisque tous les U, étant les mêmes que les t, ont des valeurs différentes.

109. On pourra aussi, comme dans les sections précédentes, échanger entre elles les deux lettres t et x, en prennant

$$T=x \quad \text{et} \quad X=t,$$

d'où l'on tirera comme ci-dessus une nouvelle directrice, *la renversée.* Ainsi, la formule proposée ci-dessus

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$$

fournira par le renversement cette nouvelle directrice

$$1 \quad 6 \quad 2 \quad 7 \quad 3 \quad 8 \quad 4 \quad 9 \quad 5,$$

et celle que nous avions tirée de la proposée par l'autre regle,

$$1 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 9 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 2,$$

amène la suivante renversée

$$1 \quad 9 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 5.$$

110. Ayant en vertu de cette regle où $T = x$ et $X = t$ pour U la formule

$$U = X - T + w = t - x + w,$$

puisque ces expressions varient par toutes les valeurs pendant que t et x subissent les variations nécessaires, il s'en suit que, prennant

$$T = t,$$

on pourra mettre

$$X = t - x + w,$$

et c'est en quoi consiste la seconde regle, qui ne differe de celles des sections précédentes que par rapport à la signification de w qui sera ici toujours $= 1$, excepté les trois cas rapportés au § 106, savoir[1])

$$\begin{array}{r|c|c|c} t = & 1 & 1 & 2 \\ x = & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

pour lesquels il faut prendre $w = 4$. Moyennant ces deux regles, dès qu'on aura trouvé quelques directrices par les méthodes ordinaires, on en pourra déduire plusieures autres.

1) La permutation de x et t par rapport à la fin du § 106 provient de ce que l'on a posé, au commencement du § 110, $T = x$ et $X = t$. L. G. D.

111. Mais ici, on découvrira bientôt une grande variété dans les formules qu'on veut transformer par ces regles. Il y en a qui demeurent inaltérables par l'une et l'autre. Telle est

$$1\quad 3\quad 2\quad 7\quad 9\quad 8\quad 4\quad 6\quad 5,$$

qui est la diagonale du quarré proposé; elle se reproduit tant par la première que par la seconde de nos regles. Ensuite, il y a aussi des formules qui, par l'une ou l'autre de ces regles, ne produisent qu'une seule nouvelle directrice. Telle est par exemple la progression arithmétique décroissante de l'unité

$$1\quad 9\quad 8\quad 7\quad 6\quad 5\quad 4\quad 3\quad 2,$$

qui par la première regle se reproduit elle-même, pendant que la seconde fournit celle-ci

$$1\quad 6\quad 5\quad 7\quad 3\quad 2\quad 4\quad 9\quad 8,$$

qui se reproduit par le renversement.

112. Développons la progression arithmétique proposée

$$1\quad 3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 2\quad 4\quad 6\quad 8,$$

qui à l'aide de nos deux regles [§ 109 et 110] fournit, comme on va voir, quatre nouvelles directrices.

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{Proposée} & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 6 & 8 \\
\text{renversée} & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 & 5 \\
\hline
\multirow{2}{*}{2^{de} regle} \left\{ \right. & 1 & 3 & 8 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 & 2 \\
 & 1 & 9 & 2 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 & 5
\end{array}$$

Voila donc, avec les précédentes, sept directrices pour le cas de $n = 9$, qui ont toutes cette belle propriété que leurs termes suivent le même ordre par rapport à leur divisibilité par 3. Or, il est facile d'en trouver encore d'autres qui à cet égard suivent la même loix, que nous allons mettre conjointement

devant les yeux.

1	3	2	7	9	8	4	6	5
1	3	5	7	9	2	4	6	8
1	3	8	7	9	5	4	6	2
1	6	2	7	3	8	4	9	5
1	6	5	7	3	2	4	9	8
1	6	8	7	3	5	4	9	2
1	9	2	7	6	8	4	3	5
1	9	5	7	6	2	4	3	8[1])
1	9	8	7	6	5	4	3	2

dont nous avions trouvé toutes, excepté les deux suivantes

1	6	8	7	3	5	4	9	2
1	9	5	7	6	2	4	3	8[1])

qui se reproduisent l'une l'autre tant par la première que par la seconde regle.

Il est important d'avoir rapporté ces 9 formules qui tiennent le même ordre par rapport aux termes divisibles par 3. Car nous verrons dans la [section] suivante que, pour former un quarré magique complet, on peut employer 2 et même 3 de semblables directrices pour les différens exposans à l'égard de nos trois espèces de nombres; d'où l'on voit que ces neuf formules sont capables de produire un nombre prodigieux de quarrés différens.

113. Mais il y a aussi quantité de directrices qui de cette manière fournissent jusqu'à une douzaine de nouvelles, comme on peut voir par la suivante choisie au hazard.

1) L'édition originale porte, par erreur, 1 9 5 7 6 2 4 9 8. L. G. D.

	Proposée	1	3	8	6	7	9	2	5	4
	renversée	1	7	2	9	8	4	5	3	6
d'où l'on tire par la	2de regle	1	3	5	2	8	7	9	4	6
		1	5	2	8	7	3	6	9	4
	1re regle[1])	1	4	2	8	3	9	6	5	7
		1	3	6	9	2	7	5	4	8
	2de regle	1	8	2	9	6	7	5	4	3
		1	3	7	8	4	9	6	5	2
	1re regle[1])	1	3	9	8	7	5	6	2	4
		1	9	2	5	8	7	3	4	6
	2de regle	1	3	4	9	8	2	5	7	6
		1	6	2	3	7	9	8	5	4

et partant douze, dont aucune ne nous a été connüe auparavant.

114. Après ces regles pour l'invention des directrices pour l'exposant 1, il reste encore à voir comment il faut en déduire des directrices pour les autres exposans, ou bien de quelle manière il faut construire les systèmes complets. Pour cet effet, j'observe en général qu'ayant trouvé pour un exposant quelconque a la directrice

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad \text{etc.},$$

on en tirera, en vertu de la forme du quarré latin, la directrice pour l'exposant $a+3$, en augmentant chaque terme de la première de 3. Et en considérant avec attention la forme du quarré proposé, on peut même soupçonner que, si un terme quelconque de la directrice proposée est de la forme $3\alpha+1$, celui pour l'exposant 2 sera de la forme $3\alpha+2$ et celui de l'exposant 3 de la forme $3\alpha+3$. Ensuite que, si un terme de la proposée pour l'exposant 1 a la forme $3\alpha+2$, le correspondant de la directrice pour l'exposant 2 aura la forme $3\alpha+3$ et celui de l'exposant 3 la forme $3\alpha+1$. Enfin que, si le

1) Ici, la première règle consiste à former la directrice renversée. Dans ce tableau, un couple de directrices est toujours déduit de celui qui le précède, ce qui n'est pas le cas aux § 81 et 94. Voir la note 1 p. 340. L. G. D.

terme de la proposée est de la forme $3\alpha+3$, celui de l'exposant 2 sera de la forme $3\alpha+1$ et celui pour l'exposant 3 de la forme $3\alpha+2$. Cette conjecture, qu'il sera bon de représenter pour plus de clarté dans la table suivante

forme du terme	pour les exposans 2	3
$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$3\alpha+3$
$3\alpha+2$	$3\alpha+3$	$3\alpha+1$
$3\alpha+3$	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$

peut même être rigoureusement démontrée de la manière suivante.

115. Soit, dans la directrice proposée pour l'exposant 1, un terme quelconque x qui réponde à l'indice vertical t et à l'indice horizontal u, en sorte que

$$u=x-t+w.$$

Soit ensuite, dans la directrice pour l'exposant 2, x' un terme qui réponde au même indice vertical t, mais à l'indice horizontal u', en sorte que

$$u'=x'-t+w.$$

Enfin soit, dans la directrice pour l'exposant 3, un terme x'' répondant au même indice vertical t et à l'indice horizontal

$$u''=x''-t+w.$$

Où il faut remarquer que les indices horizontaux u, u', u'' doivent être tirés de la même formule expliquée ci-dessus. Cela posé, il faudra démontrer que, pendant que l'indice u varie par toutes les valeurs (et c'est en quoi consiste la nature des directrices), aussi les deux autres indices u' et u'' varient par toutes les valeurs. Or, cela paroîtra clairement par la table ci-jointe qui représente tous les cas possibles par rapport aux deux valeurs données t et x, ou nous avons mis pour abréger $\alpha-\beta=\gamma$.

$t = 3\beta +$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$x = 3\alpha +$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$u = 3\gamma +$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$x' = 3\alpha +$	2	3	1	3	1	2	1	2	3
$u' = 3\gamma +$	2	2	2	3	3	3	1	1	1
$x'' = 3\alpha +$	3	1	2	1	2	3	2	3	1
$u'' = 3\gamma +$	3	3	3	1	1	1	2	2	2

De cette table, il est évident que, toutes les fois que $u = 3\gamma + 1$, on aura

$$u' = 3\gamma + 2 \quad \text{et} \quad u'' = 3\gamma + 3.$$

De la même manière, lorsque $u = 3\gamma + 2$, on aura

$$u' = 3\gamma + 3 \quad \text{et} \quad u'' = 3\gamma + 1.$$

Enfin, lorsque $u = 3\gamma + 3$, on aura

$$u' = 3\gamma + 1 \quad \text{et} \quad u'' = 3\gamma + 2.$$

D'où l'on voit que, puisque u varie par toutes les valeurs, aussi tant les u' que les u'' doivent varier par toutes les valeurs, et partant la regle donnée ci-dessus nous fournit de chaque directrice pour l'exposant 1 deux autres directrices pour les exposans suivans 2 et 3, desquelles on peut former les directrices pour les exposans 4, 5, 6, en ajoutant 3 à chaque terme des trois premières; et celles pour les exposans 7, 8, 9, en faisant la même chose vis-à-vis des trois précédentes.

116. De cette manière, la formation d'un système complet de directrices d'une seule proposée pour l'exposant 1 du quarré latin fondamental n'aura plus la moindre difficulté. Reprennons, pour en donner un exemple pour le cas de $n = 9$, la directrice qui va en progression arithmétique

1 3 5 7 9 2 4 6 8;

et le système complet sera

1	3	5	7	9	2	4	6	8
2	1	6	8	7	3	5	4	9
3	2	4	9	8	1	6	5	7
4	6	8	1	3	5	7	9	2
5	4	9	2	1	6	8	7	3
6	5	7	3	2	4	9	8	1
7	9	2	4	6	8	1	3	5
8	7	3	5	4	9	2	1	6
9	8	1	6	5	7	3	2	4

et le quarré complet qui résulte de ce système aura la forme suivante[1]):

1^1	2^3	3^8	4^7	5^9	6^5	7^4	8^6	9^2
2^2	3^1	1^9	5^8	6^7	4^6	8^5	9^4	7^3
3^3	1^2	2^7	6^9	4^8	5^4	9^6	7^5	8^1
4^4	5^6	6^2	7^1	8^3	9^8	1^7	2^9	3^5
5^5	6^4	4^3	8^2	9^1	7^9	2^8	3^7	1^6
6^6	4^5	5^1	9^3	7^2	8^7	3^9	1^8	2^4
7^7	8^9	9^5	1^4	2^6	3^2	4^1	5^3	6^8
8^8	9^7	7^6	2^5	3^4	1^3	5^2	6^1	4^9
9^9	7^8	8^4	3^6	1^5	2^1	6^3	4^2	5^7

117. Dans ce quarré, nous avons tiré les trois premières directrices, pour les exposans 1, 2, 3, de la même formule. Mais on auroit pu employer des directrices différentes, pourvu que leurs termes suivissent le même ordre par rapport à la divisibilité par 3. Ayant donc rapporté ci-dessus neuf formules directrices différentes qui suivent toutes la même loix, on en pourroit former 729 quarrés complets tous différens entre eux. Pour éclaircir cela par un exemple, reprennons

1) L'édition originale porte dans la troisième colonne, par erreur, 4^9 au lieu de 1^9.

L. G. D.

pour l'exposant 1 la directrice 1 3 5 7 9 2 4 6 8,

„ „ 2 celle-ci 1 3 8 7 9 5 4 6 2,

„ „ 3 1 6 8 7 3 5 4 9 2,

et le système complet de directrices sera

1	3	5	7	9	2	4	6	8
2	1	9	8	7	6	5	4	3
3	5	7	9	2	4	6	8	1
4	6	8	1	3	5	7	9	2
5	4	3	2	1	9	8	7	6
6	8	1	3	5	7	9	2	4
7	9	2	4	6	8	1	3	5
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	2	4	6	8	1	3	5	7

d'où l'on construit le quarré complet que voici:

1^1	2^9	3^5	4^7	5^6	6^2	7^4	8^3	9^8
2^2	3^1	1^6	5^8	6^7	4^3	8^5	9^4	7^9
3^3	1^2	2^7	6^9	4^8	5^4	9^6	7^5	8^1
4^4	5^3	6^8	7^1	8^9	9^5	1^7	2^6	3^2
5^5	6^4	4^9	8^2	9^1	7^6	2^8	3^7	1^3
6^6	4^5	5^1	9^3	7^2	8^7	3^9	1^8	2^4
7^7	8^6	9^2	1^4	2^3	3^8	4^1	5^9	6^5
8^8	9^7	7^3	2^5	3^4	1^9	5^2	6^1	4^6
9^9	7^8	8^4	3^6	1^5	2^1	6^3	4^2	5^7

118. Ici, nous avons profité de la belle liaison qui se trouve parmi les neuf formules rapportées ci-dessus; mais en employant une autre formule directrice quelconque, il n'est pas difficile de découvrir toutes les autres for-

mules qui ont la même propriété par rapport à la divisibilité par 3. Prennons par exemple la directrice suivante choisie au hazard

$$1 \quad 3 \quad 8 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 2 \quad 5 \quad 4$$

et souscrivons à chaque terme, en forme d'exposans, tant la valeur de

$$u = x - t + w$$

que les autres de la même espèce, de cette manière:

$t =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x =$	1	3	8	6	7	9	2	5	4
$u =$	1	2	9	3	6	4	5	7	8
	1^1	3^2	8^9	6^3	7^6	9^4	2^5	5^7	4^8
	1^1	6^5	2^3	3^9	4^3		5^8		7^2
		9^8	5^6	9^6		3^7	8^2	2^4	

et à présent tout revient à tirer de là des formules simples où non seulement tous les termes mêmes, mais aussi leurs exposans, sont différens; tels sont

$$1^1 \quad 6^5 \quad 2^3 \quad 3^9 \quad 7^6 \quad 9^4 \quad 8^2 \quad 5^7 \quad 4^8$$

$$1^1 \quad 6^5 \quad 8^9 \quad 9^6 \quad 4^3 \quad 3^7 \quad 5^8 \quad 2^4 \quad 7^2$$

d'où l'on peut déduire des formules nouvelles de la même espèce, qui, étant jointes à la proposée, peuvent servir à construire 27 nouveaux quarrés complets.

119. Avant que de finir cette section, j'ajouterai encore une démonstration de la première regle du *renversement*, supposée jusqu'ici gratuitement comme vraye. Cette démonstration est d'autant plus nécessaire qu'il y a quantité de quarrés latins où ce renversement est réellement incapable de fournir des directrices. Il s'agit donc de faire voir que, lorsque le nombre u, qui est $= x - t + w$, varie par toutes les valeurs, pendant que t et x subissent les variations qui leur conviennent, aussi cette formule $t - x + w$, que je nommerai v, reçoive aussi toutes les valeurs différentes.

Pour cet effet, il faut avoir égard à toutes les différentes espèces que les deux nombres t et x peuvent renfermer, comme nous avons fait voir dans

la démonstration du théorème précédent (§ 114 et 115) relativement aux directrices qui répondent aux exposans 2 et 3 et comme cette table explique:

$t = 3\beta +$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$x = 3\alpha +$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$u = 3\gamma +$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$v = 3\gamma +$	1	1	1	3	3	3	2	2	2

d'où il est clair que, lorsque u est de la forme $3\gamma + 1$, v sera de la forme $-3\gamma + 1$ et partant la somme sera $= 2$; c'est à dire que, dans ce cas $u = 3\gamma + 1$, le nombre v sera le complément de u à 2 ou bien à $n + 2$, n étant la racine du quarré dont il s'agit. Or, dans les deux autres cas, $u = 3\gamma + 2$ ou $u = 3\gamma + 3$, on aura $v = -3\gamma + 3$ ou $v = -3\gamma + 2$, et partant dans l'un ou l'autre $u + v = 5$ ou bien $= n + 5$; c'est à dire que, dans ces deux cas, v est le complément de u à 5 ou bien de u à $n + 5$. Il est donc décidé qu'en faisant varier u, le nombre v passera aussi par toutes les valeurs.

Pour le cas où $n = 9$, écrivons les u dans leur ordre naturel, savoir

$$u = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9,$$

et les v seront en vertu des regles

$$v = 1 \quad 3 \quad 2 \quad 7 \quad 9 \quad 8 \quad 4 \quad 6 \quad 5,$$

d'où l'on voit plus évidemment comment toutes les valeurs de v deviennent différentes par les variations de la lettre u.

Fin de la Section troisième.

SECTION QUATRIEME

DES QUARRES LATINS A QUADRUPLE MARCHE DE LA FORME GENERALE

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \text{etc.} \\
2 & - & - & - & 6 & - & - & - & \\
3 & - & - & - & 7 & - & - & - & \\
4 & - & - & - & 8 & - & - & - & \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \text{etc.} \\
6 & - & - & - & 10 & - & - & - & \\
7 & - & - & - & 11 & - & - & - & \\
8 & - & - & - & 12 & - & - & - & \\
\text{etc.} & & & & \text{etc.} & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

120. Puisque, comme il est évident par la forme générale, cette section ne peut regarder que les quarrés dont la racine n est divisible par 4, nous mettrons $n = 4m$, et m marquera le nombre des *membres* dont le quarré est composé, qui contiendront de chaque bande horizontale et verticale quatre ou bien en tout 16 termes. Donc si nous représentons, de la manière introduite au commencement de la section précédente, ces membres par les lettres A, B, C etc., de sorte que

$$A = \left\{\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & - & - \\ 3 & - & - & - \\ 4 & - & - & - \end{array}\right. \quad B = \left\{\begin{array}{llll} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & - & - & - \\ 7 & - & - & - \\ 8 & - & - & - \end{array}\right. \quad C = \left\{\begin{array}{llll} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & - & - & - \\ 11 & - & - & - \\ 12 & - & - & - \end{array}\right. \quad \text{etc.}$$

les différens [cas] que nous aurons à considérer seront compris dans les formes suivantes:

$$A \qquad \begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{array} \qquad \text{etc.}$$

121. Si nous voulions traiter ces quarrés sur le même pied que dans les sections précédentes, nous tomberions dans des calculs très embarrassans. Il sera donc nécessaire d'employer une autre méthode, qui pourra aussi être mise en usage lorsque les quarrés proposés seront de tout autre marche au de là de la quadruple. C'est pourquoi je proposerai ici une méthode qui facilitera très considérablement ces recherches et par laquelle tous les objets seront représentés d'une manière aussi claire que facile.

122. D'abord, en considérant un terme quelconque du quarré proposé, que nous indiquerons par la lettre x, il s'agit de découvrir le rapport que ce terme tient aux indices, le vertical $= t$, le horizontal $= u$; où il est clair qu'il faut avoir égard à quatre termes, dont les formules seront $4\lambda + 1$, $4\lambda + 2$, $4\lambda + 3$, $4\lambda + 4$. Conformément à ces quatre espèces, nous mettrons toujours

$$t = 4p + f, \quad u = 4q + g, \quad x = 4s + h,$$

où les nombres p, q, s seront toujours plus petits que m et les autres lettres, f, g, h, marqueront toujours un des quatre nombres 1, 2, 3, 4. Outre cela, en considérant le quarré proposé, on s'aperçoivra aisément qu'on aura toujours

$$s = p + q,$$

en observant que, lorsque le nombre x devient plus grand que $n = 4m$, on doit en retrancher le nombre n, et l'excès marquera la juste valeur de la lettre s.

123. Nous avons déjà remarqué ci-dessus que, dans ce cas des quarrés à quadruple marche, le premier membre A peut recevoir quatre formes différentes (voyés § 16) qu'il sera bon de mettre ici devant les yeux

I.				II.				III.				IV.			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	1	4	3	2	1	4	3	2	4	1	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	2	1	3	1	4	2
4	1	2	3	4	3	2	1	4	3	1	2	4	3	2	1

De ces formes pour le premier membre, il sera facile de tirer celles pour les membres suivans B, C, D etc., en augmentant tous les termes: pour le second, B, de 4; pour le troisième, C, de 8; [pour le quatrième, D,] de 12; et ainsi de suite.

124. Commençons par la première forme dont la première horizontale représentera les valeurs de f pour la forme $t = 4p + f$, pendant que la première verticale donne les valeurs de g pour la forme $u = 4q + g$; et les termes mêmes de cette forme marqueront les valeurs de la lettre h pour la forme $x = 4s + h$, en observant que $s = p + q$. Cette signification pourra donc être représentée de cette manière

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}^{f}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multirow{4}{*}{$g\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$} & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

où les termes du quarré marquent les nombres h, pour toutes les valeurs de f et g.

125. De là, on construira aisément un autre quarré qui représentera les valeurs de la lettre g qui répondent aux valeurs de la lettre f et h, et un troisième pour les valeurs de f qui répondent aux valeurs de g et h.

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}^{f}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ h & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ & 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}^{g^{1)}}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ h^{1)} & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ & 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

1) Dans l'édition originale, les lettres g et h sont ici permutées, par erreur. L. G. D.

Ces figures peuvent s'appliquer très commodément pour juger des formules directrices, dont la nature exige qu'à toutes les valeurs de $t = 4p + f$ répondent autant de différentes valeurs de la lettre $x = 4s + h$; et en second lieu, que les valeurs de l'indice $u = 4q + g$ soyent aussi différentes entre elles.

126. Ayant exprimé les valeurs des nombres t, u, x par deux membres, il sera bon de remarquer, pour la commodité des explications suivantes, que le premier est pour ainsi dire *la Caractéristique*, qui marque le plus proche multiple de 4 au dessous, et l'autre *la Mantisse*, qui indique la forme d'un nombre proposé par rapport à la divisibilité par 4. Ainsi, pour les nombres du premier membre, A, qui sont 1, 2, 3, 4, la caractéristique sera 0; pour ceux du second membre, B, qui sont 5, 6, 7, 8, la caractéristique sera 4; pour ceux du troisième, C, savoir 9, 10, 11, 12, elle sera 8; et ainsi de suite. Au reste, il est évident que la caractéristique de x est toujours égale à la somme des caractéristiques de t et u, de sorte que, n'ayant égard qu'aux caractéristiques, on aura toujours $x = t + u$ et partant

$$u = x - t.$$

127. Donc, puisque dans tous les cas les caractéristiques ne sont sujettes à aucune difficulté, nous pourrons nous en passer entièrement, et partant nous n'aurons qu'à regarder les mantisses f, g, h, qui forment les formes de t, u, x, ou ce qui reste après la division par 4; et par cette raison, nous pourrons bien nous passer aussi des lettres f, g, h, au lieu desquelles nous nous servirons uniquement des t, u et x, comme nous avons fait dans les sections précédentes, ce qui facilitera considérablement nos recherches.

Cependant, nous ajouterons encore à ces trois lettres t, u, x, une quatrième, v, qui se rapporte de la même manière aux lettres x et t que u se rapporte aux lettres t et x, de sorte qu'en ne regardant que les caractéristiques, on aura

$$v = t - x,$$

au lieu que nous avions $u = x - t$, d'où l'on voit que la caractéristique de v sera toujours le négatif de celle de u ou bien son complément au nombre $n = 4m$; et la somme des caractéristiques de ces deux lettres sera toujours ou 0 ou n.

128. Maintenant, il sera facile de représenter par des figures convenables, comment chacune de ces quatre lettres est déterminée par deux autres. Car d'abord, en regardant les lettres t et u comme connües, la forme du nombre x sera déterminée par la figure première, de laquelle on formera facilement la seconde, pour les valeurs de u, lorsque t et x sont connües.

1re figure
pour les valeurs de x

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{t}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multirow{4}{*}{u} & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

2de figure
pour les valeurs de u

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{t}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multirow{4}{*}{x} & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ & 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

De cette figure, on tire ensuite aisément la troisième, pour les valeurs de v par t et x, puisqu'on n'aura qu'à en changer les indices t et x; ou bien, en laissant ceux-ci, on n'aura qu'à changer les colonnes horizontales et verticales, comme on peut voir par cette figure.

3me figure
pour les valeurs de v

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{t}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multirow{4}{*}{x} & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

129. De la première de ces trois figures, il est d'abord clair qu'en transposant les lettres t et u, la figure demeure la même. Donc, quand on aura trouvé une formule directrice quelconque, dans laquelle à l'indice vertical t il répond le terme x, on en pourra d'abord déduire une autre dans laquelle, en marquant par X le terme qui répond à l'indice vertical T, on n'a qu'à

prendre $T=u$ et $X=x$, et alors, en nommant U l'indice horizontal de cette nouvelle formule, on aura $U=t$. Car il est clair que, pendant que les deux lettres T et X varient par toutes les valeurs, aussi la lettre U passera par les mêmes variations. Il ne s'agit donc que de ranger les différentes valeurs de $u=T$ selon leur ordre naturel.

130. En second lieu, il ne sera pas difficile de démontrer qu'ayan t trouvé une formule directrice entre les lettres t et x, on en puisse toujours déduire une autre entre T et X, en prennant

$$T=x \quad \text{et} \quad X=t.$$

Car on voit par la troisième figure que l'indice horizontal u sera dans ce cas $=v$, et partant, il ne s'agit que de démontrer que, pendant que les valeurs de u varient par tous les nombres depuis 1 jusqu'à 4, aussi celles de v subiront les mêmes changemens.

Prennons pour cet effet une nouvelle figure, qui nous marque la somme des deux lettres u et v par les données t et x.

$$\begin{array}{cc|cccc} & & & t & & \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multirow{4}{*}{x} & 1 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ & 2 & 6 & 2 & 6 & 6 \\ & 3 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ & 4 & 6 & 6 & 6 & 2 \end{array}$$

d'où il est clair que, puisque les caractéristiques de u et de v se détruisent, on aura toujours $u+v=2$ ou bien $u+v=6$, dont le premier aura lieu toutes les fois que $u=1$ ou bien $u=4\lambda+1$; dans tous les autres cas, il y aura $u+v=6$ ou bien $u+v=n+6$.

131. Développons ces cas différens. D'abord en prennant $u=4\lambda+1$ on aura $v=-4\lambda+1$ ou bien, en y ajoutant n, on aura $v=4(m-\lambda)+1$ d'où l'on voit que, pendant que la lettre u reçoit toutes les valeurs de la forme 1, la lettre v recevra aussi toutes ces valeurs. En second lieu, en prennant $u=4\lambda+2$, on aura $v=4(m-\lambda)+4$; ou bien v sera le complément

de u à 6 ou à $n+6$; donc, pendant que u varie par toutes les valeurs de la forme 2, la lettre v passera par celles de la forme 4. Et si u passe par celles de la forme 3, v recevra les valeurs de la même forme. Enfin, pendant que u prend toutes les valeurs de la forme 4, v prendra celles de la forme 2. D'où il est clair qu'en général, si u passe par toutes les variations, aussi $v=U$ les subit de même; par conséquent, le renversement des formules directrices a lieu dans tous ces cas sans la moindre réstriction.

132. De cette double transformation de chaque formule directrice, on peut déduire plusieures autres. Car étant parvenu aux valeurs

$$T=x, \quad X=t, \quad U=v,$$

en changeant suivant la première transformation les lettres T et U, on aura cette nouvelle transformée

$$T=v, \quad X=t, \quad U=x;$$

et de là, en changeant suivant l'autre transformation les lettres T et X, on aura cette nouvelle

$$T=t, \quad X=v, \quad U=u,$$

qui répond à celle que nous avons trouvée dans les sections précédentes par nôtre seconde regle.

133. Quoique nous ayons trouvé encore d'autres transformations, il suffira de mettre en usage les deux qui répondent à celles des autres sections; vu que, par la combinaison de ces deux regles, on peut déduire de chaque directrice proposée jusqu'à douze nouvelles. C'est pourquoi nous les mettrons ici devant les yeux:

Ayant une directrice quelconque, dans laquelle il répond à l'indice vertical t le terme x, en mettant pour la nouvelle directrice l'indice vertical T et le terme qui lui répond $=X$, on aura toujours

par la première regle $T=x$ *et* $X=t$,

par la seconde regle $T=t$ *et* $X=v$,

où le nombre v doit être déterminé par la troisième figure donnée ci-dessus et que nous allons répéter ici, puisque c'est de cette seule forme que dépendent toutes les transformations qu'on voudra faire.

Figure

pour les valeurs de v

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 2\quad 3\quad 4}}^{t}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multirow{4}{*}{x} & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

134. Après avoir trouvé toutes les directrices pour l'exposant 1, ou du moins une grande partie, il est clair qu'en ajoutant à chaque terme d'une telle directrice ou 4 ou 8 ou 12 etc., on aura les directrices pour les exposans 5, 9, 13 et ainsi de suite; et partant, il ne reste qu'à faire voir comment on peut trouver des directrices pour les exposans 2, 3, 4, 6, 7 etc., à fin qu'on en puisse tirer un système entier de directrices; après quoi, comme on a vu jusqu'à présent, il n'est plus difficile de construire le quarré complet.

135. Soit, pour le terme x dans la directrice pour l'exposant 1, l'indice horizontal $= u$. Dans la directrice pour l'exposant 2, soit l'indice horizontal du terme $x' = u'$; dans celle pour l'exposant 3, soyent le terme x'' et l'indice $= u''$; et ainsi des autres, x''' et u''', x'''' et u'''' etc. Cela posé, le premier membre, A, nous montre les relations suivantes entre ces différentes valeurs de x:

$$\begin{aligned} x &= 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \\ x' &= 2, \quad 3, \quad 4, \quad 1, \\ x'' &= 3, \quad 4, \quad 1, \quad 2, \\ x''' &= 4, \quad 1, \quad 2, \quad 3. \end{aligned}$$

Il faudra donc démontrer que, pendant que la lettre u varie par toutes les valeurs, aussi les lettres u', u'', u''' subiront les mêmes variations.

136. Considérons pour cet effet les figures tirées de la seconde donnée ci-dessus, qui exprime les valeurs de u par t et x; elles seront représentées de la mainère suivante:

Pour u

$x \backslash t$	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

Pour u' 1)

$x' \backslash t$	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	3	2	1	4
3	4	3	2	1
4	1	4	3	2

Pour u''

$x'' \backslash t$	1	2	3	4
1	3	2	1	4
2	4	3	2	1
3	1	4	3	2
4	2	1	4	3

Pour u'''

$x''' \backslash t$	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	1	4	3	2
3	2	1	4	3
4	3	2	1	4

En comparant la seconde de ces figures avec la première, on voit qu'il y a partout $u' = u + 1$ ou $u' = u - 3$, dont le dernier a lieu lorsque $u = 4$; dans tous les autres cas, il y a $u' = u + 1$. Ensuite, en comparant la troisième figure avec la première, on aura ou $u'' = u + 2$ ou $u'' = u - 2$, dont le dernier cas a lieu lorsque $u' = 3$ ou $= 4$. Enfin, la comparaison de la quatrième figure déclare qu'on aura $u''' = u - 1$ dans tous les cas, excepté celui de $u = 1$, pour lequel il devient $u''' = u + 3$. Il est donc décidé qu'en donnant à u toutes les valeurs convenables, les lettres u', u'', u''' passeront par les mêmes variations.

1) Dans le tableau pour u', l'édition originale porte $x'\left\{\begin{array}{c|}2\\3\\4\\1\end{array}\right.$ au lieu de $x'\left\{\begin{array}{c|}1\\2\\3\\4\end{array}\right.$. L. G. D.

137. On voit donc clairement de quelle manière, d'une directrice quelconque pour l'exposant 1, on peut former un système complet de directrices et un quarré complet. Mais de ce que nous avons dit dans les sections précédentes, on comprend aussi facilement que, pour former les directrices des exposans 2, 3, 4, on peut employer différentes directrices pour l'exposant 1, pourvu que leurs termes suivent le même ordre par rapport à la divisibilité par 4, ce qui est une source très féconde qui multiplie considérablement le nombre de tous les quarrés complets, par rapport à toutes les différentes directrices trouvées pour l'exposant 1.

138. Après ces recherches générales pour tous les quarrés divisibles par 4, nous allons considérer quelques cas particuliers. Or d'abord, quand le quarré proposé ne contient qu'un seul membre, A, qui est un quarré à simple marche, nous avons démontré, dans la première section, qu'il n'est pas susceptible de directrices. C'est pourquoi nous nous bornerons à rapporter le cas de $n = 8$, où le quarré renferme deux membres, A et B, dont la forme est

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	1	6	7	8	5
3	4	1	2	7	8	5	6
4	1	2	3	8	5	6	7
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	5	2	3	4	1
7	8	5	6	3	4	1	2
8	5	6	7	4	1	2	3

Ce quarré fournira apparemment 48 directrices pour l'exposant 1, en l'examinant suivant les regles données ci-dessus; je vais en rapporter celles que j'ai trouvées par la première méthode, enseignée § 11 et suiv., qui sont

1	3	7	5	8	4	2	6	1	4	7	6	8	4	2	5
1	3	7	5	4	8	6	2	1	4	7	6	2	5	8	3
1	3	8	6	4	2	5	7	1	4	8	7	3	5	6	2
1	3	8	6	7	5	2	4	1	4	8	7	3	2	6	5
1	3	5	7	8	4	2	6	1	4	5	8	6	3	2	7
1	3	5	7	2	8	6	4	1	4	5	8	2	7	6	3
1	3	6	8	7	5	4	2	1	4	6	5	8	7	3	2
1	3	6	8	2	4	5	7	1	4	6	5	3	2	8	3

desquelles on pourra trouver aisément le reste, en y appliquant les regles tant de fois répétées.

139. Nous ne nous arrêterons pas à développer les quarrés magiques que ce cas peut fournir, puisque tous les principes ont été suffisamment expliqués et démontrés; et les trois autres cas de la forme du premier membre, A, n'ayant plus la moindre difficulté, en les traitant de la même manière que la première forme, il seroit superflu de pousser plus loin ces recherches. Nous finirons donc cette section par la remarque que le cas que nous venons d'y examiner ne sauroit avoir lieu lorsque le nombre des membres A, B, C etc. est 3 ou 5 ou peut-être tout autre nombre impair quelconque.

Fin de la Section Quatrième.

SECTION CINQUIEME

DE LA TRANSFORMATION DES QUARRES TANT SIMPLES QUE COMPLETS

140. Ayant vu que toutes [les] méthodes que nous avons exposées jusqu'ici ne sauroient fournir aucun quarré magique pour le cas de $n = 6$ et que la même conclusion semble s'étendre à tous les nombres impairement pairs de n, on pourroit croire que, si de tels quarrés sont possibles, les quarrés latins qui leur servent de base, ne suivant aucun des ordres que nous venons de considérer, seroient tout à fait irréguliers. Il faudroit donc examiner tous les cas possibles de tels quarrés latins pour le cas de $n = 6$, dont le nombre est sans doute extrèmement grand. Et comme outre cela la formation des quarrés irréguliers n'est pas si aisée, je vais rapporter une méthode par le moyen de laquelle on peut transformer facilement, en plusieures formes différentes, tous les quarrés réguliers et examiner ensuite s'ils admettent des directrices ou non.

141. Cette méthode tient à ce principe: *que si, dans un quarré latin proposé, deux nombres a et b se trouvent dans les angles d'un parallelogramme rectangle, de la manière que cette figure les représente*

$$\begin{array}{ccc} a & \cdots\cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots\cdots & a \end{array}$$

on pourra échanger entre elles ces deux lettres, en écrivant a au lieu de b et b au lieu de a; dont la raison est évidente, car on voit bien que, nonobstant cette transposition, toutes les colonnes horizontales et verticales renferment encore les mêmes nombres. Il est donc évident que par ce principe on sera en état de transformer chaque quarré proposé en plusieures autres formes différentes qui auront, par rapport aux formules directrices, des propriétés tout à fait particulières.

142. Considérons par exemple le quarré latin à simple marche de 36 cases suivant

1	2	3	4	5	6
2	$\underline{3}$	4	5	$\underline{6}$	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	$\underline{6}$	1	2	$\underline{3}$	4
6	1	2	3	4	5

qui, comme nous avons démontré dans la section I, § 20, n'admet aucune directrice. Transposons de la manière rapportée les deux nombres marqués, 3 et 6, disposés en parallelogramme, et nous obtiendrons le quarré qui suit

1	2	3	4	5	6
2	6	4	5	3	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	3	1	2	6	4
6	1	2	3	4	5

qui, malgré la conformité apparente, diffère si essentiellement du quarré proposé, qu'on en peut déduire un grand nombre de directrices pour tous les six exposans, quoique l'autre n'en a fourni aucune. Les voici:

1	6	5	2	4	3	4	3	2	5	1	6
1	6	5	3	2	4	4	3	2	6	5	1
1	4	6	2	3	5	4	1	3	5	6	2
1	4	2	5	6	3	4	1	5	2	3	6
1	5	4	3	6	2	4	2	1	6	3	5
1	5	2	3	6	4	4	2	5	3	6	1
1	3	4	6	2	5	4	6	1	3	5	2
1	3	6	5	4	2	4	6	3	2	1	5 .

2	4	3	1	6	5	5	7	6	4	3	2
2	3	5	1	4	6	5	6	2	4	1	3
2	3	6	4	1	5	5	6	3	1	4	2
2	1	5	4	6	3	5	4	2	1	3	6
3	2	4	1	6	5	6	5	1	4	3	2
3	6	2	1	5	4	6	3	5	4	2	1
3	6	1	4	2	5	6	3	4	1	5	2
3	5	2	4	6	1	6	2	5	1	3	4

143. Après avoir trouvé toutes ces directrices, il ne reste qu'à examiner si l'on en peut former un système complet, moyennant lequel on puisse completter le quarré simple proposé. Or, en considérant attentivement les directrices pour les exposans 2, 3, 5, 6, on verra que, de quelque manière qu'on les veuille combiner, elles ne fournissent dans la quatrième bande verticale que les deux nombres 1 et 4, de sorte que ces deux nombres se trouveroient nécessairement deux fois dans la même bande du système complet, dont l'impossibilité absolüe saute aux yeux. Nous pouvons donc hardiment assurer que le quarré simple proposé ne sauroit fournir une solution du problème.

144. J'ai examiné par cette méthode un très grand nombre de quarrés transformés semblables, sans en rencontrer un seul qui n'ait eu le même inconvénient, de ne fournir aucun système de directrices dont l'une ou l'autre bande verticale ne renfermât un nombre deux fois, et je n'ai pas hésité d'en conclure qu'on ne sauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la même impossibilité s'étende aux cas de $n=10$, $n=14$ et en général à tous les nombres impairement pairs. Car, ayant trouvé une méthode de transformer un quarré magique quelconque en plusieures (même jusqu'à 24) formes différentes, s'il se trouvoit un seul quarré complet pour le cas de $n=6$, il y en auroit certainement plusieures autres dont les quarrés latins fondamentaux seroient tous différens entre eux. Or, ayant examiné un nombre très considérable de tels quarrés, il me paroît impossible que tous les cas mentionnés me fussent échappés.

145. Ce raisonnement pourra être porté à un beaucoup plus haut degré de certitude par la transformation générale que nous allons exposer, moyennant laquelle chaque quarré latin proposé peut être transformé en plusieurs autres qui ont tous la même propriété par rapport aux directrices; de sorte que, si le quarré proposé n'admet point de directrices, aussi tous les quarrés transformés seront de la même nature, et en cas que le quarré proposé en admet un système complet, aussi tous ceux qui en ont été déduits fourniront des quarrés magiques complets.

146. Pour cette *transformation générale,* on n'a qu'à changer la signification des nombres dont le quarré latin est composé, en substituant à leur place d'autres nombres dans un ordre quelconque et en réduisant ensuite le nouveau quarré suivant l'ordre que nous avons observé jusqu'ici, c'est à dire que les nombres de la première bande tant horizontale que verticale se suivent dans leur ordre naturel. De cette manière, on obtiendra toujours un nouveau quarré doué des mêmes propriétés par rapport aux directrices, parce qu'on n'a qu'à apporter les mêmes changemens dans les directrices du quarré proposé. Par là on voit que cette méthode doit être d'autant plus fertile dans la production de nouveaux quarrés que le nombre n est grand. Car pour les cas de $n = 2, 3, 4$, il n'y a aucun changement à attendre. Pour le cas $n = 5$, la variation pourroit monter jusqu'à trois et pour le cas de $n = 6$, le nombre doit être d'autant plus considérable que l'ordre de six nombres peut recevoir jusqu'à 720 variations, dont il y a pourtant plusieures qui reviendront à la même forme.

147. Pour mieux éclaircir la manière et l'usage de ces transformations, nous allons prendre pour exemple le dernier quarré de 6 qui a été si fertile en directrices; d'où, en changeant les nombres à volonté d'une manière quelconque, par exemple en écrivant

$$4 \quad 6 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 5$$

au lieu de

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6,$$

nous obtiendrons le quarré suivant

4	6	1	3	2	5
6	5	3	2	1	4
1	3	2	5	4	6
3	2	5	4	6	1
2	1	4	6	5	3
5	4	6	1	3	2

qui, en réduisant en ordre les bandes tant horizontales que verticales, recevra cette forme ordinaire:

1	2	3	4	5	6
2	4	1	5	6	3
3	5	2	6	4	1
4	1	6	2	3	5
5	6	4	3	1	2
6	3	5	1	2	4

Si nous traitions de la même manière tous les quarrés latins de 36 cases, à simple ou à double ou à triple marche, qui, comme nous avons démontré, n'admettent aucune directrice, nous obtiendrions un grand nombre d'autres quarrés semblables qui n'en seroient pas plus susceptibles; de sorte qu'il suffira d'en avoir examiné un seul, pour porter un jugement sur la nature de tous les autres.

148. De là il est clair que, s'il existoit un seul quarré magique complet de 36 cases, on en pourroit déduire plusieurs autres moyennant ces transformations, qui satisferoient également aux conditions du problème. Or, ayant examiné un grand nombre de tels quarrés sans avoir rencontré un seul, il est plus que probable qu'il n'y en ait aucun. Car le nombre des latins ne sauroit être si énorme, que la quantité de ceux que j'ai examinés n'en devroit avoir fourni un qui admet des directrices, s'il y en avoit; vu que le cas de $n = 2$ et $n = 3$ ne fournit qu'un seul, le cas de $n = 4$ quatre, le cas de $n = 5$ cinquante six, d'après un dénombrement exact, d'où l'on voit que le nombre des variations pour le cas de $n = 6$ ne sauroit être si prodigieux, que le nombre de 50 ou 60 que je pourrois avoir examinées n'en fût qu'une petite partie. J'observe encore, à cette occasion, que le parfait dé-

nombrement de tous les cas possibles de variations semblables seroit un objet digne de l'attention des Géomètres, d'autant plus que tous les principes connus dans la doctrine des combinaisons n'y sauroient préter le moindre secours.

149. En examinant plusieurs de tels quarrés formés au hazard, j'ai remarqué une différence étonnante par rapport aux directrices; j'en rencontrois tantôt qui n'en fournissoient aucune, tantôt qui ne donnoient aucune pour deux exposans, mais deux pour chacun des autres. Entre autres, je suis tombé aussi sur un quarré qui me paroît mériter une attention particulière, puisqu'il m'a fourni quatre directrices pour chaque exposant, et même telles qui sembloient promettre un système complet; c'est pourquoi je vais rapporter ici le quarré qui me les a fournies.

Quarré.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	4	1	2	6	5
4	5	6	1	2	3
5	6	4	3	1	2
6	3	2	5	4	1

Directrices.

1 4 6 5 3 2	3 2 6 5 1 4	5 1 2 4 6 3
1 5 2 3 6 4	3 1 4 5 2 6	5 2 1 6 4 3
1 6 5 2 4 3	3 6 5 4 2 1	5 4 2 1 3 6
1 3 4 6 2 5	3 6 2 1 5 4	5 4 3 6 2 1
2 4 6 3 5 1	4 1 3 5 6 2	6 1 4 2 5 3
2 5 1 3 4 6	4 3 1 6 5 2	6 5 1 4 3 2
2 6 3 1 4 5	4 2 5 3 6 1	6 2 4 1 3 5
2 3 6 4 1 5	4 3 5 2 1 6	6 5 3 2 1 4

Toutes ces directrices ont la belle propriété que chacune d'elle a sa renversée parmi les autres. Mais, pour en former un système complet, on n'en

sauroit combiner que quatre, et cela des deux manières suivantes

1	5	2	3	6	4		1	3	4	6	2	5
2	6	3	1	4	5		2	5	1	3	4	6
3	1	4	5	2	6		3	6	2	1	5	4
4	3	1	6	5	2		4	1	3	5	6	2

et il est clair que des directrices pour les exposans suivans, 5 et 6, il ne s'accorde aucune pour completter le système.

150. On pourroit appliquer de semblables transformations aux vrays quarrés magiques ou complets; mais il seroit superflu d'en construire d'autres par le changement des nombres. Il y a au contraire une autre espèce de transformation, qui leur est particulière, puisque dans tout quarré magique les nombres latins et grecs peuvent être échangés entre eux, d'où l'on obtient toujours un nouveau quarré entièrement différent. Ainsi, en prennant pour exemple le quarré complet de 25 cases suivant

$$\begin{array}{ccccc}
1^1 & 2^5 & 3^4 & 4^3 & 5^2 \\
2^2 & 3^1 & 4^5 & 5^4 & 1^3 \\
3^3 & 4^2 & 5^1 & 1^5 & 2^4 \\
4^4 & 5^3 & 1^2 & 2^1 & 3^5 \\
5^5 & 1^4 & 2^3 & 3^2 & 4^1
\end{array}$$

on en tirera, par le changement des nombres mentionné, le quarré suivant

$$\begin{array}{ccccc}
1^1 & 5^2 & 4^3 & 3^4 & 2^5 \\
2^2 & 1^3 & 5^4 & 4^5 & 3^1 \\
3^3 & 2^4 & 1^5 & 5^1 & 4^2 \\
4^4 & 3^5 & 2^1 & 1^2 & 5^3 \\
5^5 & 4^1 & 3^2 & 2^3 & 1^4
\end{array}$$

qui, étant mis en ordre, reprendra sa forme primitive; mais aussi ce changement n'est-il qu'un cas très particulier de la transformation générale que nous allons proposer.

151. Remarquons que, comme chaque terme d'un quarré complet contient deux nombres, dont l'un a été nommé *le nombre latin* et l'autre *le grec,* aussi la case que ce terme occupe est déterminée par deux nombres, dont l'un est l'indice horizontal et l'autre le vertical. Chaque terme avec la case qu'il occupe est donc déterminé par quatre nombres, a, b, c, d, dont le premier, a, soit l'indice horizontal, b l'indice vertical, c le nombre latin et d le nombre grec; et tous ces quatre nombres a, b, c, d seront *permutables.* De cette manière, les termes du dernier quarré de 25 cases pourront être représentés de la manière suivante:

1 1 1 1	1 2 2 5	1 3 3 4	1 4 4 3	1 5 5 2
2 1 2 2	2 2 3 1	2 3 4 5	2 4 5 4	2 5 1 3
3 1 3 3	3 2 4 2	3 3 5 1	3 4 1 5	3 5 2 4
4 1 4 4	4 2 5 3	4 3 1 2	4 4 2 1	4 5 3 5
5 1 5 5	5 2 1 4	5 3 2 3	5 4 3 2	5 5 4 1

Pour peu qu'on réflechisse sur ces quaternaires, on s'apercevra aisément que tous les quatre nombres peuvent être échangés entre eux de toutes les manières possibles, et je n'ai pas besoin d'ajouter que le nombre des variations est de 24, qui à la vérité ne produiront pas toutes de nouveaux quarrés, mais pourtant une bonne quantité, et d'autant plus que le nombre n est grand.

152. J'avois observé ci-dessus [§ 148] qu'un parfait dénombrement de toutes les variations possibles des quarrés latins seroit une question très importante, mais qui me paroissoit extrèmement difficile et presque impossible dès que le nombre n surpassoit 5. Pour approcher de cette énumeration, il faudroit commencer par cette question:

En combien de manières différentes, la première bande horizontale étant donnée, peut-on varier la seconde bande horizontale pour chaque nombre proposé n?

La solution est contenue dans la table suivante:

n	nombre des variations	
1	0	
2	1	
3	$1 = 1 \cdot 1$	$+ 0 \cdot 0$
4	$3 = 2 \cdot 1$	$+ 1 \cdot 1$
5	$11 = 3 \cdot 3$	$+ 2 \cdot 1$
6	$53 = 4 \cdot 11$	$+ 3 \cdot 3$
7	$309 = 5 \cdot 53$	$+ 4 \cdot 11$
8	$2119 = 6 \cdot 309$	$+ 5 \cdot 53$
9	$16687 = 7 \cdot 2119$	$+ 6 \cdot 309$
10	$148329 = 8 \cdot 16687$	$+ 7 \cdot 2119$
etc.	etc.	

De là il est clair que ces nombres constituent une progression ou espèce de série récurrente dont chaque terme est déterminé par les deux précédens, mais dont l'échelle de rélation est variable. Ainsi, si l'on met les lettres P, Q, R, S pour les nombres des variations qui répondent aux nombres n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, on aura toujours

$$R = nQ + (n-1)P$$

et

$$S = (n+1)R + nQ.$$

On peut trouver de là une formule indépendente de n, par laquelle chaque terme S peut être exprimé par les trois précédens, P, Q, R. Car, la pénultième équation donnant

$$R - Q = (n-1)(Q+P),$$

il y aura

$$n - 1 = \frac{R-Q}{P+Q};$$

d'où l'on voit que $R - Q$ est toujours divisible par $P + Q$. De la même manière on aura

$$S - R = n(Q + R)$$

et partant

$$n = \frac{S-R}{Q+R}.$$

En retranchant donc l'équation précédente de celle-ci, on aura

$$1 = \frac{S-R}{Q+R} - \frac{R-Q}{P+Q},$$

d'où l'on tire

$$PS - PR + QS - QR - RR = PQ + PR + QR$$

et partant

$$S = \frac{PQ + 2PR + 2QR + RR}{P+Q}$$

ou bien

$$S = 2R + Q + \frac{RR + PQ}{P+Q} - Q$$
$$= 2R + Q + \frac{(R+Q)(R-Q)}{P+Q}.$$

Ainsi, en prennant

$$P = 53, \quad Q = 309, \quad R = 2119,$$

on aura

$$2R + Q = 4547, \quad R - Q = 1810, \quad R + Q = 2428, \quad P + Q = 362;$$

de là $\frac{R-Q}{P+Q} = 5$ et partant

$$S = 4547 + 5 \cdot 2428 = 16687.$$

Ou bien, en prennant

$$P = 309, \quad Q = 2119, \quad R = 16687,$$

il y aura

$$2R + Q = 35493, \quad R - Q = 14568, \quad R + Q = 18806, \quad P + Q = 2428;$$

de là $\frac{R-Q}{P+Q} = 6$ et partant

$$S = 35493 + 6 \cdot 18806 = 148329.$$

La série des nombres de variation a encore une très belle propriété, dont la vérité n'est rien moins qu'évidente: c'est *qu'on peut même déterminer chaque terme par le seul précédent.* Ainsi, quand le nombre des variations pour le nombre des termes de la seconde horizontale, n, est $= P$ et pour le nombre $n+1 \ = Q$, il y aura toujours[1])

$$Q = nP + \frac{-P \pm 1}{n},$$

où le signe supérieur a lieu si n est un nombre impair, et l'inférieur s'il est pair. Outre cela, prennant R pour le nombre des variations du cas $n+2$, puisque nous avons trouvé

$$R = nQ + (n-1)P,$$

si nous mettons au lieu de Q la valeur trouvée $Q = nP + \frac{-P \pm 1}{n}$, nous aurons une formule qui détermine le terme R par le seul avant-précédent P, savoir

$$R = nnP - P + 1 + (n-1)P = (n-1)(n+2)P \pm 1.$$

Ainsi, en prennant

$$n = 6 \quad \text{et} \quad P = 53,$$

on aura

$$R = 5 \cdot 8 \cdot 53 - 1 = 2119;$$

et prennant

$$n = 7, \quad \text{où} \quad P = 309,$$

il y aura

$$R = 6 \cdot 9 \cdot 309 + 1 = 16687.$$

Mais je dois avouer que je n'ai trouvé la propriété de déterminer chaque nombre par le seul précédent que par pure induction, et je ne vois pas trop bien comment on pourroit la déduire de la nature de la série.

Cependant, il y a un moyen de la déduire immédiatement de la série; du moins les réflexions suivantes nous approcheront d'avantage de la vérité de l'assertion que $Q = nP + \frac{-P \pm 1}{n}$. Car, si Q est le nombre des variations pour un cas quelconque de n, soit impair ou pair, et R le nombre des variations pour le cas suivant, où le nombre des termes est $n+1$, il y auroit en vertu de l'expression rapportée

1) Edition original (trois fois): $Q = -\frac{P \pm 1}{n}$. Voir la préface de l'éditeur. L. G. D.

$$nQ = (nn - 1)P \pm 1$$

et

$$(n + 1)R = (nn + 2n)Q \mp 1,$$

où le signe supérieur a lieu si n est un nombre impair, l'inférieur s'il est pair. Or, la somme de ces deux expressions fournit cette équation

$$(n + 1)R + nQ = (nn + 2n)Q + (nn - 1)P,$$

qui se réduit à

$$(n + 1)R = (nn + n)Q + (nn - 1)P,$$

d'où l'on tire, en divisant par $n + 1$, la valeur de

$$R = nQ + (n - 1)P,$$

qui convient parfaitement avec celle que nous avons déduite ci-dessus de la nature de la série.

Voila ce que j'ai cru devoir ajouter par rapport au dénombrement des variations qui peuvent avoir lieu dans les quarrés simples fondamentaux, en laissant aux Géomètres à voir s'il y a des moyens pour achever l'énumeration de tous les cas possibles, ce qui paroît fournir un vaste champ pour des recherches nouvelles et intéressantes. Je mets fin ici aux miennes sur une question qui, quoique en elle-même de peu d'utilité, nous a conduit à des observations assés importantes tant pour la doctrine des combinaisons que pour la théorie générale des quarrés magiques.

SOLUTIO QUAESTIONIS AD CALCULUM PROBABILITATIS PERTINENTIS QUANTUM DUO CONIUGES PERSOLVERE DEBEANT UT SUIS HAEREDIBUS POST UTRIUSQUE MORTEM CERTA ARGENTI SUMMA PERSOLVATUR[1]

Commentatio 599 indicis ENESTROEMIANI
Opuscula analytica 2, 1785, p. 315—330

1. Assumimus hic eiusmodi aerarium publicum esse constitutum, cuius facultates quotannis vicesima sui parte augeri queant, ita ut summa 100 Rubellonum post annum ad 105 Rub. excrescat; quare si brevitatis gratia ponamus $\frac{105}{100} = \lambda$, praesens pecuniae summa $= C$ post n annos aestimanda erit $\lambda^n C$. Vicissim autem quaevis pecuniae summa C post n annos solvenda praesenti tempore valorem habere censenda est $= \frac{C}{\lambda^n}$.

2. Ponamus nunc argenti summam, quam ambo coniuges post utriusque mortem acquirere optant, esse $= 1000$ Rub., unde intelligitur, si tempus huius solutionis esset cognitum, annorum praeterlapsorum numero existente $= n$ eius valorem praesentem futurum esse $= \frac{1000}{\lambda^n}$. Tantum igitur illi coniuges praesenti tempore in aerarium conferre tenerentur. Verum cum tempus solutionis maxime sit incertum, siquidem demum post utriusque mortem fieri debet, verum et praesentem valorem huius summae secundum regulas calculi probabilium ex longaevis mortalitatis observationibus petitas determinari

1) Vide Commentationes 335, 403, 473 huius voluminis nec non fragmentum sub finem adiectum. L. G. D.

oportet. Hunc in finem utar tabula, quam olim in Tomo Memor. Berol. pro Anno 1760 inserui[1]), ubi, si praemagnus numerus M infantum simul natorum consideretur, eorum numerum post n annos adhuc superstitum indicavi charactere $(n)M$; ex quo intelligitur talem characterem (n) designare fractiones eo minores, quo maior fuerit annorum numerus n, ac tandem circa 100 annos prorsus in nihilum abire. Tabulam igitur horum valorum pro singulis annis elapsis hic exponamus.

$(1) = 0{,}804$	$(25) = 0{,}552$	$(49) = 0{,}370$	$(73) = 0{,}145$
$(2) = 0{,}768$	$(26) = 0{,}544$	$(50) = 0{,}362$	$(74) = 0{,}135$
$(3) = 0{,}736$	$(27) = 0{,}535$	$(51) = 0{,}354$	$(75) = 0{,}125$
$(4) = 0{,}709$	$(28) = 0{,}525$	$(52) = 0{,}345$	$(76) = 0{,}114$
$(5) = 0{,}688$	$(29) = 0{,}516$	$(53) = 0{,}336$	$(77) = 0{,}104$
$(6) = 0{,}676$	$(30) = 0{,}507$	$(54) = 0{,}327$	$(78) = 0{,}093$
$(7) = 0{,}664$	$(31) = 0{,}499$	$(55) = 0{,}319$	$(79) = 0{,}082$
$(8) = 0{,}653$	$(32) = 0{,}490$	$(56) = 0{,}310$	$(80) = 0{,}072$
$(9) = 0{,}646$	$(33) = 0{,}482$	$(57) = 0{,}301$	$(81) = 0{,}063$
$(10) = 0{,}639$	$(34) = 0{,}475$	$(58) = 0{,}291$	$(82) = 0{,}054$
$(11) = 0{,}633$	$(35) = 0{,}468$	$(59) = 0{,}282$	$(83) = 0{,}046$
$(12) = 0{,}627$	$(36) = 0{,}461$	$(60) = 0{,}273$	$(84) = 0{,}039$
$(13) = 0{,}621$	$(37) = 0{,}454$	$(61) = 0{,}264$	$(85) = 0{,}032$
$(14) = 0{,}616$	$(38) = 0{,}446$	$(62) = 0{,}254$	$(86) = 0{,}026$
$(15) = 0{,}611$	$(39) = 0{,}439$	$(63) = 0{,}245$	$(87) = 0{,}020$
$(16) = 0{,}606$	$(40) = 0{,}432$	$(64) = 0{,}235$	$(88) = 0{,}015$
$(17) = 0{,}601$	$(41) = 0{,}426$	$(65) = 0{,}225$	$(89) = 0{,}011$
$(18) = 0{,}596$	$(42) = 0{,}420$	$(66) = 0{,}215$	$(90) = 0{,}008$
$(19) = 0{,}590$	$(43) = 0{,}413$	$(67) = 0{,}205$	$(91) = 0{,}006$
$(20) = 0{,}584$	$(44) = 0{,}406$	$(68) = 0{,}195$	$(92) = 0{,}004$
$(21) = 0{,}577$	$(45) = 0{,}400$	$(69) = 0{,}185$	$(93) = 0{,}003$
$(22) = 0{,}571$	$(46) = 0{,}393$	$(70) = 0{,}175$	$(94) = 0{,}002$
$(23) = 0{,}565$	$(47) = 0{,}386$	$(71) = 0{,}165$	$(95) = 0{,}001$
$(24) = 0{,}559$	$(48) = 0{,}378$	$(72) = 0{,}155$	

1) Vide Commentationem 334 huius voluminis, imprimis p. 87. L. G. D.

3. Ponamus nunc praesenti tempore aetatem mariti esse $= a$ annorum, uxoris vero $= b$ annorum, et quo ratiocinia instituenda clarius percipi queant, fingamus simul ingentem numerum talium coniugum, qui sit N, eiusdem aetatis adesse, qui pariter suis haeredibus post utriusque mortem summam 1000 Rub. acquirere optent, unde, si summa initio persolvenda statuatur $= x$, aerarium ab his omnibus accipiet summam Nx.

4. Sin autem magis arrideat, ut istud pretium x non statim ab initio totum, sed potius per totam vitam aequaliter distributum solvatur, calculum nostrum ad duplicem solutionem accommodemus, dum altera statim ab initio summa $= x$ in aerarium solvitur, altera autem quotannis insuper quaepiam summa $= z$ solvitur, quamdiu scilicet non solum ambo coniuges, sed etiam alteruter tantum superstites fuerint. Solutione autem hoc modo absoluta si quis voluerit totum pretium statim ab initio persolvere, pro hoc casu poni oportebit $z = 0$ et littera x quaesitum pretium indicabit. Sin autem quis maluerit hoc pretium per totam vitam aequaliter distribui, poni oportebit $x = z$ eritque z summa singulis annis solvenda usque ad mortem utriusque coniugis.

5. His constitutis statim ab initio ab omnibus illis N coniugiis solvetur summa $= Nx$. Nunc videamus, postquam elapsi fuerint n anni, quot coniugia adhuc tam integra quam dissoluta, dum scilicet interea alteruter fuerit mortuus, sint superfutura; tum enim a singulis istis in aerarium solvetur summa $= z$, cuius valor praesens aestimandus est $\frac{z}{\lambda^n}$. Praeterea vero pro quovis anno currente inquirendum est, quot coniugia penitus extinguantur; quoties enim hoc evenit, toties eorum haeredibus praemium illud 1000 Rub. persolvi debet, cuius ergo valor praesens erit $\frac{1000}{\lambda^n}$. Hoc igitur modo calculum nostrum prosequi oportet usque ad extremum vitae humanae terminum, et cum omnes tam expensae quam reditus fuerint ad praesens tempus reducti, eos inter se aequari conveniet, unde pro lubitu sive x sive z determinare licebit.

6. His praemissis incipiamus ab anno primo, cuius initio adesse ponuntur N mariti, omnes eiusdem aetatis $= a$, totidemque uxores eiusdem aetatis $= b$, a quibus aerarium accepit summam $= Nx$. Nunc igitur elapso anno primo secundum tabulam supra allatam numerus maritorum adhuc superstitum

erit $\frac{(a+1)}{(a)}N$ ideoque numerus interea defunctorum $= \frac{(a)-(a+1)}{(a)}N$. Simili modo numerus uxorum adhuc superstitum erit $\frac{(b+1)}{(b)}N$, earum autem, quae interea sunt mortuae, numerus $\frac{(b)-(b+1)}{(b)}N$. Quia igitur quilibet horum maritorum superstitum initio habuit coniugem, instituatur haec proportio: uti numerus omnium uxorum initio se habet ad earum numerum superstitum, ita numerus virorum elapso anno superstitum ad numerum eorum, quorum uxores adhuc erunt superstites; qui ergo numerus erit $\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}N$, a quibus singulis in aerarium solvitur summa $=z$; cuius valor praesens cum sit $\frac{z}{\lambda}$, hinc orietur valor

$$=\frac{(a+1)(b+1)}{(a)(b)}\cdot\frac{Nz}{\lambda}.$$

Tum vero numerus eorum maritorum, qui interea uxores amiserint, erit

$$\frac{(a+1)}{(a)}\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)N;$$

qui cum itidem in aerarium solvant summam z, ea ad initium relata erit

$$\frac{(a+1)}{(a)}\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)\frac{Nz}{\lambda},$$

unde patet hunc valorem cum praecedente coniunctum fore

$$\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{Nz}{\lambda},$$

id quod per se est manifestum, quia quilibet maritus superstes hanc summam z solvere tenetur, sive eius uxor adhuc vivat sive secus.

7. Consideremus nunc etiam eos maritos, qui intra hunc annum erunt mortui, quorum numerus est $\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)N$; ubi duo casus se offerunt. Alter casus eos spectat maritos, quorum uxores adhuc sunt superstites, quorum numerus per superiorem analogiam invenitur: uti se habet numerus omnium uxorum initio viventium ad earum numerum post annum superstitum, ita numerus virorum interea defunctorum ad eorum numerum, quorum uxores adhuc sunt superstites; qui ergo numerus erit

$$\frac{(b+1)}{(b)}\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)N;$$

quae cum singulae etiam in aerarium conferant summam $=z$, eius valor ad initium relatus erit

$$\frac{(b+1)}{(b)}\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\frac{Nz}{\lambda},$$

unde omnes reditus primo anno elapso in aerarium influentes erunt

$$\frac{Nz}{\lambda}\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}\right),$$

quae ergo quantitas tribus constat partibus. Primo scilicet valor $\frac{z}{\lambda}$ multiplicatur per numerum maritorum superstitum, qui est $\frac{(a+1)}{(a)}N$, deinde etiam per numerum uxorum superstitum, qui est $\frac{(b+1)}{(b)}N$. Hinc autem auferri debet numerus coniugiorum adhuc integrorum, quia singula non duo z, sed tantum unum z expendunt.

8. Alter casus eos spectat maritos, quorum uxores non amplius sunt superstites. Ex praecedente autem calculo apparet numerum eorum maritorum mortuorum, quorum uxores interea quoque sunt defunctae, esse

$$\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)N.$$

Tot ergo coniugia penitus sunt extincta, quorum igitur haeredibus ex aerario solvendum erit praemium constitutum 1000 Rub.; quod cum statim persolvi debeat, nullam usuram lucrari interea potuit, unde istae expensae ad initium relatae etiamnunc valebunt

$$1000\,N\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}-\frac{(b+1)}{(b)}+\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}\right).$$

9. Progrediamur nunc ad annum secundum, cuius initio superstites erant mariti $\frac{(a+1)}{(a)}N$, uxores vero $\frac{(b+1)}{(b)}N$, inter quos subsistent adhuc coniugia integra

$$\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}N,$$

soluta vero

$$\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}\right)N,$$

ita ut numerus coniugiorum penitus extinctorum sit

$$N\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}-\frac{(b+1)}{(b)}+\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}\right)$$

sive

$$N\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right).$$

At vero in fine anni secundi numerus maritorum superstitum adhuc erit $\frac{(a+2)}{(a)}N$, numerus vero eorum, qui hoc biennio sunt mortui, $\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)N$. Similique modo numerus uxorum adhuc superstitum erit $\frac{(b+2)}{(b)}N$, earum vero, quae biennio sunt mortuae, $\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)N$, unde numerus coniugiorum hoc biennio extinctorum erit

$$\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)N.$$

Quare cum numerus coniugiorum primo anno extinctorum fuerit

$$\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)N,$$

numerus eorum, quae intra hunc secundum annum sunt extincta, erit

$$\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+2)}{(a)}-\frac{(b+2)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}+\frac{(a+2)}{(a)}\cdot\frac{(b+2)}{(b)}\right)N;$$

pro quibus singulis quia persolvitur summa mille Rub., tota summa ob usuram ad initium relata valebit

$$\frac{1000\,N}{\lambda}\left(\frac{(a+1)-(a+2)}{(a)}+\frac{(b+1)-(b+2)}{(b)}-\frac{(a+1)(b+1)-(a+2)(b+2)}{(a)(b)}\right).$$

10. Quia nunc initio secundi anni numerus coniugiorum tam integrorum quam solutorum erat

$$N\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+1)}{(b)}\right),$$

si hinc auferamus numerum coniugiorum hoc anno extinctorum, remanebit

numerus eorum, qui circa finem secundi anni singuli solvent summam z, quorum ergo numerus erit

$$N\left(\frac{(a+2)}{(a)}+\frac{(b+2)}{(b)}-\frac{(a+2)}{(a)}\cdot\frac{(b+2)}{(b)}\right).$$

Toties igitur ab his summa z in aerarium infertur, unde totus valor ob usuram duorum annorum minutus primo initio valebit

$$\frac{Nz}{\lambda^2}\left(\frac{(a+2)}{(a)}+\frac{(b+2)}{(b)}-\frac{(a+2)}{(a)}\cdot\frac{(b+2)}{(b)}\right).$$

11. His expositis iam ad annum quemcunque sequentem progredi poterimus. Ponamus igitur iam elapsos esse n annos hocque tempore numerus maritorum superstitum erit $\frac{(a+n)}{(a)}N$, ante autem iam defunctorum $\left(1-\frac{(a+n)}{(a)}\right)N$. Eodemque modo numerus uxorum adhuc superstitum est $\frac{(b+n)}{(b)}N$, demortuarum vero $\left(1-\frac{(b+n)}{(b)}\right)N$, unde numerus coniugiorum tam integrorum quam solutorum hoc tempore erit

$$\left(\frac{(a+n)}{(a)}+\frac{(b+n)}{(b)}-\frac{(a+n)}{(a)}\cdot\frac{(b+n)}{(b)}\right)N;$$

at vero numerus coniugiorum toto hoc tempore penitus extinctorum erit

$$\left(1-\frac{(a+n)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+n)}{(b)}\right)N.$$

12. Iam procedamus ad finem istius anni ac simili modo numerus coniugiorum, sive integrorum sive solutorum, nunc erit

$$N\left(\frac{(a+n+1)}{(a)}+\frac{(b+n+1)}{(b)}-\frac{(a+n+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+n+1)}{(b)}\right),$$

a quibus singulis in aerarium persolvitur summa z, cuius valor ad initium translatus est $\frac{z}{\lambda^{n+1}}$, unde tota summa circa finem huius anni in aerarium soluta pro initio valebit

$$\frac{Nz}{\lambda^{n+1}}\left(\frac{(a+n+1)}{(a)}+\frac{(b+n+1)}{(b)}-\frac{(a+n+1)}{(a)}\cdot\frac{(b+n+1)}{(b)}\right).$$

Tum vero numerus omnium coniugiorum ab ipso initio usque ad tempus $n+1$ annorum extinctorum erit

$$N\left(1-\frac{(a+n+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+n+1)}{(b)}\right);$$

quare, cum usque ad initium huius anni iam extincta fuissent

$$N\left(1-\frac{(a+n)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+n)}{(b)}\right)$$

coniugia, numerus eorum, quae hoc demum anno sunt extincta, erit

$$N\left(\frac{(a+n)-(a+n+1)}{(a)}+\frac{(b+n)-(b+n+1)}{(b)}-\frac{(a+n)(b+n)-(a+n+1)(b+n+1)}{(a)(b)}\right).$$

Quoniam igitur pro his singulis expendi debet summa 1000 Rub., valor harum expensarum ad initium relatus erit

$$\frac{1000\,N}{\lambda^n}\left\{\begin{aligned}&\frac{(a+n)-(a+n+1)}{(a)}+\frac{(b+n)-(b+n+1)}{(b)}\\&-\frac{(a+n)(b+n)-(a+n+1)(b+n+1)}{(a)(b)}\end{aligned}\right\}.$$

13. Colligamus nunc omnes tam reditus ex quantitate z oriundos quam expensas ex solutione illorum 1000 Rub. ortas; ac primo quidem omnes reditus, qui praeter summam principalem Nx in aerarium inferuntur, per ternas sequentes series expressi inveniuntur:

$$Nz\left\{\begin{array}{ccccccccc} & \frac{(a+1)}{\lambda(a)} & + & \frac{(a+2)}{\lambda^2(a)} & + & \frac{(a+3)}{\lambda^3(a)} & +\cdots+ & \frac{(a+n)}{\lambda^n(a)} \\ + & \frac{(b+1)}{\lambda(b)} & + & \frac{(b+2)}{\lambda^2(b)} & + & \frac{(b+3)}{\lambda^3(b)} & +\cdots+ & \frac{(b+n)}{\lambda^n(b)} \\ - & \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda(a)(b)} & - & \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2(a)(b)} & - & \frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^3(a)(b)} & -\cdots- & \frac{(a+n)(b+n)}{\lambda^n(a)(b)}\end{array}\right\}.$$

Quodsi ergo brevitatis gratia statuamus

$$P = \frac{(a+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)}{\lambda^2} + \frac{(a+3)}{\lambda^3} + \frac{(a+4)}{\lambda^4} + \cdots + \frac{(95)}{\lambda^{95-a}},$$

$$Q = \frac{(b+1)}{\lambda} + \frac{(b+2)}{\lambda^2} + \frac{(b+3)}{\lambda^3} + \frac{(b+4)}{\lambda^4} + \cdots + \frac{(95)}{\lambda^{95-b}},$$

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2} + \frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^3} + \text{etc.}$$

erit tota summa redituum

$$Nx + Nz\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right).$$

Colligamus simili modo omnes expensas in unam summam, quae summa ex sex sequentibus seriebus erit composita:

$$1000\,N\left\{\begin{array}{cccccccccc}
 & \frac{(a)}{(a)} & + & \frac{(a+1)}{\lambda(a)} & + & \frac{(a+2)}{\lambda^2(a)} & + & \frac{(a+3)}{\lambda^3(a)} & + \text{etc.} \\
- & \frac{(a+1)}{(a)} & - & \frac{(a+2)}{\lambda(a)} & - & \frac{(a+3)}{\lambda^2(a)} & - & \frac{(a+4)}{\lambda^3(a)} & - \text{etc.} \\
+ & \frac{(b)}{(b)} & + & \frac{(b+1)}{\lambda(b)} & + & \frac{(b+2)}{\lambda^2(b)} & + & \frac{(b+3)}{\lambda^3(b)} & + \text{etc.} \\
- & \frac{(b+1)}{(b)} & - & \frac{(b+2)}{\lambda(b)} & - & \frac{(b+3)}{\lambda^2(b)} & - & \frac{(b+4)}{\lambda^3(b)} & - \text{etc.} \\
- & \frac{(a)(b)}{(a)(b)} & - & \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda(a)(b)} & - & \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2(a)(b)} & - & \frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^3(a)(b)} & - \text{etc.} \\
+ & \frac{(a+1)(b+1)}{(a)(b)} & + & \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda(a)(b)} & + & \frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^2(a)(b)} & + & \frac{(a+4)(b+4)}{\lambda^3(a)(b)} & + \text{etc.}
\end{array}\right\}$$

14. Perspicuum est etiam hic summas trium serierum constitutas P, Q, R commode in subsidium vocari posse hincque omnes expensas ad initium relatas expressum iri per sequentem formam

$$1000\,N\left(\frac{(a)+P}{(a)} - \frac{\lambda P}{(a)} + \frac{(b)+Q}{(b)} - \frac{\lambda Q}{(b)} - \frac{(a)(b)+R}{(a)(b)} + \frac{\lambda R}{(a)(b)}\right)$$

seu

$$1000\,N\left(1+\frac{(1-\lambda)P}{(a)}+\frac{(1-\lambda)Q}{(b)}+\frac{(\lambda-1)R}{(a)(b)}\right);$$

consequenter aequatio pro solutione quaestionis propositae erit

$$x+z\left(\frac{P}{(a)}+\frac{Q}{(b)}-\frac{R}{(a)(b)}\right)=1000\left(1+\frac{(1-\lambda)P}{(a)}+\frac{(1-\lambda)Q}{(b)}+\frac{(\lambda-1)R}{(a)(b)}\right).$$

15. Cum iam sit

$$\lambda=\frac{105}{100},$$

erit

$$\lambda-1=\frac{5}{100}\quad\text{et}\quad 1000(\lambda-1)=50,$$

unde nostra aequatio erit

$$x+z\left(\frac{P}{(a)}+\frac{Q}{(b)}-\frac{R}{(a)(b)}\right)=1000-\frac{50P}{(a)}-\frac{50Q}{(b)}+\frac{50R}{(a)(b)}.$$

Quamobrem si totum pretium statim ab initio persolvi debeat, ita ut sit $z=0$, erit hoc pretium

$$x=1000-\frac{50P}{(a)}-\frac{50Q}{(b)}+\frac{50R}{(a)(b)}.$$

Sin autem velimus, ut pretium per totum temporis intervallum usque ad mortem utriusque coniugis aequaliter distribuatur, poni debet $x=z$ atque contributio annua prodibit sequens

$$z=\frac{1000-\frac{50P}{(a)}-\frac{50Q}{(b)}+\frac{50R}{(a)(b)}}{1+\frac{P}{(a)}+\frac{Q}{(b)}-\frac{R}{(a)(b)}}$$

sicque totum negotium huc redit, ut pro qualibet aetate utriusque coniugis valores ternarum serierum litteris P, Q, R insignitarum investigentur, quos ergo in sequentibus evolvamus.

EVOLUTIO VALORUM P ET Q

16. Quoniam series Q simili modo ex aetate b definitur, quo series P ex aetate a erui debet, sufficiet alterutram tantum pro singulis aetatibus evolvisse. Cum igitur sit

$$P = \frac{(a+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)}{\lambda^2} + \frac{(a+3)}{\lambda^3} + \cdots + \frac{(95)}{\lambda^{95-a}},$$

si omnes termini huius seriei ad eandem denominationem λ^{95-a} reducantur atque ordine retrogrado disponantur, fiet

$$P = \frac{1}{\lambda^{95-a}}\left((95) + (94)\lambda + (93)\lambda^2 + (92)\lambda^3 + \cdots + (a+1)\lambda^{94-a}\right).$$

17. Evolutio autem huius seriei non parum foret taediosa, si per singulos annos eam absolvere vellemus. Quia autem valores characterum (a) et (b) non adeo sunt certi, ut non aliquam aberrationem agnoscere debeamus, sufficiet quinos terminos se insequentes invicem coniungere eorumque summam quintuplo termini medii aequalem statuere, ita ut pro quinis prioribus terminis scribi queat $5(93)\lambda^2$, quo facto valor nostrae litterae P erit

$$P = \frac{5}{\lambda^{95-a}}\left((93)\lambda^2 + (88)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)\lambda^{92-a}\right);$$

quare si hanc seriem littera p designemus, ut sit

$$p = (93)\lambda^2 + (88)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)\lambda^{92-a},$$

invento valore litterae p erit

$$P = \frac{5p}{\lambda^{95-a}}$$

hincque

$$\frac{P}{(a)} = \frac{5p}{(a)\lambda^{95-a}}.$$

Eodem modo, si ponatur

$$q = (93)\lambda^2 + (88)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} + \cdots + (b+3)\lambda^{92-b},$$

habebitur

$$Q = \frac{5q}{\lambda^{95-b}}$$

et

$$\frac{Q}{(b)} = \frac{5q}{(b)\,\lambda^{95-b}}.$$

EVOLUTIO TERTII VALORIS R

18. Series, quam littera R designavimus, erat haec

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda\lambda} + \cdots + \frac{(a+n)(b+n)}{\lambda^n} + \cdots,$$

quam seriem eo usque continuari oportet, donec termini sequentes evanescant, quod fit, si alteruter numerorum $(a+n)$ vel $(b+n)$ superet 95, unde, statim ac maior horum duorum numerorum ad istum terminum exsurgit, series hic terminata est censenda.

19. Quia autem ambo numeri a et b in nostrum calculum aequaliter ingrediuntur neque ullum discrimen inde nascitur, etiamsi hae duae litterae inter se permutentur, ita ut a denotet aetatem uxoris et b aetatem mariti, assumere poterimus aetatem a semper esse maiorem quam b; si enim uxor natu maior fuerit quam maritus, tum a designabit aetatem uxoris, at b mariti. Quare cum aetatem b tanquam minorem spectemus, discrimen littera d designemus, ita ut sit $b = a - d$, ubi quidem differentia d nulla erit, si ambo coniuges eandem habuerint aetatem.

20. Hoc observato ultimus nostrae seriei terminus ibi erit, ubi fit $a + n = 95$ ideoque $n = 95 - a$, ita ut iam nostra series futura sit

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2} + \cdots + \frac{(95)(b+95-a)}{\lambda^{95-a}},$$

ubi ergo ultimus terminus est $\frac{(95)(95-d)}{\lambda^{95-a}}$. Reducamus nunc, ut ante, omnes has fractiones ad eandem denominationem λ^{95-a} ac totam seriem ordine retrogrado disponamus reperiemusque

$$R = \frac{1}{\lambda^{95-a}} \left\{ \begin{array}{l} (95)(95-d) + (94)(94-d)\lambda + (93)(93-d)\lambda^2 \\ + (92)(92-d)\lambda^3 + \cdots + (a+1)(a+1-d)\lambda^{94-a} \end{array} \right\},$$

cuius ergo seriei summam pro singulis valoribus amborum numerorum a et d computari oportet.

21. Quo autem iste calculus facilior reddatur, iterum quinos terminos, ut ante fecimus, in unum contrahamus, dum scilicet eorum summam quintuplo medii inter eos aequalem aestimabimus, quo facto habebimus

$$R = \frac{5}{\lambda^{95-a}} \big((93)(93-d)\lambda^2 + (88)(88-d)\lambda^7 + \cdots + (a+3)(a+3-d)\lambda^{92-a}\big).$$

Quodsi ergo ponamus

$$r = (93)(93-d)\lambda^2 + (88)(88-d)\lambda^7 + \cdots + (a+3)(a+3-d)\lambda^{92-a},$$

invento valore huius seriei r erit ipse valor, quem quaerimus,

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}};$$

et quoniam pro nostro calculo indigemus valore $\frac{R}{(a)(b)}$, erit

$$\frac{R}{(a)(b)} = \frac{5r}{(a)(b)\lambda^{95-a}}$$

hisque valoribus pro singulis casibus inventis aequatio nostra generalis erit

$$x + z\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right) = 1000 - \frac{50P}{(a)} - \frac{50Q}{(b)} + \frac{50R}{(a)(b)}.$$

22. Quoniam hic duo numeri occurrunt, a et d, iste calculus multo maiorem laborem postulat quam praecedens pro seriebus P et Q; quem ut sublevemus, ambos numeros a et d per quinarium vel crescere vel decrescere assumemus; hanc ob rem plures casus evolvi oportebit pro variis valoribus differentiae d, quam successive statuemus 0, 5, 10, 15, 20 etc. Unde hos casus sequenti modo ordine referamus.

CASUS I
QUO $d = 0$ IDEOQUE $b = a$

Hic ergo erit

$$r = (93)^2\lambda^2 + (88)^2\lambda^7 + (83)^2\lambda^{12} + \cdots + (a+3)^2\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)^2} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)^2}.$$

CASUS II
QUO $d = 5$ IDEOQUE $b = a - 5$

Tum ergo erit

$$r = (93)(88)\lambda^2 + (88)(83)\lambda^7 + (83)(78)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)(a-2)\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)(a-5)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-5)}.$$

CASUS III
QUO $d = 10$ IDEOQUE $b = a - 10$

Hic ergo erit

$$r = (93)(83)\lambda^2 + (88)(78)\lambda^7 + (83)(73)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)(a-7)\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)(a-10)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-10)}.$$

CASUS IV
QUO $d = 15$ IDEOQUE $b = a - 15$

Hoc casu erit

$$r = (93)(78)\lambda^2 + (88)(73)\lambda^7 + (83)(68)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)(a-12)\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)(a-15)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-15)}.$$

CASUS V
QUO $d = 20$ IDEOQUE $b = a - 20$

Tum ergo erit

$$r = (93)(73)\lambda^2 + (88)(68)\lambda^7 + (83)(63)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)(a-17)\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)(a-20)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-20)}.$$

CASUS VI
QUO $d = 25$ IDEOQUE $b = a - 25$

Hoc casu erit

$$r = (93)(68)\lambda^2 + (88)(63)\lambda^7 + (83)(58)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)(a-22)\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)(a-25)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-25)}.$$

CASUS VII
QUO $d = 30$ IDEOQUE $b = a - 30$

Tum ergo erit

$$r = (93)(63)\lambda^2 + (88)(58)\lambda^7 + (83)(53)\lambda^{12} + \cdots + (a+3)(a-27)\lambda^{92-a},$$

unde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{(a)(a-30)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-30)}.$$

SOLUTIO QUARUNDAM QUAESTIONUM DIFFICILIORUM IN CALCULO PROBABILIUM[1]

Commentatio 600 indicis ENESTROEMIANI
Opuscula analytica **2**, 1785, p. 331—346

1. His quaestionibus occasionem dedit ludus passim publice institutus, quo ex nonaginta schedulis, numeris 1, 2, 3, 4, . . . 90 signatis, statis temporibus quinae schedulae sorte extrahi solent. Hinc ergo huiusmodi quaestiones oriuntur: quanta scilicet sit probabilitas, ut, postquam datus extractionum numerus fuerit peractus, vel omnes nonaginta numeri exierint vel saltem 89 vel 88 vel pauciores. Has igitur quaestiones, utpote difficillimas, hic ex principiis calculi probabilium iam pridem usu receptis resolvere constitui. Neque me deterrent obiectiones Illustris D'ALEMBERT[2]), qui hunc calculum suspectum reddere est conatus. Postquam enim summus Geometra studiis mathematicis valedixit, iis etiam bellum indixisse videtur, dum pleraque fundamenta solidissime stabilita evertere est aggressus. Quamvis enim hae obiectiones apud ignaros maximi ponderis esse debeant, haud tamen metuendum est inde ipsi scientiae ullum detrimentum allatum iri.

---

1) Vide Commentationes 338 et 812 huius voluminis nec non illas litteras duas nota 1 p. 113 laudatas. L. G. D.

2) J. L. D'ALEMBERT (1717—1783), *Réflexions sur le calcul des probabilités. Opuscules mathém.*, Paris, t. II (1761), p. 1—25; t. IV (1768), p. 73—79, 283—310; t. VII (1780), p. 39—60, 384—386. *Doutes et questions sur le calcul des probabilités.* Mélanges de litt., d'hist. et de philos., Amsterdam, t. V (1773), p. 273—304. Confer etiam articulos *Croix ou pile* et *Gageure*, qui continentur in *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, publié par M. DIDEROT et M. D'ALEMBERT, Paris 1751—1769. Ceterum vide M. CANTOR (1829—1920), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, III, 2. Aufl. (1901), p. 639; IV (1908), p. 222—229. L. G. D.

2. Qui in huiusmodi investigationibus elaborarunt, facile perspicient resolutionem harum quaestionum calculos maxime intricatos postulare, quos autem mihi beneficio certorum characterum, quibus iam aliquoties[1]) optimo successu sum usus, superare licuit. Huiusmodi scilicet character

$$\left(\frac{p}{q}\right),$$

quo fractio uncinulis inclusa repraesentatur, mihi denotat istud productum

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{p-3}{4}\cdots\frac{p-q+1}{q},$$

cuius ergo valor quovis casu facile exhiberi potest. Circa hunc characterem autem sequentia notasse iuvabit.

1°. Semper est

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{p-q}\right).$$

2°. Si $q=0$, semper est

$$\left(\frac{p}{0}\right)=1.$$

3°. Si q sit vel numerus negativus vel maior quam p, valor ipsius $\left(\frac{p}{q}\right)$ semper est $=0$.

4°. Deinde si p numerus negativus, tum istam formulam

$$\left(\frac{-p}{q}\right)$$

1) Vide Commentationes 521, 575, 584 (indicis Enestroemiani): *Theorèmes analytiques. Extraits de différentes lettres de M. Euler à M. le marquis de Condorcet,* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris (1778), 1781, p. 603—614, *De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt*, Acta acad. sc. Petrop. (1781: I), 1784, p. 74—111, *De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis,* Acta acad. sc. Petrop. (1781: II), 1785, p. 76—89; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 18 (Comm. 521) et 15 (Comm. 575 et 584). Iisdem characteribus Eulerus usus est etiam in posterioribus Commentationibus 663, 726, 768. Ceterum notandum est singulas editiones principes in designandi modo inter se differre: in alteris Commentationibus (575, 584, 600) unci quadrati, in alteris (521, 663, 726, 768) unci rotundi adhibentur. L. G. D.

reducere licet ad hanc

$$\pm\left(\frac{p+q-1}{q}\right),$$

ubi signum $+$ valet, si q numerus par, $-$ vero, si impar; unde patet istam formam etiam in hanc mutari posse $\pm\left(\frac{p+q-1}{p-1}\right)$.

3. His praemissis quaestiones ex ludo memorato natas generalissime sum tractaturus. Numerum scilicet schedularum denotabo littera m, quas singulas litteris diversis a, b, c, d etc. signatas assumo, ne usus numerorum absolutorum confusionem pariat. Deinde quovis tractu ex his schedulis i schedulas extrahi supponam, unde numerus omnium variationum, quae in his tractibus contingere possunt, erit $=\left(\frac{m}{i}\right)$. Praeterea si numerus tractuum successive institutorum fuerit $=n$, ex principiis combinationum patet numerum omnium variationum, quae contingere queant, esse $\left(\frac{m}{i}\right)^n$. Hoc ergo modo sequentia problemata percurram.

PROBLEMA 1

Si numerus schedularum litteris a, b, c, d etc. signatarum sit m indeque quolibet tractu extrahantur i schedulae atque iam numerus tractuum peractorum fuerit $=n$, quaeritur, quanta sit probabilitas, ut omnes m litterae a, b, c, d etc. exierint.

SOLUTIO

4. Hic primo observandum est, quoniam in n tractibus numerus schedularum extractarum est in, omnes litteras exire non posse, nisi fuerit $in > m$ ideoque

$$n > \frac{m}{i}$$

vel saltem non minus. Denotet iam Δ numerum omnium variationum, quae in his n tractibus evenire possunt, eritque, ut iam indicavimus,

$$\Delta=\left(\frac{m}{i}\right)^n;$$

qui cum sit numerus omnium casuum possibilium, pro nostra quaestione hinc omnes casus excludi debent, qui pauciores quam m litteras continent.

Primo ergo, si numerus litterarum tantum esset $= m-1$, quod m modis fieri potest, numerus casuum, qui tantum $m-1$ litteras vel pauciores continent, erit

$$m\left(\frac{m-1}{i}\right)^n,$$

quem numerum ponamus $= A$.

Simili modo, si binae litterae excludantur, quod $\left(\frac{m}{2}\right)$ modis fieri potest, numerus casuum tantum $m-2$ vel pauciores litteras continentium erit

$$\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\left(\frac{m-2}{i}\right)^n,$$

quem numerum littera B indicemus.

Porro sit C numerus omnium casuum, qui tantum $m-3$ litteras vel pauciores continent, eritque

$$C=\left(\frac{m}{3}\right)\cdot\left(\frac{m-3}{i}\right)^n.$$

Eodemque modo fit

$$D=\left(\frac{m}{4}\right)\cdot\left(\frac{m-4}{i}\right)^n,\quad E=\left(\frac{m}{5}\right)\cdot\left(\frac{m-5}{i}\right)^n \text{ etc.}$$

Atque his elementis constitutis inveni numerum omnium casuum, qui omnes m litteras contineant, esse

$$\varDelta - A + B - C + D - \text{etc.},$$

quem numerum indicemus littera Σ.

5. Evidens est hunc numerum Σ per solam theoriam combinationum determinari posse ideoque nulli prorsus dubio esse obnoxium, ita ut tanquam veritas geometrica spectari possit. Hinc autem secundum principia probabilium numerus casuum favorabilium per numerum omnium casuum possibilium divisus praebebit probabilitatem quaesitam; quae ergo si ponatur $= \Pi$, erit

$$\Pi = \frac{\Sigma}{\varDelta}.$$

Quare cum sit

$$\Sigma = \Delta - A + B - C + D - \text{etc.},$$

pro litteris Δ, A, B, C etc. valores assignatos substituendo erit

$$\Sigma = \left(\frac{m}{i}\right)^n - \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i}\right)^n + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i}\right)^n - \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i}\right)^n + \text{etc.}$$

Haec forma per $\left(\frac{m}{i}\right)^n$ divisa dabit probabilitatem, quod post n tractus omnes m litterae exierint, unde necessario ista expressio Σ semper nihilo aequalis esse debet, quoties fuerit $n < \frac{m}{i}$, quod etiam calculum pro casibus simplicioribus instituenti revera evenire patebit. Veluti si fuerit $m = 7$, $n = 3$, $i = 2$, erit

$$\left(\frac{m}{i}\right)^n = \qquad 21^3 = 9261,$$

$$\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{m-1}{i}\right)^n = 7 \cdot 15^3 = 23625,$$

$$\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i}\right)^n = 21 \cdot 10^3 = 21000,$$

$$\left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i}\right)^n = 35 \cdot 6^3 = 7560,$$

$$\left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{m-4}{i}\right)^n = 35 \cdot 3^3 = 945,$$

$$\left(\frac{m}{5}\right)\left(\frac{m-5}{i}\right)^n = 21 \cdot 1^3 = 21,$$

$$\left(\frac{m}{6}\right)\left(\frac{m-6}{i}\right)^n = 0,$$

unde prodit $\Sigma = 0$.

6. Dummodo ergo n non sit minus quam $\frac{m}{i}$, semper erit $\Sigma = 0$; at si fuerit $n = \frac{m}{i}$ sive

$$m = in,$$

hic casus maxime est memorabilis; tum enim formula nostra pro Σ inventa reduci potest ad productum ex meris factoribus constans. Erit enim

$$\Sigma = \left(\frac{m}{i}\right)\left(\frac{m-i}{i}\right)\left(\frac{m-2i}{i}\right)\left(\frac{m-3i}{i}\right)\cdots\left(\frac{i}{i}\right);$$

quod ut exemplo illustremus, sumamus, ut ante, $n = 3$ et $i = 2$, sit vero $m = 6$; atque forma prior pro Σ data praebet $\Sigma = 90$, altera vero dat $\Sigma = 15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$.

7. Quanquam autem hae formulae, si pro n maiores numeri accipiantur, valde fiunt prolixae, tamen per logarithmos haud difficile erit quovis casu valorem probabilitatis Π assignare. Cum enim sit

$$\frac{A}{\Delta} = m \cdot \frac{(m-i)^n}{m^n},$$

$$\frac{B}{A} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{(m-1-i)^n}{(m-1)^n},$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m-2}{3} \cdot \frac{(m-2-i)^n}{(m-2)^n}$$

etc.,

hinc sumptis logarithmis erit

$$l\frac{A}{\Delta} = lm - nl\frac{m}{m-i},$$

$$l\frac{B}{A} = l\frac{m-1}{2} - nl\frac{m-1}{m-1-i},$$

$$l\frac{C}{B} = l\frac{m-2}{3} - nl\frac{m-2}{m-2-i}$$

etc.,

ex quibus colligitur

$$l\frac{A}{\Delta} = lm - nl\frac{m}{m-i},$$

$$l\frac{B}{\Delta} = l\frac{A}{\Delta} + l\frac{m-1}{2} - nl\frac{m-1}{m-1-i},$$

$$l\frac{C}{\Delta} = l\frac{B}{\Delta} + l\frac{m-2}{3} - nl\frac{m-2}{m-2-i}$$

etc.

Unde ergo facile inveniuntur valores $\frac{A}{\Delta}$, $\frac{B}{\Delta}$, $\frac{C}{\Delta}$ etc., quibus inventis probabilitas quaesita erit

$$\Pi = 1 - \frac{A}{\Delta} + \frac{B}{\Delta} - \frac{C}{\Delta} + \frac{D}{\Delta} - \text{etc.}$$

8. Applicemus haec ad casum ludi initio memorati, quo est $m = 90$ et $i = 5$, eritque, ut sequitur:

$$l\frac{A}{\varDelta} = l\,90 - nl\frac{90}{85} = 1{,}9542425 - n \cdot 0{,}0248236,$$

$$l\frac{B}{\varDelta} = l\frac{A}{\varDelta} + l\frac{89}{2} - nl\frac{89}{84} = l\frac{A}{\varDelta} + 1{,}6483600 - n \cdot 0{,}0251107,^{1)}$$

$$l\frac{C}{\varDelta} = l\frac{B}{\varDelta} + l\frac{88}{3} - nl\frac{88}{83} = l\frac{B}{\varDelta} + 1{,}4673614 - n \cdot 0{,}0254046,$$

$$l\frac{D}{\varDelta} = l\frac{C}{\varDelta} + l\frac{87}{4} - nl\frac{87}{82} = l\frac{C}{\varDelta} + 1{,}3374593 - n \cdot 0{,}0257054,$$

$$l\frac{E}{\varDelta} = l\frac{D}{\varDelta} + l\frac{86}{5} - nl\frac{86}{81} = l\frac{D}{\varDelta} + 1{,}2355285 - n \cdot 0{,}0260135,^{1)}$$

$$l\frac{F}{\varDelta} = l\frac{E}{\varDelta} + l\frac{85}{6} - nl\frac{85}{80} = l\frac{E}{\varDelta} + 1{,}1512676 - n \cdot 0{,}0263289,$$

$$l\frac{G}{\varDelta} = l\frac{F}{\varDelta} + l\frac{84}{7} - nl\frac{84}{79} = l\frac{F}{\varDelta} + 1{,}0791813 - n \cdot 0{,}0266522$$

etc.

9. Perspicuum hic est, quo maior accipiatur numerus tractuum n, eo promptius istam progressionem convergere, ita ut, si n denotet numerum vehementer magnum, semper proxime proditurum sit $\Pi = 1$; tum scilicet maxime erit probabile omnes prorsus m numeros exiisse. Contra autem, si numerus n parum superet minimum valorem $\frac{m}{i} = 18$, evolutio horum terminorum maxime fiet operosa, cum pluribus terminis sit opus, antequam ad evanescentes perveniatur.

Sumamus $n = 100$, ut huic quaestioni respondeamus, quanta sit probabilitas, ut post centum tractus omnes nonaginta numeri exierint. Hic ergo erit

1) Editio princeps: $l\frac{A}{\varDelta} + 1{,}6483600 - n \cdot 0{,}0250107$ et $l\frac{D}{\varDelta} + 1{,}2355283 - n \cdot 0{,}0260133$. Itaque etiam valores in sequentibus paragraphis erant corrigendi. L. G. D.

$$l\frac{A}{\varDelta} = 9{,}47188, \quad \text{ergo} \quad \frac{A}{\varDelta} = 0{,}2964,$$

$$l\frac{B}{\varDelta} = 8{,}60917, \quad \text{ergo} \quad \frac{B}{\varDelta} = 0{,}0407,$$

$$l\frac{C}{\varDelta} = 7{,}53607, \quad \text{ergo} \quad \frac{C}{\varDelta} = 0{,}0034,$$

$$l\frac{D}{\varDelta} = 6{,}30299, \quad \text{ergo} \quad \frac{D}{\varDelta} = 0{,}0002,$$

$$l\frac{E}{\varDelta} = 4{,}93719, \quad \text{ergo} \quad \frac{E}{\varDelta} = 0{,}0000,$$

ergo

$$\Pi = 0{,}7411.$$

10. Sit $n = 200$ et pro hoc casu erit

$$l\frac{A}{\varDelta} = 6{,}98952, \quad \text{ergo} \quad \frac{A}{\varDelta} = 0{,}00098,\text{[1]}$$

$$l\frac{B}{\varDelta} = 3{,}61574, \quad \text{ergo} \quad \frac{B}{\varDelta} = 0{,}00000,$$

unde colligitur probabilitas, quod post 200 extractiones omnes numeri exierint,

$$\Pi = 0{,}99902,\text{[1]}$$

quae probabilitas certitudini omnes exiisse valde est propinqua.

PROBLEMA 2

Positis, quae in problemate praecedente sunt constituta, quaeritur, quanta futura sit probabilitas, ut saltem $m-1$ litterae post n tractus exierint.

SOLUTIO

11. Hic ergo numerus tractuum omnes m litteras continentium non excluditur, unde patet tractuum numerum nostro praesenti casu fore maiorem. Calculo autem subducto, si numerus horum casuum ponatur Σ', inveni fore

1) Editio princeps: $\frac{A}{\varDelta} = 0{,}00097$ et $\Pi = 0{,}99903$. Correxit L. G. D.

$$\Sigma' = \Delta - B + 2C - 3D + 4E - 5F + \text{etc.},$$

unde probabilitas, quod post n tractus saltem $m-1$ litterae exierint, erit

$$\Pi' = \frac{\Sigma'}{\Delta}$$

ideoque

$$\Pi' = 1 - \frac{B}{\Delta} + 2\frac{C}{\Delta} - 3\frac{D}{\Delta} + 4\frac{E}{\Delta} - \text{etc.}$$

12. Hoc ergo casu erit

$$\Sigma' = \left(\frac{m}{i}\right)^n - \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i}\right)^n + 2\left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i}\right)^n - 3\left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{m-4}{i}\right)^n + 4\left(\frac{m}{5}\right)\left(\frac{m-5}{i}\right)^n - \text{etc.},$$

unde, si applicatio fiat ad ludum memoratum, cum litterae Δ, A, B, C, D etc. eosdem retineant valores, calculus per logarithmos institutus ex inventis valoribus $\frac{B}{\Delta}$, $\frac{C}{\Delta}$, $\frac{D}{\Delta}$ etc. facile perficietur. Ita, si post 100 tractus requiratur probabilitas, quod saltem 89 numeri exierint, ob

$$\frac{B}{\Delta} = 0{,}0407, \quad \frac{C}{\Delta} = 0{,}0034, \quad \frac{D}{\Delta} = 0{,}0002$$

erit ista probabilitas

$$\Pi' = 0{,}9655.$$

Unde sequitur probabilitatem, quod tantum pauciores numeri exierint, fore 0,0345.

PROBLEMA 3

Iisdem positis, ut hactenus, quaeritur, quanta sit probabilitas, ut saltem $m-2$ litterae post n tractus fuerint extractae.

SOLUTIO

13. Numerus omnium casuum, qui saltem $m-2$ litteras contineant, per litteras ante stabilitas Δ, A, B, C, D etc. ita definitur, ut sit

$$\Sigma'' = \Delta - C + 3D - 6E + 10F - \text{etc.},$$

quae expressio restitutis valoribus hoc modo se habet

$$\Sigma'' = \left(\frac{m}{i}\right)^n - \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{m-4}{i}\right)^n - \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{m}{5}\right)\left(\frac{m-5}{i}\right)^n + \text{etc.},$$

atque hinc probabilitas erit

$$\Pi = 1 - \frac{C}{\varDelta} + 3\frac{D}{\varDelta} - 6\frac{E}{\varDelta} + 10\frac{F}{\varDelta} - \text{etc.}$$

Pro ludo igitur ante memorato si quaeratur probabilitas, ut post 100 tractus saltem 88 numeri exierint, ea reperietur

$$\Pi'' = 0{,}9972,$$

unde probabilitas, quod contrarium evenit, erit $= 0{,}0028$.

PROBLEMA GENERALE

Iisdem positis, ut ante, quaeritur, quanta sit probabilitas, ut post n tractus saltem $m - \lambda$ litterae exierint.

SOLUTIO

14. Numerus casuum ad minimum tot litteras continentium per nostros characteres ita commode exprimitur, ut sit

$$\left(\frac{m}{i}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{\lambda+1}\right)\left(\frac{m-\lambda-1}{i}\right)^n + \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{\lambda+2}\right)\left(\frac{m-\lambda-2}{i}\right)^n$$
$$- \left(\frac{\lambda+2}{\lambda}\right)\left(\frac{m}{\lambda+3}\right)\left(\frac{m-\lambda-3}{i}\right)^n + \text{etc.},$$

quae formula per terminum primum $\left(\frac{m}{i}\right)^n$ divisa praebebit probabilitatem quaesitam.

15. In his probabilitatibus aestimandis utique assumitur omnes litteras ad extrahendum aeque esse proclives, quod autem Ill. D'ALEMBERT negat assumi posse. Arbitratur enim simul ad omnes tractus iam ante peractos

respici oportere; si enim quaepiam litterae nimis crebro fuerint extractae, tum eas in sequentibus tractibus rarius exituras; contrarium vero evenire, si quaepiam litterae nimis raro exierint. Haec ratio si valeret, etiam valitura esset, si sequentes tractus demum post annum vel adeo integrum saeculum, quin etiam si in alio quocunque loco instituerentur; atque ob eandem rationem etiam ratio haberi deberet omnium tractuum, qui iam olim in quibuscunque terrae locis fuerint peracti, quo certe vix quicquam absurdius excogitari potest.

DEMONSTRATIO SOLUTIONUM PRAECEDENTIUM

16. Cum numerus omnium litterarum a, b, c, d etc., quibus singulas schedulas signatas assumimus, sit $= m$, hunc litterarum complexum vocabo systema principale, unde alia systemata derivata, quae pauciores litteras contineant, formari conveniet, quae ita in ordines dispesco, ut ordo primus complectatur omnia systemata, quae tantum $m-1$ litteras contineant, quorum ergo numerus erit

$$= m.$$

Ad ordinem vero secundum referam omnia systemata, in quibus litterarum numerus est $m-2$, quorum numerus erit

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} = \left(\frac{m}{2}\right).$$

Ordo autem tertius habebit omnia systemata, ubi numerus litterarum est $m-3$, quorum numerus est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} = \left(\frac{m}{3}\right).$$

Eodem modo numerus systematum quarti ordinis tantum $m-4$ litteras continentium erit

$$\left(\frac{m}{4}\right);$$

quinti autem ordinis, ubi tantum $m-5$ litterae insunt, numerus systematum erit

$$\left(\frac{m}{5}\right)$$

17. Quae quo fiant clariora, systema principale his sex litteris

$$a\ b\ c\ d\ e\ f$$

constans contemplemur, ex quo ergo sequentia derivata cuiusque ordinis resultabunt, quae hac tabula exhibemus:

I.	II.	III.	IV.	V.
$abcde$	$abcd$	abc	ab	a
$abcdf$	$abce$	abd	ac	b
$abcef$	$abcf$	abe	ad	c
$abdef$	$abde$	abf	ae	d
$acdef$	$abdf$	acd	af	e
$bcdef$	$abef$	ace	bc	f
	$acde$	acf	bd	
	$acdf$	ade	be	
	$acef$	adf	bf	
	$adef$	aef	cd	
	$bcde$	bcd	ce	
	$bcdf$	bce	cf	
	$bcef$	bcf	de	
	$bdef$	bde	df	
	$cdef$	bdf	ef	
		bef		
		cde		
		cdf		
		cef		
		def		

ubi ergo numerus systematum ordinis primi est $6 = \left(\frac{6}{1}\right)$, ordinis secundi $15 = \left(\frac{6}{2}\right)$, ordinis tertii $20 = \left(\frac{6}{3}\right)$, quarti $= 15 = \left(\frac{6}{4}\right)$, quinti $= 6 = \left(\frac{6}{5}\right)$.

18. Nunc evidens est singula systemata cuiusque ordinis inferioris in omnibus superioribus contineri, quod quoties eveniat plurimum interest ob-

servasse. Ita pro casu $m = 6$ systema primi ordinis *abcde* in ordine hoc semel occurrit. At systema secundi ordinis *abcd* in primo ordine bis, in secundo semel occurrit. Deinde systema tertii ordinis *abc* in primo ordine ter, in secundo ter, at in tertio semel reperitur. Systema quarti ordinis *ab* in primo ordine quater, in secundo sexies, in tertio quater, in quarto semel inest. Denique systema quinti ordinis in primo ordine quinquies occurrit, in secundo decies, in tertio decies, in quarto quinquies, in quinto semel. Ex quo manifestum est hos numeros convenire cum coëfficientibus binomii ad potestates elevati, siquidem omnia systemata in ipso principali semel continentur.

19. Hinc ergo in genere pro quovis systemate cuiuspiam ordinis inferioris facile assignari potest, quot modis in quolibet ordine superiore occurrat, id quod sequens tabula manifesto declarabit, ubi systema principale littera *O*, systemata autem primi, secundi, tertii, quarti etc. ordinis notis romanis I, II, III, IV, V, VI etc. denotabo.

	O	I	II	III	IV	V	VI
m	1						
$m-1$	1	1					
$m-2$	1	2	1				
$m-3$	1	3	3	1			
$m-4$	1	4	6	4	1		
$m-5$	1	5	10	10	5	1	
$m-6$	1	6	15	20	15	6	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-\lambda$	$\left(\frac{\lambda}{0}\right)$	$\left(\frac{\lambda}{1}\right)$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)$	$\left(\frac{\lambda}{3}\right)$	$\left(\frac{\lambda}{4}\right)$	$\left(\frac{\lambda}{5}\right)$	$\left(\frac{\lambda}{6}\right)$

20. Consideremus nunc numerum schedularum, quae quovis tractu tam ex systemate principali actu extrahuntur, quam ex systematibus derivatis extrahi concipi possunt, quae quidem ex principali facillime deduci poterunt. Quodsi quovis tractu unica littera extrahatur, pro systemate principali numerus tractuum diversorum erit

$$= \left(\frac{m}{1}\right);$$

sin autem binae litterae simul extrahantur, numerus omnium tractuum diversorum erit

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}=\binom{m}{2}.$$

Si ternae litterae quovis tractu extrahantur, numerus tractuum diversorum erit

$$\binom{m}{3}$$

atque in genere, si i litterae quovis tractu extrahantur, numerus omnium tractuum diversorum erit

$$\binom{m}{i}.$$

Sin autem tales extractiones etiam ex systematibus derivatis fieri concipiantur, pro quolibet systemate ordinis primi numerus tractuum diversorum erit $\binom{m-1}{i}$, ordinis secundi $\binom{m-2}{i}$, ordinis tertii $\binom{m-3}{i}$ et ita porro.

21. Quodsi iam hae extractiones bis repetantur, quoniam pro systemate principali quemlibet tractum non solum reliquae omnes sequi possunt, sed etiam ipsae, numerus diversorum casuum erit $\binom{m}{i}^2$. Si tres extractiones successive instituantur, omnium casuum numerus erit $\binom{m}{i}^3$; atque in genere, si n extractiones sibi succedant, numerus omnium casuum possibilium erit $\binom{m}{i}^n$, quem numerum littera $\varDelta$ supra designavimus, ita ut sit

$$\varDelta=\binom{m}{i}^n.$$

22. Simili modo numerus omnium casuum, qui in quolibet systemate primi ordinis locum habere possunt, est $\binom{m-1}{i}^n$; quare cum horum systematum numerus sit $\binom{m}{i}$, numerus omnium casuum, quem primus ordo praebet, erit $\binom{m}{1}\binom{m-1}{i}^n$ quemque littera A designemus, ita ut sit

$$A=\binom{m}{1}\binom{m-1}{i}^n.$$

Eodem modo facile intelligitur numerum omnium casuum, qui ex singulis systematibus oriri possunt, esse pro ordine secundo

$$B = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m-2}{i}\right)^n,$$

pro ordine tertio

$$C = \left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{m-3}{i}\right)^n,$$

pro ordine quarto

$$D = \left(\frac{m}{4}\right)\left(\frac{m-4}{i}\right)^n$$

et ita porro. His iam praemissis solutiones singulorum problematum praecedentium facile expedire licebit.

PRO PROBLEMATE PRIMO

23. Cum in hoc problemate ex omnibus casibus possibilibus, quorum numerus est $\varDelta$, ii enumerari debeant, qui omnes m litteras involvunt, inde excludamus primo omnes casus, qui tantum $m-1$ litteras vel pauciores continent, quod fiet, si omnes casus possibiles primi ordinis, quorum numerus est A, auferamus. Hoc enim modo casus, qui $m-1$ litteras continent, e medio tollentur. At vero casus, qui $m-2$ litteras continent, bis auferentur hoc modo; unde in formula $\varDelta - A$ semel deficient, ita ut eorum numerus $1-2=-1$. At pro casibus $m-3$ litteras continentibus numerus, quo in formula $\varDelta - A$ occurrent, erit $1-3=-2$. Simili modo pro $m-4$ habebimus $1-4=-3$ et ita porro, qui ergo casus deficientes iterum restitui debebunt.

24. Casus autem formae $m-2$ semel deficientes restituentur, si ad formulam $\varDelta - A$ addatur B. Hoc autem modo terminos formae $m-3$ ter adduntur, cum tamen bis tantum defecissent; ergo nunc semel abundabunt, sive index erit $+1$. At forma $m-4$ sexies adiicitur, cum tantum ter defuisset, ideoque index erit $+3$. Simili modo pro terminis formae $m-5$ index erit $10-4=+6$ et ita porro.

25. Ut igitur hos casus iam abundantes iterum tollamus, subtrahamus omnes casus ordinis tertii, $=C$. Hoc enim modo termini formae $m-3$ penitus tollentur, reliqui autem nimis crebro auferentur, scilicet pro ordine $m-4$ index erit -1, pro ordine $m-5$ index erit -4 etc.

26. Quia forma $m-4$ semel deficit, restitutio fiet addendo litteram D. Inferiores autem nunc redundabunt secundum indices 1, 5, 15 etc., unde E subtrahendo hi tollentur; quod nimis subtractum est, additione litterae F restituetur et ita porro.

27. Hinc iam satis manifestum est ex forma $\varDelta$ sublatos esse omnes casus pauciores quam m litteras continentes; quorum ergo restantium numerus erit

$$\varDelta - A + B - C + D - E + F - \text{etc.},$$

quem indicavimus per Σ; sicque solutio primi problematis firmiter est demonstrata.

PRO PROBLEMATE SECUNDO

28. Manifestum est secundum idem, quo hic usi sumus, ratiocinium procedendo demonstrationem pro secundi problematis solutione adornari posse. Nec opus erit omnia tam prolixe exponere. Cum enim ex numero casuum possibilium $\varDelta$ ii sint enumerandi, qui tantum $m-1$ litteras continent, statim patet hinc excludendos esse omnes casus $m-2$ litteras continentes, quod fiet, si a numero $\varDelta$ numerus B subtrahatur. At tabula supra § 19 data declarat hoc modo terminos formae $m-3$ ter ablaturos esse, cum tamen semel tantum subtrahi debuissent, et ita de reliquis formis. Ad eos restituendos addatur numerus $2C$, quo numeri deficientes formae $m-3$ penitus tollentur; redundabunt autem numeri formae $m-4$ indice 3, ac magis superfluunt sequentes. Quo priores tollantur, iterum subtrahi debet numerus $3D$, quo sublato termini formae $m-4$ exclusi erunt. Deficientes numeri formae $m-5$ et sequentium iterum additione numeri $4E$ erunt restituendi et ita porro; quibus operationibus peractis numerus restantium erit

$$\Sigma' = \varDelta - B + 2C - 3D + 4E - 5F + \text{etc.};$$

sicque solutio secundi problematis est demonstrata.

PRO PROBLEMATE TERTIO

29. Hic a numero Δ subtrahi debet numerus C, quo casus $m-3$ schedularum excludantur; et quia hoc pacto numerus D[1]) quater subtrahitur, cum tantum semel redundabat, iterum addi debet numerus $3D$, quo ille et sequentes deficientes restituantur. Quod excedit subtractione numeri $6E$ tolletur, deficientes vero additione numeri $10F$ restituendi sunt et ita porro; unde numerus casuum $m-2$ litteras continentium erit

$$\Sigma'' = \Delta - C + 3D - 6E + 10F - \text{etc.},$$

quemadmodum in solutione tertii problematis asseveravi. Hoc modo igitur haec etiam solutio firmiter est demonstrata.

1) Editio princeps hic loco D habet: $m-4$. Correxit L. G. D.

ECLAIRCISSEMENS SUR LE MEMOIRE DE MR. DE LA GRANGE[1] INSERE DANS LE V^E. VOLUME DES MELANGES DE TURIN CONCERNANT LA METHODE DE PRENDRE LE MILIEU ENTRE LES RESULTATS DE PLUSIEURS OBSERVATIONS ETC.[2]

Présenté à l'Académie le 27 Nov. 1777

Commentatio 628 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae **3** (1785), 1788, p. 289—297
Summarium ibidem p. 196—197

SOMMAIRE

On sait que les Astronomes, après avoir fait un certain nombre d'observations qui donnent des résultats différens, prennent la somme de ces résultats et la divisent par le nombre des observations. L'Auteur de ce mémoire s'étoit proposé de déterminer la probabilité que cette somme devienne égale ou à zéro ou à un autre nombre quelconque, posi-

1) J. L. LAGRANGE (1736—1813), *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière,* Mélanges de philosophie et de mathématiques de la société royale de Turin 5, 1770—1773, p. 167—232; *Oeuvres de LAGRANGE,* publiées par les soins de M. J.-A. SERRET, t. II, Paris 1868, p. 171—234. L. G. D.

2) Voir dans ce volume le mémoire 488 et celui de DANIEL BERNOULLI. L. G. D.

tif ou négatif. Il suppose, pour cet effet, que pour connoître la hauteur d'un astre, ou sa déclinaison, ou enfin quoi que ce soit, on ait fait a observations qui donnent au juste ce qu'on cherche, b observations qui le donnent d'une minute trop grand, et c observations qui le donnent trop petit d'une minute, de sorte que le nombre de toutes les observations faites à ce sujet soit $N = a + b + c$; et il s'agit de voir quelle sera la probabilité que la somme des résultats devienne ou 0 ou ± 1 ou ± 2 ou ± 3 etc.

Cette question se réduit à la suivante: De N billets, dont a sont marqués par 0, b par $+1$ et c par -1, on tire au hazard successivement n billets, en remettant chaque fois le billet tiré; et l'on demande la probabilité que la somme de tous les nombres tirés soit ou 0 ou ± 1 ou ± 2 etc., problème dont l'auteur considère d'abord quelques cas particuliers, où $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, dont la résolution est suivie du problème général résolu par les principes connus de la théorie des combinaisons et du calcul des probabilités, par le développement de la puissance $N^n = (a + b + c)^n$, où la forme générale de chaque terme est $Ma^\alpha b^\beta c^\gamma$, la somme des exposans étant $\alpha + \beta + \gamma = n$ et le coefficient

$$M = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \beta \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \gamma}.$$

Ces opérations sont longues et désagréables, si on les fait de la maniere ordinaire; M. EULER fait voir comment on peut trouver les termes affectés de la même puissance $\alpha + \beta + \gamma = n$, sans recourir au développement actuel, et il finit son mémoire par la résolution du problème général, où, après avoir fait $N = a + b + c + d +$ etc. observations dont les

a ont la même erreur α,
b „ „ „ „ β,
c „ „ „ „ γ
etc.,

on veut savoir la probabilité que le milieu devienne un nombre quelconque $\frac{\lambda}{n}$. Pour cet effet, il faut considérer la puissance $(ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.})^n$ et prendre la somme de tous les termes affectés de la même puissance x^λ, qui, divisée par N^n, donnera la probabilité que le milieu sera $\frac{\lambda}{n}$.

Qu'on conçoive un Quart-de-cercle tel que, lorsqu'on s'en sert pour observer, par exemple, la hauteur du pole, après avoir fait un grand nombre de telles observations, il se trouve a observations qui donnent cette hauteur exacte, b observations qui la donnent d'une minute trop grande et enfin c

observations qui la donnent trop petite d'une minute; de sorte que le nombre de toutes ces observations soit

$$N = a + b + c,$$

parmi lesquelles il y en ait a [où l'erreur est 0, b] où l'erreur est $= +1$ et c où l'erreur est $= -1$.

Un tel Quart-de-cercle étant supposé, quand on aura fait n observations pour déterminer l'élévation du pole, la déclinaison d'une étoile, ou quoi que ce soit, parmi lesquelles on aura pris un milieu, selon la manière ordinaire, en ajoutant tous les résultats ensemble et divisant la somme par le nombre des observations, n, on demande: quelle sera la probabilité que ce milieu donne exactement la vraye hauteur cherchée, ou que la somme de tous les résultats donne exactement zéro? et ensuite: quelle sera la probabilité que la somme de tous les résultats devienne ou $+1$ ou -1 ou $+2$ ou -2 ou $+3$ ou -3 etc.?

Pour répandre plus de lumière sur cette question, on n'a qu'à concevoir plusieurs billets, dont le nombre soit $N = a + b + c$ et qui soyent marqués a par 0, b par $+1$ et c par -1. Que de ces billets renfermés dans une boite, on tire, au hazard, successivement n billets, en remettant chaque fois le billet tiré dans la boite, et l'on pourra demander: quelle sera la probabilité que la somme de tous les nombres tirés successivement soit ou 0 ou $+1$ ou -1 ou $+2$ ou -2 etc., où il est d'abord clair que cette somme ne sçauroit jamais surpasser ou $+n$ ou $-n$. De cette manière, la question proposée pourra aisément être résolue par la théorie des combinaisons, en supposant d'abord $n = 1$, ensuite $n = 2$, $n = 3$ etc.

Soit donc $n = 1$ ou qu'on ne tire de la boite qu'un seul billet; et il est évident qu'il y aura a cas où le nombre tiré peut être 0, b cas où il peut être $+1$ et c cas où il peut être -1; donc, puisque le nombre de tous les cas est

$$a + b + c = N,$$

la probabilité que le nombre tiré soit 0 sera $\frac{a}{N}$, la probabilité qu'il soit $+1$ sera $\frac{b}{N}$ et celle enfin qu'il soit -1 sera $\frac{c}{N}$; et puisqu'ici on ne tire qu'un seul billet, il n'y a pas de milieu à prendre.

Soit $n=2$ ou qu'on tire de la boite deux billets successivement; et quel que soit le nombre du premier, le second pourra être celui de chaque billet dans la boite, en sorte que chaque billet tiré d'abord admet N variations, d'où l'on voit que le nombre de tous les cas possibles sera

$$N^2=(a+b+c)^2.$$

Or, cette formule étant développée donne

$$aa+bb+cc+2(ab+ac+bc),$$

dont le premier terme, aa, exprime le nombre des cas où les deux billets tirés sont $0+0$, et la probabilité de ce cas sera $\frac{aa}{N^2}$. Ensuite, le second terme, bb, marque le nombre des cas où les deux billets tirés seront $+1+1=+2$, dont la probabilité sera $\frac{bb}{N^2}$. Le troisième terme, cc, marque le nombre des cas où les nombres des billets tirés seront $-1-1=-2$, dont la probabilité $=\frac{cc}{N^2}$. De la même manière, le quatrième terme, $2ab$, exprime le nombre des cas où l'un des nombres tirés est 0 et l'autre $+1$ et partant leur somme $=+1$, dont la probabilité $=\frac{2ab}{N^2}$. Le terme $2ac$ est le nombre des cas où il arrive que les nombres des deux billets tirés sont 0 et -1 et partant la somme $=-1$, dont la probabilité $=\frac{2ac}{N^2}$. Enfin, le dernier terme marque le nombre des cas où ces nombres tirés sont $+1$ et -1, leur somme partant $=0$, et la probabilité en est $\frac{2bc}{N^2}$.

Puisque ici nous avons deux billets, la somme des deux nombres tirés dans chaque cas étant divisée par 2, donne le milieu dont nous avons parlé ci-dessus, et partant la probabilité que ce milieu soit $=0$ sera $\frac{aa+2bc}{N^2}$. Que ce milieu soit $+1$, la probabilité sera $\frac{bb}{N^2}$; qu'il soit -1, elle sera $\frac{cc}{N^2}$. Or, il peut aussi arriver que ce milieu soit $+\frac{1}{2}$, et la probabilité de ce cas sera $\frac{2ab}{N^2}$; et enfin, pour le milieu $-\frac{1}{2}$ la probabilité est $\frac{2ac}{N^2}$.

Supposons maintenant $n=3$; et puisque chacun des cas précédens, dont le nombre étoit N^2, peut être suivi de chacun des N billets, le nombre de tous les cas possibles sera

$$N^3=(a+b+c)^3,$$

dont nous devons considérer tous les termes qui résultent du développement

de cette formule, et chacun exprimera le nombre des cas qui produisent les trois nombres tirés, dont on aura par conséquent tant la somme que le milieu en la divisant par trois, auquel il sera aisé d'ajouter la probabilité, qui se trouve en divisant chaque terme par le nombre de tous les cas possibles, c'est à dire par N^3. Nous représenterons tous les cas dans la table suivante:

Termes	Nombres	Somme	Milieu	Probabilité
a^3	$0+0+0$	0	0	$\frac{a^3}{N^3}$
b^3	$1+1+1$	3	1	$\frac{b^3}{N^3}$
c^3	$-1-1-1$	-3	-1	$\frac{c^3}{N^3}$
$3aab$	$0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3aab}{N^3}$
$3aac$	$0+0-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3aac}{N^3}$
$3abb$	$0+1+1$	$+2$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{3abb}{N^3}$
$3acc$	$0-1-1$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3acc}{N^3}$
$6abc$	$0+1-1$	0	0	$\frac{6abc}{N^3}$
$3bbc$	$+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3bbc}{N^3}$
$3bcc$	$+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3bcc}{N^3}$.

On voit de cette table que le milieu $=0$ s'y rencontre deux fois, la probabilité en sera par conséquent $=\frac{a^3+6abc}{N^3}$. Ensuite, elle montre que le milieu $\frac{1}{3}$ se rencontre deux fois, et partant la probabilité en sera $\frac{3aab+3bbc}{N^3}$. Or, que ce milieu devienne $-\frac{1}{3}$ la probabilité sera $\frac{3aac+3bcc}{N^3}$. La probabilité pour le milieu $+\frac{2}{3}$ sera $\frac{3abb}{N^3}$; pour $-\frac{2}{3}$ elle sera $\frac{3acc}{N^3}$. Pour que le milieu devienne $+1$, la probabilité est $\frac{b^3}{N^3}$, et pour qu'il soit -1, il y aura la probabilité $\frac{c^3}{N^3}$.

De la même manière, parcourons le cas où $n=4$ et où par conséquent on tire quatre billets; et il est clair que le nombre de tous les cas

possibles sera

$$N^4 = (a + b + c)^4.$$

Développant donc cette formule, on verra aisément tant ces quatre nombres tirés, répondans à chaque nombre, que leur somme et leur milieu, qui, avec la probabilité, seront représentés dans la table suivante:

Termes	Nombres	Somme	Milieu	Probabilité
a^4	$+0+0+0+0$	0	0	$\frac{a^4}{N^4}$
$4a^3b$	$+0+0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3b}{N^4}$
$4a^3c$	$+0+0+0-1$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3c}{N^4}$
$6aabb$	$+0+0+1+1$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{6aabb}{N^4}$
$6aacc$	$+0+0-1-1$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6aacc}{N^4}$
$12aabc$	$+0+0+1-1$	0	0	$\frac{12aabc}{N^4}$
$4ab^3$	$+0+1+1+1$	$+3$	$+\frac{3}{4}$	$\frac{4ab^3}{N^4}$
$12abbc$	$+0+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$\frac{12abbc}{N^4}$
$12abcc$	$+0+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{12abcc}{N^4}$
$4ac^3$	$+0-1-1-1$	-3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4ac^3}{N^4}$
b^4	$+1+1+1+1$	$+4$	$+1$	$\frac{b^4}{N^4}$
$4b^3c$	$+1+1+1-1$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4b^3c}{N^4}$
$6bbcc$	$+1+1-1-1$	0	0	$\frac{6bbcc}{N^4}$
$4bc^3$	$+1-1-1-1$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4bc^3}{N^4}$
c^4	$-1-1-1-1$	-4	-1	$\frac{c^4}{N^4}$

Dans cette table, on trouve 9 milieux différens dont quelques-uns se rencontrent deux et même trois fois. Nous marquerons donc dans la table suivante pour chacun de ces milieux la probabilité qui lui répond:

Milieu	Probabilité
0	$\frac{a^4+12aabc+6bbcc}{N^4}$
$+\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3b+12abbc}{N^4}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3c+12abcc}{N^4}$
$+\frac{1}{2}$	$\frac{6aabb+4b^3c}{N^4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{6aacc+4bc^3}{N^4}$
$+\frac{3}{4}$	$\frac{4ab^3}{N^4}$
$-\frac{3}{4}$	$\frac{4ac^3}{N^4}$
$+1$	$\frac{b^4}{N^4}$
-1	$\frac{c^4}{N^4}$.

La considération de ces quatre cas nous ouvre la route à la question générale, où le nombre des billets tirés est $=n$; car d'abord il est évident que le nombre de tous les cas possibles est ici

$$N^n=(a+b+c)^n,$$

dont le développement n'a aucune difficulté. Mais pour nous dispenser de la considération de chacun des termes qui en résultent, nous considérons ici la forme générale de chacun des ces termes, qui soit

$$Ma^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

où la somme des exposans $\alpha+\beta+\gamma$ doit être $=n$; et pour trouver le

coefficient M de ce terme, la théorie des combinaisons nous fournit cette formule:

$$M = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{1\cdot 2\cdots\alpha\times 1\cdot 2\cdots\beta\times 1\cdot 2\cdots\gamma}.$$

Or, les nombres tirés qui répondent à ce terme seront

$$0\cdot\alpha + 1\cdot\beta - 1\cdot\gamma$$

et partant le milieu de ces nombres tirés sera $\frac{\beta-\gamma}{n}$, auquel répond la probabilité

$$\frac{Ma^\alpha b^\beta c^\gamma}{N^n}.$$

Puisque la somme de tous les nombres tirés qui répondent à ce terme est $0\cdot\alpha + 1\cdot\beta - 1\cdot\gamma$, on voit que si nous écrivions au lieu des lettres a, b, c ces formules ax^0, bx^{+1}, cx^{-1}, le terme que nous considérons prendroit cette forme $Ma^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta-\gamma}$, de sorte que l'exposant de x nous donneroit d'abord la somme de tous les nombres tirés. Pour cet effet, on n'a qu'à développer cette puissance

$$(ax^0 + bx^1 + cx^{-1})^n,$$

et chacun de ses termes, qui aura, comme nous venons de voir, la forme $Ma^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta-\gamma}$, nous donne pour le milieu

$$\frac{\beta-\gamma}{n},$$

et la probabilité sera

$$\frac{Ma^\alpha b^\beta c^\gamma}{N^n}.$$

Or, on comprend aisément que ce même milieu $\frac{\beta-\gamma}{n}$ peut résulter de plusieurs termes différens, d'où par conséquent il faudra tirer la probabilité qui répond à chacun, et la somme de toutes ces probabilités donnera la probabilité pour le même milieu $\frac{\beta-\gamma}{n}$. Pour trouver tous les termes affectés de la même puissance de x, je tâcherai de donner une méthode qui nous dispensera de ramasser tous ces termes par le développement actuel; mais auparavant, je parcourrai successivement les cas où l'exposant de x devient ou 0 ou ± 1 ou ± 2 ou ± 3.

Et d'abord pour le premier, où le milieu est $=0$, il faudra mettre $\beta=\gamma$, de sorte que les termes suivans qui produisent ce même milieu seront

$$a^n,\quad a^{n-2}bc,\quad a^{n-4}b^2c^2,\quad a^{n-6}b^3c^3,\quad a^{n-8}b^4c^4\quad \text{etc.},$$

qu'il faut continuer jusqu'à ce que les exposans de a deviendront négatifs; et de ce que nous avons observé, il sera facile d'assigner à chacun de ces termes son coefficient; par conséquent, la somme de tous ces termes divisée par N^n donne la probabilité entière pour que ce milieu ait lieu.

De la même manière, pour que le milieu en question devienne $\frac{1}{n}$, où l'exposant de x, sçavoir $\beta-\gamma$, devient $=1$, tous les termes qui y conduisent, à cause de $\beta=\gamma+1$ et $\alpha=n-2\gamma-1$, seront exprimés par les formules suivantes

$$a^{n-1}b,\quad a^{n-3}b^2c,\quad a^{n-5}b^3c^2,\quad a^{n-7}b^4c^3\quad \text{etc.},$$

dont la somme, après y avoir joint leurs coefficiens, divisée par N^n donne la probabilité pour ce milieu $\frac{1}{n}$. De même, pour que le milieu devienne $-\frac{1}{n}$ et partant $\beta-\gamma=-1$, on aura $\gamma=\beta+1$ et $\alpha=n-2\beta-1$, d'où les termes qui produisent ce milieu seront

$$a^{n-1}c,\quad a^{n-3}bc^2,\quad a^{n-5}b^2c^3,\quad a^{n-7}b^3c^4,\quad a^{n-9}b^4c^5\quad \text{etc.}$$

Si l'on veut que le milieu se trouve $=+\frac{2}{n}$, ou qu'il soit $\beta-\gamma=2$ et partant $\beta=\gamma+2$ et $\alpha=n-2\gamma-2$, tous les termes qui produisent ce milieu seront

$$a^{n-2}b^2,\quad a^{n-4}b^3c,\quad a^{n-6}b^4c^2,\quad a^{n-8}b^5c^3,\quad a^{n-10}b^6c^4\quad \text{etc.}$$

Or, pour que le milieu soit $-\frac{2}{n}$, les termes qui le produisent, à cause de $\beta-\gamma=-2$ et partant $\alpha=n-2\beta-2$, seront

$$a^{n-2}c^2,\quad a^{n-4}bc^3,\quad a^{n-6}b^2c^4,\quad a^{n-8}b^3c^5,\quad a^{n-10}b^4c^6\quad \text{etc.},$$

où l'on doit continuer ces formules tant que l'exposant de a demeure positif; et il est très-facile de continuer cette opération pour tous les milieux différens qui peuvent avoir lieu.

Maintenant il sera très-aisé de résoudre cette question en général, lorsque le Quart-de-cercle est supposé tel que parmi un très grand nombre N d'observations, il y en ait a qui ayent la même erreur $= \alpha$, b observations qui produisent la même erreur $= \beta$, c observations qui ayent la même erreur $= \gamma$ et d observations dont l'erreur soit $= \delta$ etc., où α, β, γ, δ etc. marquent en général des nombres quelconques positifs ou négatifs, de sorte qu'on ait

$$N = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on veut sçavoir la probabilité qu'ayant fait n observations, la somme de tous les nombres tirés (supposant qu'à chaque observation réponde un billet, comme ci-dessus) soit ou 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou en général λ, on n'a qu'à développer cette puissance

$$(ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \text{etc.})^n$$

et à prendre la somme de tous les termes affectés par la même puissance x^λ, qui, étant divisée par N^n, donnera la probabilité qui convient à la somme $= \lambda$ de tous les nombres tirés, ou bien à leur milieu $\frac{\lambda}{n}$. Toutes ces opérations se feront, sans aucune difficulté, de la même manière que nous l'avons enseigné ci-dessus.

SOLUTIO QUAESTIONIS CURIOSAE EX DOCTRINA COMBINATIONUM [1]

Conventui exhibita die 18. Octobris 1779

Commentatio 738 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, p. 57—64

1. Quaestio, quam hic evolvendam suscipio, ita enunciatur: Data serie quotcunque litterarum a, b, c, d, e etc., quarum numerus sit n, invenire, quot modis earum ordo immutari possit, ut nulla in eo loco reperiatur, quem initio occupaverat.

Hic statim manifestum est, si postrema conditio praetermittatur atque adeo numerus omnium plane permutationum quaeratur, eum fore productum omnium numerorum ab unitate usque ad n. Hic autem omnes eos ordines excludi oportet, ubi quaepiam littera locum initialem esset habitura, unde numerus permutationum, quem quaerimus, minor erit quam $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

2. Ut in solutionem huius quaestionis inquiramus, consideremus primo casus simplicissimos, ex quibus deinceps methodum colligamus solutionem pro litterarum numero quantumvis magno derivandi. Ac primo quidem, si unica proponatur littera a, evidens est nullam variationem locum habere. Propositis duabus litteris ab unica variatio locum habet, scilicet ba. Pro tribus autem litteris abc duae tantum variationes dari possunt, quae sunt

$$bca, \quad cab.$$

---

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 201 nec non fragmentum illud p. 542 huius voluminis. Vide etiam M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* IV, Leipzig 1908, p. 220—221. L. G. D.

At si quatuor litterae *abcd* dentur, tres casus hic occurrunt, quibus vel *b* vel *c* vel *d* primum obtineat locum; casu igitur, quo *b* in primo loco locatur, ternae reliquae tres variationes admittunt, quae sunt *adc*, *dac*, *cda*; totidem igitur etiam variationes habebuntur, si tam litterae *c* quam *d* primus locus tribuatur, sicque omnino novem variationes locum habere possunt, quae sunt:

badc	*cadb*	*dabc*
bdac	*cdab*	*dcab*
bcda	*cdba*	*dcba*

3. Evolvamus simili modo casum quinque litterarum *abcde*, ubi primum locum tenere potest vel *b* vel *c* vel *d* vel *e*. Occupet ergo *b* primum locum, secundum autem locum demus litterae *a* ac tres reliquae, *c*, *d* et *e*, duas variationes, quae sunt *badec*, *baecd*, admittent. Quando autem ipsi *a* sedes tertia tribuitur, ternae reliquae tres variationes admittunt, quas ita repraesentemus *bcaed*, *bdaec*, *beacd*. Simili modo si litterae *a* quarta sedes tribuatur, etiam tres variationes locum habent, quae sunt *bedac*, *bcead*, *bdeac*. Denique si litterae *a* quintum locum assignemus, tres variationes erunt sequentes: *bcdea*, *bdeca*, *bedca*. Dum igitur litterae *b* primus locus datur, omnino undecim variationes dabuntur; totidem vero etiam occurrent, si vel *c* vel *d* vel *e* in primo loco collocetur. Unde concludimus omnino quater undecim sive 44 variationes locum habere pro quinque litteris *abcde*.

4. Sin autem simili modo ad plures litteras progredi vellemus, enumeratio omnium casuum nimis fieret difficilis et operosa, quin etiam lubrica; unde in methodum certam nobis erit inquirendum, cuius ope numerus variationum semper accurate assignari queat, quantumvis magnus fuerit litterarum numerus.

Hunc in finem plurimum iuvabit idoneum characterem in subsidium vocare, quo pro quocunque litterarum propositarum numero multitudo omnium variationum indicetur. Denotet igitur iste character

$$\Pi : n$$

numerum omnium variationum, quas n litterae admittunt, et quoniam casus, quibus n est vel 1 vel 2 vel 3 vel 4 vel 5, iam expedivimus, nunc iam novimus fore

$$\Pi:1=0, \quad \Pi:2=1, \quad \Pi:3=2, \quad \Pi:4=9 \quad \text{et} \quad \Pi:5=44;$$

unde patet ulterius progrediendo numeros variationum mox in immensum crescere.

5. Hoc iam charactere constituto quaeramus statim in genere numerum omnium variationum pro litterarum numero $=n$, qui ergo erit $\Pi:n$; ubi totum negotium eo redit, ut investigetur, quemadmodum iste numerus quaesitus ex praecedentibus, qui sunt

$$\Pi:(n-1), \quad \Pi:(n-2), \quad \Pi:(n-3) \quad \text{etc.},$$

componatur. Ratiocinium vero simili modo instituamus, quo ante sumus usi. Primo scilicet considerabimus casum, quo littera b in primo loco locatur; facile enim intelligitur, quot variationes pro hoc casu prodierint, totidem quoque esse prodituras, si quaecunque alia littera in primo loco constituatur; unde intelligitur, quicunque numerus variationum fuerit inventus, dum littera b primum locum obtinet, eum per $n-1$ multiplicatum praebiturum esse numerum omnium variationum possibilium ideoque valorem characteris $\Pi:n$.

6. Hic autem duos casus evolvi convenit, prouti littera a vel secundum locum tenet vel alium quemcunque. Constituamus igitur a in secundo loco et investigandum erit, quot variationes reliquae litterae c, d, e, f etc. sint admissurae; quarum numerus cum sit $n-2$, numerus variationum per hypothesin erit $\Pi:(n-2)$. Collocemus porro a in tertium vel alium quemcunque locum et iam quaestio oritur, quot variationes litterae b, c, d, e, f etc. admittant; ubi notandum est in earum variationibus litteram b non amplius occurrere posse, quia iam primum locum obtinet, sed eius loco in variationibus ingredi litteram a; sicque perinde erit, ac si reiecto primo loco variationes litterarum a, c, d, e, f etc. quaererentur; quarum numerus cum sit $n-1$, multitudo omnium variationum per hypothesin erit $\Pi:(n-1)$. Consequenter, dum littera b in primo loco constituitur, numerus omnium variationum erit

$$\Pi:(n-2)+\Pi:(n-1).$$

7. Iam per se manifestum est totidem quoque variationes esse prodituras, si quaelibet reliquarum litterarum in primo loco scribatur; quare cum

omnium harum litterarum, prima a exclusa, numerus sit $n-1$, numerus omnium plane variationum erit

$$(n-1)\Pi:(n-2)+(n-1)\Pi:(n-1),$$

qui ergo est valor formulae quaesitae $\Pi:n$, ita ut sit

$$\Pi:n=(n-1)\Pi:(n-1)+(n-1)\Pi:(n-2)$$

sive

$$\Pi:n=(n-1)\big(\Pi:(n-1)+\Pi:(n-2)\big).$$

Sicque duorum characterum immediate praecedentium summa, scilicet

$$\Pi:(n-1)+\Pi:(n-2),$$

multiplicata per $n-1$, semper dabit characterem sequentem $\Pi:n$, cuius regulae ope progressio, quam numeri variationum pro singulis litterarum numeris constituunt, quousque lubuerit, facile continuari poterit.

8. Quod quo facilius appareat, incipiamus a casibus simplicissimis atque valores characteris $\Pi:n$ in sequente tabula[1]) exhibeamus:

$$\begin{aligned}
\Pi:3 &= 2(\Pi:2+\Pi:1)=2\cdot(1+0)=2,\\
\Pi:4 &= 3(\Pi:3+\Pi:2)=3\cdot(2+1)=9,\\
\Pi:5 &= 4(\Pi:4+\Pi:3)=4\cdot(9+2)=44,\\
\Pi:6 &= 5(\Pi:5+\Pi:4)=5\cdot(44+9)=265,\\
\Pi:7 &= 6(\Pi:6+\Pi:5)=6\cdot(265+44)=1854,\\
\Pi:8 &= 7(\Pi:7+\Pi:6)=7\cdot(1854+265)=14833,\\
\Pi:9 &= 8(\Pi:8+\Pi:7)=8\cdot(14833+1854)=133496,\\
\Pi:10 &= 9(\Pi:9+\Pi:8)=9\cdot(133496+14833)=1334961.
\end{aligned}$$

9. Ordinemus hos numeros $\Pi:n$, ad suos indices n relatos, in sequentem seriem:

n	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$\Pi:n$	0,	1,	2,	9,	44,	265,	1854,	14833,	133496.

1) Confer tabulam p. 19. L. G. D.

Quodsi iam hanc seriem attentius consideremus, egregiam relationem deprehendemus, qua quilibet numerus ad praecedentem refertur, quemadmodum sequens tabella declarat:

$$\begin{aligned}
2 &= 3 \cdot 1 - 1,\\
9 &= 4 \cdot 2 + 1,\\
44 &= 5 \cdot 9 - 1,\\
265 &= 6 \cdot 44 + 1,\\
1854 &= 7 \cdot 265 - 1,\\
14833 &= 8 \cdot 1854 + 1,\\
133496 &= 9 \cdot 14833 - 1\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Cuius ergo observationis beneficio nostram progressionem multo facilius continuare licet, dum quilibet terminus semper est certum multiplum praecedentis, unitate vel auctum vel minutum; sicque in genere erit

$$\Pi : n = n\Pi : (n-1) \pm 1.$$

Ubi notetur signum $+$ valere, si n fuerit numerus par, signum vero $-$, quando n fuerit numerus impar.

10. Mirum videbitur, quomodo binae istae leges progressionis inter se cohaereant; facile autem ex lege posteriori prior derivatur. Posito enim

$$\Pi : n = n\Pi : (n-1) \pm 1$$

erit etiam simili modo

$$\Pi : (n-1) = (n-1)\Pi : (n-2) \mp 1.$$

Hae duae formulae addantur, ut signa ambigua $+$ vel $-$ se mutuo destruant, et summa erit

$$\Pi : n + \Pi : (n-1) = n\Pi : (n-1) + (n-1)\Pi : (n-2),$$

unde sequitur fore

$$\Pi : n = (n-1)\Pi : (n-1) + (n-1)\Pi : (n-2),$$

quae est ipsa lex progressionis prior.

Verum non tam facile est posteriorem legem ex priore derivare; interim tamen res succedet, si nempe a casibus simplicissimis incipiamus, observando, quod $\Pi:1=0$ et $\Pi:2=1$. Hinc enim erit

$$\Pi:3=2\Pi:2=3\Pi:2-1,$$

unde fit

$$3\Pi:2=\Pi:3+1.$$

Cum iam sit ex priore lege $\Pi:4=3\Pi:3+3\Pi:2$, si hic loco $3\Pi:2$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$\Pi:4=4\Pi:3+1,$$

unde fit

$$4\Pi:3=\Pi:4-1.$$

Iam sequens relatio erat $\Pi:5=4\Pi:4+4\Pi:3$; ubi si loco $4\Pi:3$ valor modo inventus scribatur, prodibit

$$\Pi:5=5\Pi:4-1$$

ideoque

$$5\Pi:4=\Pi:5+1.$$

At sequens relatio est $\Pi:6=5\Pi:5+5\Pi:4$; in qua si loco partis postremae valor ante inventus substituatur, erit

$$\Pi:6=6\Pi:5+1$$

ideoque

$$6\Pi:5=\Pi:6-1,$$

qui valor in relatione sequente $\Pi:7=6\Pi:6+6\Pi:5$ substitutus praebet

$$\Pi:7=7\Pi:6-1$$

et ita porro; unde satis patet, quomodo lex posterior ex priore derivetur.

DE QUADRATIS MAGICIS [1]

Conventui academiae exhibita 1776 Oct. 17

Commentatio 795 indicis Enestroemiani
Commentationes arithmeticae 2, 1849, p. 593—602
Opera postuma 1, 1862, p. 140—151

1. Quadratum magicum dici solet, cuius cellulis numeri naturales ita sunt inscripti, ut summae numerorum per omnes fascias tam horizontales quam verticales, tum vero etiam per binas diagonales prodeant inter se aequales; ita, si latera quadrati in x partes aequales dividantur, numerus omnium cellularum erit xx et singulae fasciae tam horizontales quam verticales, quin etiam binae diagonales, continebunt x cellulas, in quas ergo omnes numeros naturales 1, 2, 3, 4, ... xx ita disponi oportet, ut summae per omnes fascias memoratas evadant inter se aequales. Cum igitur summa omnium horum numerorum, ab 1 usque ad xx, sit

$$\frac{xx(1+xx)}{2},$$

summa uniuscuiusque fasciae erit

$$=\frac{x(1+xx)}{2},$$

unde, si fuerit $x=3$, summa per singulas fascias erit $=15$.

2. Hinc ergo, in quotcunque cellulas totum quadratum fuerit divisum, summa numerorum per singulas fascias dispositorum facile assignari poterit,

1) Vide Commentationem 530 nec non fragmentum p. 535 huius voluminis. L. G. D.

unde istas summas pro singulis huiusmodi quadratis per omnes fascias assignasse iuvabit.

x	xx	$\frac{x(1+xx)}{2}$
1	1	1
2	4	5
3	9	15
4	16	34
5	25	65
6	36	111
7	49	175
8	64	260
9	81	369

etc.,

ubi x denotat numerum partium, in quas latera quadrati dividuntur, xx numerum cellularum in quadrato contentarum et $\frac{1}{2}x(1+xx)$ indicat summam omnium numerorum per singulas fascias dispositorum.

3. Ut iam certam regulam investigemus huiusmodi quadrata magica omnium ordinum construendi, plurimum intererit observasse omnes numeros ab 1, 2, 3 etc. usque ad xx hac formula

$$mx+n$$

repraesentari posse. Si enim loco m accipiamus successive omnes valores 0, 1, 2, 3, 4 usque ad $x-1$, tum vero pro n omnes numeros 1, 2, 3, 4, ... x, manifestum est hinc omnes plane numeros ab 1 usque ad xx provenire, siquidem cum omnibus valoribus ipsius m singuli valores ipsius n ordine combinentur. Cum igitur hoc modo omnes numeri quadrato inscribendi per formulam $mx+n$ exhiberi ideoque per duas partes repraesentari queant, in sequentibus perpetuo partes priores, mx, simpliciter litteris latinis a, b, c, d etc., partes vero posteriores, n, litteris graecis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. designabimus, ubi evidens est pro quovis numero x multitudinem tam litterarum latinarum quam graecarum esse $=x$, quandoquidem valores litterarum latinarum erunt $0x$, $1x$, $2x$, $3x$ usque ad $(x-1)x$, graecarum autem valores sunt 1, 2, 3, 4, ... x.

Neque vero hic certus ordo in istis litteris tam latinis quam graecis stabiliri est censendus, cum quaelibet litterarum latinarum pro lubitu sive $0x$ sive $1x$ sive $2x$ etc. significare possit, dummodo singulis valores diversi tribuantur; quod idem de litteris graecis est tenendum.

4. In posterum igitur quilibet numerus quadrato inscribendus per aggregatum ex littera latina et graeca repraesentabitur, veluti per $b+\delta$ sive per $a+\beta$ etc., ita ut singuli numeri per duas partes sint repraesentandi; tum enim, si singulae litterae latinae cum singulis graecis coniungantur, manifesto omnes plane numeri ab 1 usque ad xx resultare debent; tum vero etiam perspicuum est ex diversa harum litterarum combinatione etiam semper diversos numeros oriri neque ullum numerum duplici modo exprimi posse.

5. Cum igitur omnes numeri per aggregata ex littera latina cum graeca repraesententur, pro constructione quadratorum magicorum haec regula principalis constituatur, ut primo litterae latinae singulis quadrati cellulis ita inscribantur, ut earum summa per omnes fascias eadem proveniat, ubi, cum istarum litterarum numerus sit $=x$, cellularum autem omnium numerus $=xx$, evidens est quamlibet litteram x vicibus repeti debere. Simili autem modo quoque graecae litterae cellulis eiusdem quadrati ita inscribi intelligantur, ut earum quoque summae per omnes fascias evadant aequales. Sic enim etiam summae omnium numerorum ex littera latina et graeca compositorum per omnes fascias inter se erunt aequales. Tantum igitur superest, ut in hac dispositione singulae litterae latinae cum singulis graecis coniungantur, quandoquidem hac ratione nullus numerorum ab 1 usque ad xx praetermittetur neque ullus bis occurrere poterit.

6. His regulis in genere traditis singulas species quadratorum pro cellularum numero pertractemus, ubi quidem statim apparet a novem cellulis esse incipiendum, quandoquidem in quadrato in quatuor tantum cellulas diviso talis dispositio locum habere nequit. Praeterea hic in genere animadvertisse iuvabit, cum pro qualibet specie numerus litterarum tam latinarum quam graecarum sit $=x$, omnes autem fasciae totidem cellulas contineant, praescriptae conditioni satisfieri, si singulis fasciis omnes diversae litterae tam latinae quam graecae inscribantur. Sin autem eveniat, ut in quapiam fascia

eadem littera bis vel ter occurrat, semper necesse est, ut summa omnium litterarum in eadem fascia occurrentium aequalis sit summae omnium litterarum sive latinarum $a+b+c+d+$ etc. sive graecarum $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ etc.

I. SPECIES QUADRATORUM IN 9 CELLULAS DIVISORUM

7. Cum igitur pro hac specie sit $x=3$, totidem habebimus litteras latinas a, b, c totidemque graecas α, β, γ, at vero litterarum latinarum valores hic erunt 0, 3, 6, graecarum vero 1, 2, 3. Nunc igitur a latinis a, b, c incipiamus, ac facile erit eas nostro quadrato in 9 cellulas diviso ita inscribere, ut in singulis fasciis tam horizontalibus quam verticalibus omnes hae tres litterae occurrant, veluti ex hoc schemate videre licet

$$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix}$$

ubi etiam in altera diagonali eaedem tres litterae a, b, c reperiuntur, in altera vero eadem littera c ter repetitur; facile autem intelligitur fieri plane non posse, ut in ambabus diagonalibus simul omnes litterae fiant diversae; haec autem circumstantia nihil turbat, dummodo summa istius diagonalis, scilicet $3c$, aequalis sit summae reliquarum fasciarum $a+b+c$; hoc est, dummodo fuerit $2c=a+b$. Unde manifestum est pro c sumi debere 3, litteris vero a et b assignari valores 0 et 6; sic enim fiet $2c=a+b$. Pro lubitu autem poni poterit sive $a=0$ sive $b=0$; hoc observato summa ex singulis fasciis resultans est $a+b+c=9$.

8. Simili modo litteras graecas in tale quadratum distribuere licebit; talem autem figuram ordine inverso repraesentemus

$$\begin{matrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma \end{matrix}$$

ubi necesse est, ut sit $2\gamma=\alpha+\beta$ ideoque $\gamma=2$. Sic enim, si singulas cellulas prioris figurae cum singulis huius figurae ordine naturali combinemus, patebit quamlibet litteram latinam cum singulis graecis combinatum iri, ita

ut ex hac coniunctione omnes numeri ab 1 usque ad 9 resultent; haec autem combinatio sequentem producet figuram

$$\begin{array}{ccc} a\gamma & b\beta & c\alpha \\ b\alpha & c\gamma & a\beta \\ c\beta & a\alpha & b\gamma \end{array}$$

ubi notetur binas litteras iunctas non productum, sed aggregatum designare.

9. Cum igitur in hac figura sumi debeat $c = 3$ et $\gamma = 2$, ita ut litteris a et b valores 0 et 6, litteris autem α et β valores 1 et 3 tribui debeant, si sumamus $a = 0$ et $b = 6$, tum vero $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, sequens orietur quadratum magicum

$$\begin{array}{ccc} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{array}$$

ubi quaelibet fascia summam dat 15. Si valores litterarum a et b, item α et β permutare velimus, facile intelligitur, inde tantum situm quadrati mutatum iri.

10. Haec quidem dispositio tam latinarum quam graecarum litterarum per se satis est perspicua, sed praecipuum momentum in hoc est positum, ut facta combinatione singulae litterae latinae cum singulis graecis coniungantur, id quod in nostra combinatione casu evenisse videtur. Ut igitur in hoc negotio nihil casui tribuamus, ante omnia observemus ordinem litterarum graecarum α, β, γ nullo modo ab ordine latinarum a, b, c pendere, unde pro qualibet fascia definita cum litteris latinis cognomines graecas combinare licebit, ita ut α cum a, β cum b et γ cum c combinetur; ita si prima fascia horizontalis statuatur $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, quoniam in nulla fascia sive horizontali sive verticali eadem littera graeca bis occurrere debet, facile patet secundam fasciam horizontalem fore $b\gamma$, $c\alpha$, $a\beta$, tertiam vero $c\beta$, $a\gamma$, $b\alpha$; unde hoc quadratum resultat

$$\begin{array}{ccc} a\alpha & b\beta & c\gamma \\ b\gamma & c\alpha & a\beta \\ c\beta & a\gamma & b\alpha \end{array}$$

ubi, quia in diagonali sinistra eadem littera graeca α ter occurrit, necesse est, ut fiat $3\alpha = \alpha + \beta + \gamma$ ideoque $2\alpha = \beta + \gamma$; quamobrem hinc valor ipsius α determinatur, scilicet $\alpha = 2$, quemadmodum vidimus sumi debere $c = 3$; hinc autem nulla nova quadrata magica nascuntur.

11. Quanquam in hac prima specie dispositio litterarum graecarum nulla laborat difficultate, tamen pro quadratis plurium cellularum plurimum intererit certam regulam tradere, secundum quam litterae graecae rite inscribi queant, postquam latinae iam debite fuerint dispositae; hunc in finem eligatur fascia quaepiam media sive horizontalis sive verticalis sive etiam diagonalis, ita ut ad utramque partem istius fasciae in cellulis inde aeque remotis ubique duae litterae latinae diversae reperiantur, veluti hic evenit in columna media verticali, circa quam in prima horizontali reperiuntur litterae a et c, in secunda b et a, in tertia vero c et b, ubi binae litterae diversae sibi ubique respondent.

12. Postquam autem talis columna media fuerit inventa, in ea singulae litterae latinae cum graecis cognominibus combinentur, tum vero in locis utrinque respondentibus litterae graecae cognomines permutentur; hocque modo ista figura resultabit

$$\begin{array}{ccc} a\gamma & b\beta & c\alpha \\ b\alpha & c\gamma & a\beta \\ c\beta & a\alpha & b\gamma \end{array}$$

ubi certi sumus cum singulis latinis litteris omnes graecas combinari. Ceterum, ut conditioni diagonalium satisfiat, necesse est, quemadmodum iam notavimus, ut sumatur

$$2c = a + b \quad \text{et} \quad 2\gamma = \alpha + \beta.$$

Haec autem figura non discrepat ab ea, quam supra § 8 invenimus. Denique hic observasse iuvabit, quomodocunque fasciae sive horizontales sive verti-

cales inter se permutentur, inde in summis tam fasciarum horizontalium quam verticalium nihil mutari. In diagonalibus autem hinc ingens discrimen nasci poterit; ita si prima columna verticalis auferatur et ad sinistram apponatur, orietur haec figura

$$\begin{array}{ccc} b\beta & c\alpha & a\gamma \\ c\gamma & a\beta & b\alpha \\ a\alpha & b\gamma & c\beta \end{array}$$

ubi ob fascias diagonales sumi debebit

$$2a = b + c \quad \text{et} \quad 2\beta = \alpha + \gamma,$$

id quod in omnibus transpositionibus est notandum, quae observatio in sequentibus speciebus maximi erit momenti.

II. SPECIES QUADRATORUM IN 16 CELLULAS DIVISORUM

13. Cum ergo hic sit $x = 4$, quatuor habebimus litteras latinas a, b, c, d, quarum valores sunt 0, 4, 8, 12, totidemque etiam litteras graecas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, quarum valores erunt 1, 2, 3, 4. Primo igitur tali quadrato quatuor istas litteras latinas ita inscribamus, ut tam in omnibus fasciis horizontalibus quam verticalibus omnes hae quatuor litterae occurrant, atque ut hoc etiam, si fieri potest, in ambabus diagonalibus usu veniat.

14. Quoniam igitur inter has litteras a, b, c, d nullus ordo praescribitur, eas in prima columna horizontali ordine inscribamus, tum vero etiam fasciae diagonali sinistrae, ubi in cellula secunda huius fasciae diagonalis vel litteram c vel d scribi oportebit; scribamus igitur c et iam reliqua omnia determinabuntur, dummodo caveatur, ne eadem littera bis in eandem fasciam sive horizontalem sive verticalem inferatur; hoc modo nanciscemur sequentem figuram

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \end{array}$$

ubi adeo etiam altera diagonalis omnes quatuor litteras continet, ita ut hic

nulla conditio circa valores litterarum a, b, c, d praescribatur. Hic quidem cellulae diagonalis secundae etiam inscribere potuissemus litteram d, verum figura hinc resultans non aliter nisi situ ab hac figura discreparet, ita ut haec figura omnes casus possibiles complecti sit censenda.

15. Iam pro litteris graecis inscribendis, quoniam nulla datur fascia media, neque inter horizontales neque verticales, fasciam diagonalem a, c, d, b pro media illa accipiamus, mox autem deprehendemus in cellulis utrinque aeque remotis et respondentibus ubique binas litteras inter se diversas reperiri; unde regula supra § 11 data tuto uti licebit. Primo igitur litteris in hac diagonali dispositis iungamus graecas cognomines, deinde in cellulis respondentibus litteras graecas cognomines permutemus; hocque modo sequens figura formabitur

$$\begin{array}{cccc} a\alpha & b\delta & c\beta & d\gamma \\ d\beta & c\gamma & b\alpha & a\delta \\ b\gamma & a\beta & d\delta & c\alpha \\ c\delta & d\alpha & a\gamma & b\beta \end{array}$$

16. In hac igitur figura omnes quatuor litterae tam latinae quam graecae in omnibus fasciis tam directis quam diagonalibus occurrunt; unde quaterni valores numerici his litteris pro lubitu sine ulla limitatione tribui possunt. Cum igitur quatuor litterae 24 variationes recipere queant, hinc omnino 576 diversae figurae formari poterunt, ubi quidem plures tantum ratione situs a se invicem discrepabunt.

17. Neutiquam vero hinc concludere licet in hac figura omnia plane quadrata magica huius speciei contineri. Praeter ea enim plurima alia exhiberi possunt, ubi non in singulis fasciis omnes quatuor litterae tam latinae quam graecae reperiuntur, nihilo vero minus conditiones praescriptae adimplentur; tales autem formae per transpositionem columnarum sive horizontalium sive verticalium oriri possunt; veluti si in superiore figura prima columna verticalis in finem transponatur, orietur haec figura

$$\begin{array}{cccc} b\delta & c\beta & d\gamma & a\alpha \\ c\gamma & b\alpha & a\delta & d\beta \\ a\beta & d\delta & c\alpha & b\gamma \\ d\alpha & a\gamma & b\beta & c\delta \end{array}$$

ubi quidem in omnibus fasciis tam horizontalibus quam verticalibus omnes litterae tam latinae quam graecae etiamnunc reperiuntur, verum in diagonali a sinistra ad dextram descendente duae tantum litterae latinae occurrunt, scilicet b et c, graecae autem pariter tantum duae, α et δ. Contra vero in altera diagonali tantum hae duae litterae latinae a et d, graecae vero, ut ante, tantum α et δ.

18. Ut igitur haec figura conditionibus praescriptis satisfaciat, non amplius singulis litteris singulos valores numericos tribuere licet, verum haec limitatio adiici debet, ut pro litteris latinis fiat

$$b + c = a + d,$$

pro graecis autem ut pariter sit

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma;$$

quamobrem si sumamus $a = 0$, statui oportet $d = 12$, ut fiat $b = 4$ et $c = 8$, vel vice versa $c = 4$ et $b = 8$. Simili modo pro graecis litteris si sumatur $\alpha = 1$, fieri debet $\delta = 4$, tum vero $\beta = 2$ et $\gamma = 3$. Unde nascitur istud quadratum magicum determinatum

$$\begin{array}{rrrr} 8 & 10 & 15 & 1 \\ 11 & 5 & 4 & 14 \\ 2 & 16 & 9 & 7 \\ 13 & 3 & 6 & 12 \end{array}$$

ubi manifesto summa per singulas fascias est 34. Tales autem formae limitatae plurimis aliis modis per transpositionem columnarum formari poterunt.

19. Neque vero etiam absolute requiritur, ut per singulas columnas sive verticales sive horizontales omnes litterae tam latinae quam graecae occurrant, verum etiam in his columnis fieri potest, ut tantum binae litterae sive latinae sive graecae ingrediantur, dummodo earum summa sit semissis omnium quatuor. Pro huiusmodi autem figuris condendis operationibus peculiaribus opus est, pro quibus vix certae regulae praescribi possunt, dummodo litterae tam latinae quam graecae ita disponantur, ut non solum per omnes fascias debitam summam efficiant, sed etiam cum singulis latinis omnes graecae combinentur.

20. Ut huius operationis exemplum demus, statuamus primo esse

$$a + d = b + c,$$

ac litteras latinas ita disponamus, ut sequitur,

$$\begin{array}{cccc} a & a & d & d \\ d & d & a & a \\ b & b & c & c \\ c & c & b & b \end{array}$$

ubi per omnes plane fascias summa numerorum est eadem, pro litteris autem graecis per diagonalem sinistram cum singulis litteris latinis graecae cognomines combinentur, quandoquidem circa hanc fasciam utrinque binae litterae diversae dispositae reperiuntur, quibuscum igitur litterae graecae permutatae coniungantur, unde sequens nascetur figura

$$\begin{array}{cccc} a\alpha & a\delta & d\beta & d\gamma \\ d\alpha & d\delta & a\beta & a\gamma \\ b\delta & b\alpha & c\gamma & c\beta \\ c\delta & c\alpha & b\gamma & b\beta \end{array}$$

ubi ergo pro litteris graecis necesse est, ut capiatur

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma;$$

ita si capiamus $a = 0$, $b = 4$, $c = 8$, $d = 12$ et $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ et $\delta = 4$, orietur istud quadratum magicum

1	4	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

21. Plures aliae huiusmodi figurae formari possunt, cuiusmodi est sequens

$a\alpha$	$d\beta$	$a\delta$	$d\gamma$
$b\delta$	$c\gamma$	$b\alpha$	$c\beta$
$d\alpha$	$a\beta$	$d\delta$	$a\gamma$
$c\delta$	$b\gamma$	$c\alpha$	$b\beta$

ubi manifestum est pro litteris latinis sumi debere

$$a+d=b+c,$$

pro graecis autem

$$\alpha+\delta=\beta+\gamma,$$

unde, si ut ante valores sumantur, orietur sequens quadratum magicum

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

22. In his omnibus formis tam litterae latinae quam graecae per omnes fascias eandem summam constituunt; fieri autem potest, ut ne hoc quidem usu veniat, verum tamen summa omnium debitum valorem obtineat, cuiusmodi anomalias recensere eo magis inutile foret, cum pro talibus casibus nullae certae regulae tradi queant, quamobrem ex sequentibus speciebus eos casus potissimum contemplabimur, quibus significatio litterarum tam latinarum quam graecarum nulla restrictione limitatur.

III. SPECIES QUADRATORUM IN 25 CELLULAS DIVISORUM

23. Hic igitur occurrent tam quinque litterae latinae a, b, c, d, e quam graecae α, β, γ, δ, ε, quarum illarum valores erunt 0, 5, 10, 15, 20, harum vero 1, 2, 3, 4, 5; ambos igitur harum litterarum ordines cellulis quadrati ita inscribi oportet, ut in singulis fasciis tam horizontalibus quam verticalibus atque etiam diagonalibus omnes litterae occurrant.

24. Primum igitur huc quadrato per supremam fasciam horizontalem litteras latinas ordine inscribamus, deinde fasciam diagonalem sinistram litteris compleamus, ita ut in nullis reliquarum fasciarum eadem littera bis occurrat, id quod plus uno modo fieri potest. Hac autem fascia constituta altera diagonalis sponte impletur ut in figura annexa videre licet

$a\varepsilon$	$b\delta$	$c\gamma$	$d\beta$	$e\alpha$
$e\beta$	$c\alpha$	$d\delta$	$a\gamma$	$b\varepsilon$
$d\alpha$	$e\gamma$	$b\beta$	$c\varepsilon$	$a\delta$
$b\gamma$	$d\varepsilon$	$a\alpha$	$e\delta$	$c\beta$
$c\delta$	$a\beta$	$e\varepsilon$	$b\alpha$	$d\gamma$

Deinde sub cellula media scribi debet a et super ea d, unde columna media verticalis iam erit completa, tum vero reliquae fasciae sponte se produnt.

25. Pro litteris graecis non opus est ad fasciam diagonalem confugere, sed si consideremus columnam verticalem mediam, utrinque in cellulis respondentibus deprehendimus binas diversas litteras; quamobrem in hac fascia singulis litteris latinis adscribamus graecas cognomines et in locis respondentibus litteras graecas cognomines permutemus, quemadmodum in figura fecimus.

26. In hac igitur figura nulla plane limitatio praescribitur, sed tam pro litteris latinis quam pro graecis quoslibet numerorum respondentium accipere licet; quare cum quinae litterae 120 permutationes admittant, hinc omnino 14400 variationes oriri possunt.

27. Quodsi etiam hic fascias sive horizontales sive verticales inter se permutare velimus, plures alias formas impetrabimus, quae autem ob diagonales plerumque certas determinationes postulabunt; veluti si hic prima columna verticalis in finem transponatur, orietur sequens forma

$$\begin{array}{ccccc} b\delta & c\gamma & d\beta & e\alpha & a\varepsilon \\ c\alpha & d\delta & a\gamma & b\varepsilon & e\beta \\ e\gamma & b\beta & c\varepsilon & a\delta & d\alpha \\ d\varepsilon & a\alpha & e\delta & c\beta & b\gamma \\ a\beta & e\varepsilon & b\alpha & d\gamma & c\delta \end{array}$$

ubi quidem in omnibus fasciis tam horizontalibus quam verticalibus omnes litterae occurrunt; verum ut simul diagonalibus satisfiat, tam haec summa

$$3c + b + d + 3\delta + \beta + \varepsilon$$

quam ista

$$3a + b + c + 3\varepsilon + \alpha + \beta$$

praescriptam summam omnium latinarum et graecarum litterarum, scilicet

$$a + b + c + d + e + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon,$$

conficiat, quamobrem hinc nascentur hae duae aequationes

$$2c + 2\delta = a + e + \alpha + \gamma$$

et

$$2a + 2\varepsilon = d + e + \gamma + \delta,$$

quibus conditionibus pluribus modis satisfieri poterit, quin etiam seorsim tam litterae latinae quam graecae ita determinari poterunt, ut fiat

$$1)\ \ 2c = a + e, \quad 2)\ \ 2a = d + e, \quad 3)\ \ 2\delta = \alpha + \gamma \quad \text{et} \quad 4)\ \ 2\varepsilon = \gamma + \delta.$$

Evidens enim est duabus prioribus satisfieri, si hae litterae d, b, a, c, e progressionem arithmeticam constituant, id quod fit sumendo

$$d = 0, \ \ b = 5, \ \ a = 10, \ \ c = 15 \ \text{ et } \ e = 20;$$

duae reliquae conditiones adimplebuntur, si litterae graecae hoc ordine dispositae α, β, δ, ε, γ in progressione arithmetica procedant, id quod fiet sumendo

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \delta = 3, \quad \varepsilon = 4 \quad \text{et} \quad \gamma = 5,$$

unde oritur istud quadratum

8	20	2	21	14
16	3	15	9	22
25	7	19	13	1
4	11	23	17	10
12	24	6	5	18

hic scilicet ubique eadem summa prodit $= 65$.

28. Talis autem distributio litterarum haud exiguam operam et circumspectionem postulat, praecipue in speciebus superioribus, ubi plura elementa prorsus arbitrio nostro relinquuntur, ita ut numerus talium figurarum continuo fiat maior; verum si eam conditionem omittere velimus, qua nulla plane restrictio inter valores litterarum praescribatur, labor satis commodus reddi potest; si enim litterae c valor medius, qui est 10, tribuatur, reliquae vero arbitrio nostro relinquantur, eadem littera c alteram diagonalem complere poterimus, unde reliquae litterae ordine naturali sequantur, quemadmodum ex hac figura perspicietur

c	d	e	a	b
b	c	d	e	a
a	b	c	d	e
e	a	b	c	d
d	e	a	b	c

Nunc in fascia media horizontali singulis litteris latinis graecae cognomines adscribantur, tum vero circa eam utrinque cognomines graecae permutentur; hincque orietur sequens forma

$$\begin{array}{ccccc}
c\delta & d\varepsilon & e\alpha & a\beta & b\gamma \\
b\varepsilon & c\alpha & d\beta & e\gamma & a\delta \\
a\alpha & b\beta & c\gamma & d\delta & e\varepsilon \\
e\beta & a\gamma & b\delta & c\varepsilon & d\alpha \\
d\gamma & e\delta & a\varepsilon & b\alpha & c\beta
\end{array}$$

unde patet pro γ medium valorem, qui est 3, accipi debere; quodsi ergo hic sumamus ordine

$$a=0, \quad b=5, \quad c=10, \quad d=15, \quad e=20$$

et

$$\alpha=1, \quad \beta=2, \quad \gamma=\ 3, \quad \delta=\ 4, \quad \varepsilon=\ 5,$$

orietur sequens quadratum magicum

14	20	21	2	8
10	11	17	23	4
1	7	13	19	25
22	3	9	15	16
18	24	5	6	12

29. Per regulam autem vulgarem circa formationem quadratorum imparium, quae ubique tradi solet, ista figura formatur

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

quae num in forma nostra contineatur, dispiciamus ac primo quidem pro

diagonali sinistra ob $c = 10$ statui debet

$$\delta = 1, \quad \alpha = 2, \quad \gamma = 3, \quad \varepsilon = 4 \quad \text{et} \quad \beta = 5,$$

tum vero

$$b = 0, \quad d = 20, \quad a = 15, \quad e = 5.$$

Ex quibus valoribus hoc ipsum quadratum nascitur.

30. Plures alias huiusmodi formas satis regulares tam in hac specie quam sequentibus excogitare licet; unde numerus quadratorum magicorum facili negotio in immensum augeri poterit. Vix autem unquam certi esse possemus nos omnes casus possibiles exhausisse, etiamsi eorum numerus certe non sit infinitus. Maxime autem sine dubio foret desiderandum, ut regulae magis generales et ad usum practicum accommodatae detegerentur, ne opus sit plerasque operationes quasi palpando peragere. Pulcherrimum enim certe incrementum theoriae combinationum hinc esset accessurum.

IV. SPECIES QUADRATORUM IN 36 CELLULAS DIVISORUM

31. Quoniam hic numerus variationum nimis est magnus et plurimae determinationes arbitrio nostro relinquuntur, afferamus hic tantum regulam specialem, qua litterae tam latinae quam graecae facile in ordinem debitum disponi queant, litteris scilicet sex latinis tales valores tribuantur, ut sit

$$a + f = b + e = c + d$$

similique modo pro graecis

$$\alpha + \zeta = \beta + \varepsilon = \gamma + \delta;$$

tum enim ad similitudinem § 20 singulis fasciis horizontalibus binas litteras latinas coniugatas inscribamus, in columnas vero verticales eiusmodi binas litteras graecas disponamus hocque modo obtinebitur sequens figura[1])

1) Hoc quidem quadratum non succedit: in altera enim diagonali $b\beta$, in altera $e\varepsilon$ bis apparent. L. G. D.

$a\alpha$	$a\zeta$	$a\beta$	$f\varepsilon$	$f\gamma$	$f\delta$
$f\alpha$	$f\zeta$	$f\beta$	$a\varepsilon$	$a\gamma$	$a\delta$
$b\alpha$	$b\zeta$	$b\beta$	$e\varepsilon$	$e\gamma$	$e\delta$
$e\zeta$	$e\alpha$	$e\varepsilon$	$b\beta$	$b\delta$	$b\gamma$
$c\zeta$	$c\alpha$	$c\varepsilon$	$d\beta$	$d\delta$	$d\gamma$
$d\zeta$	$d\alpha$	$d\varepsilon$	$c\beta$	$c\delta$	$c\gamma$

32. Hinc autem iam satis clare intelligitur talem litterarum dispositionem in omnibus speciebus paribus cum successu[1]) adhiberi posse, pro speciebus autem imparibus methodus ante descripta, qua litterae medios valores tenentes per ambas diagonales continuo repetuntur, reliquae vero litterae hinc in ordine naturali se insequuntur, ita ut, quotcunque cellulae in quadrato proponantur, semper in nostra potestate sit plurima quadrata magica construere, etiamsi regulae hinc traditae maxime sint speciales.

1) Sed vide notam praecedentem atque Commentationem 530 huius voluminis. In *Adversariis mathematicis*, quorum fragmenta p. 535 sunt edita, invenitur hoc quadratum magicum 36 cellularum

3	36	30	4	11	27
22	13	35	12	14	15
16	18	8	31	17	21
28	20	6	29	19	9
32	23	25	2	24	5
10	1	7	33	26	34

quod secundum EULERUM (vide p. 536) perfectum est appellandum, quia ubique tam in fasciis horizontalibus et verticalibus quam in diagonalibus eadem summa prodit $= 111$. L. G. D.

VERA AESTIMATIO SORTIS IN LUDIS[1]

Commentatio 811 indicis ENESTROEMIANI

Opera postuma **1**, 1862, p. 315—318

Multis laborat difficultatibus mensura sortium seu expectationum, quas habent collusores vel de deposito certantes vel victi victori designatam pecuniae summam solvere obligati. Ea nimirum mensura, cuius fundamenta PASCHALIUS[2]) posuit et post eum HUGENIUS[3]), JAC. BERNOULLI aliique celeberrimi viri insigniter excoluerunt. Secundum horum sententiam non imprudenter ago, si ludum suscipio, quo aeque facile evenire potest, ut centum Rublones vel accipiam vel perdam. Sed si omnes meae opes tantum 100 R. valent,

---

1) Vide Commentationes 201, 313, 823 huius voluminis atque praefationem editoris. L. G. D.

2) BL. PASCAL (1623—1662) novam suam methodum de mensura probabilitatis cum P. FERMAT (1601—1665) communicavit. Vide PASCAL, *Oeuvres mathém. et philos.*, La Haye et Paris 1779, t. 4, p. 435—443; vide etiam FERMAT, *Varia opera mathematica*, Tolosae 1679, p. 179—188, vel *Oeuvres de FERMAT*, Paris, t. 2 (1894), p. 288—314. Confer denique PASCAL, *Traité du triangle arithmétique* (1654), Paris 1665. L. G. D.

3) CHR. HUYGENS (1629—1695), *De ratiociniis in ludo aleae* (1656), *Opera varia*, Lugd. Batav. 1724, p. 723. Hunc tractatum in linguam latinam transtulit et operi suo *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, Lugd. Batav. 1657, adiecit FR. VAN SCHOOTEN (1615—1660) et eundem recepit JAC. BERNOULLI in primam partem suae *Artis coniectandi* (vide notam 1 p. 278). — P. R. DE MONTMORT (1678—1719), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* Paris 1708, 2. éd., revue et augmentée de plusieurs lettres, Paris 1713. — A. DE MOIVRE (1667—1754), *De mensura sortis*, Philosophical Transactions (London) **27**, 1711, numb. 329, p. 213—264; *The doctrine of chances*, London 1718, 2. ed. 1738, 3. ed. 1756. — TH. SIMPSON (1710—1761), *A treatise on the nature and laws of chance,* London 1740. L. G. D.

imprudentissime mihi acturum videor hunc ludum suscipiens; lucrum enim respectu damni, quod aeque facile accidere potest, nequaquam satis est grande. Casu secundo consequor 100 R. eoque ergo duplo ditior fio; casu adverso vero teneor meos 100 R. alteri tradere, hoc igitur in extremam paupertatem pervenio et infinities pauperior fio. Quis autem sanus se extremae paupertati et deterrimae conditioni exponere volet, ut duplo tantum ditior reddatur? Sin vero bona mea multo essent maiora et fere infinita, tunc minus dubitarem huiusmodi ludum inire, cum casu secundo tanto fere efficiar ditior quanto adverso pauperior.

Maxime huius rei veritas evincitur sequenti ludo: Promittitur ipsi A iactus tessera instituenti, si numerus punctorum fuerit par, solvere 1 R.; si secundi iactus numerus punctorum fuerit par, pro eo solvere 2 R.; pro tertio, si punctorum numerus itidem par sit, 4 R.; pro quarto 8 R. et ita porro, quoad impar accidat punctorum numerus, quo in casu nihil accipit A ludusque finitur. Quaeritur expectatio ipsius A, seu quanti hanc conditionem alii vendere fas sit. Invenitur autem ex regula ab auctoribus citatis tradita expectatio ipsius A valere infinitum Rublonum numerum. Egregie vero hic interrogat clariss. NICOLAUS BERNOULLI[1]), quis tam esset stolidus, qui non mallet

1) Confer D. BERNOULLI, *Specimen theoriae novae de mensura sortis,* Comment. acad. sc. Petrop. **5** (1730/1), 1738, p. 175—192. Legitur p. 187—188: „Proposuit aliquando Cel. NICOLAUS BERNOULLI, in Academia Basiliensi Iuris utriusque Professor, Honoratissimus meus Patruelis, Cl. MONTMORTIO quinque problemata, quae videre est *dans l'analyse sur les jeux de hazard de Mr. de Montmort,* p. 402. Horum problematum ultimum huc redit, *Petrus in altum proiicit nummum, idque donec in terram delapsus notatam semel ostenderit frontem: si vero id primo contingat iactu, tenetur Paulo dare ducatum unum; si secundo duos; si tertio quatuor; si quarto octo, et sic porro duplicando quovis iactu ducatorum numerum. Quaeritur sors Pauli?* Huius problematis mentionem fecit praefatus meus Patruelis in epistola, quam ad me dedit, cupiens de eo sententiam meam scire. Quandoquidem calculus dictet, sortem Pauli infinitam esse, nec tamen ullus sanae mentis, ut dicit, futurus sit, qui non libentissime spem suam vendiderit pro summa viginti ducatorum."

Atque ad finem eiusdem dissertationis sequens adiecta est nota (p. 189—192):

„*Praelecta hac dissertatione coram Societate misi eius apographum supra memorato D:no* NICOLAO BERNOULLI, *ut intelligerem quid de mea propositae suae difficultatis solutione sentiret. Is vero in epistola, quam A. 1732. ad me scripsit, testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modo quivis suae sortis aestimator sit, aliter vero se rem habere, si tertius instar iudicis secundum aequitatem et iustitiam unicuique collusorum sortem assignare debeat. Id ipse pariter in § 2 exposui.*

Communicavit deinde Vir. Clar. mecum sententiam, quam de eadem difficultate tulit Cel. CRAMERUS *aliquot ante annis quam dissertationem meam conscripsissem, et quam usque adeo meae con-*

20 R. accipere quam propositam conditionem. Ex quo maxime elucet discrepantia inter aestimationem sortis secundum regulas et eam, quam sanae mentis homo esset facturus, quippe regulae requirunt innumeros Rublones tanquam aequivalens ludi propositi, hic vero viginti Rublonibus merito se contentum esse posse putat eumque amentem existimat, qui vel 20 R. tantum pro hac conditione soluturus esset.

Sed in hac quaestione, ut in omnibus aliis, praecipue attendere convenit ad opes eius, cuius sors quaeritur; quo enim quisque plus habet, pluris etiam huiusmodi conditiones aestimabit, et cui infinitae sunt opes, is ludum propo-

---

formem inveni, ut mirum sit in tali argumento tam accurate nos consentire potuisse. Igitur operae pretium erit verba apponere, quibus Cl. CRAMERUS *ipse sententiam suam aperuit in litteris A. 1728. ad Patruelem meum datis. Ita autem ille*":

„„Je ne sai si je ne me trompe, mais je crois tenir la resolution du cas singulier que Vous avez proposé à Mr. DE MONTMORT dans Votre lettre du 9. 7bre 1713. Probl. 5. pag. 402. Pour rendre le cas plus simple je supposerai que A jette en l'air une piece de monnoye, B s'engage de lui donner 1 ecu si le coté de la croix tombe le premier coup, 2 si ce n'est que le second, 4 si c'est le troisieme coup, 8 si c'est le quatrieme coup etc. Le paradoxe consiste en ce que le calcul donne pour l'equivalent que A doit donner à B une somme infinie, ce qui paroit absurde, puis qu'il n'y a personne de bon sens qui voulut donner 20 ecus. On demande la raison de cette difference entre le calcul mathematique et l'estime vulgaire. Je crois qu'elle vient de ce que (*dans la theorie*) les mathematiciens estiment l'argent à proportion de sa quantité et (*dans la pratique*) les hommes de bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. Ce qui rend l'esperance mathematique infinie, c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir, si le coté de la croix ne tombe que bien tard, le centieme ou le millieme coup. Or cette somme, si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage pas plus à accepter le parti, que si elle n'étoit que 10 ou 20 millions d'ecus. Supposons donc que toute somme au dessus de 10 millions ou (pour plus de facilité) au dessus de

$$2^{24} = 16777216$$

d'ecus lui est egale, ou plutot que je ne puisse jamais recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que vienne le coté de la croix, et mon esperance sera

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\times 1+\tfrac{1}{4}\times 2+\tfrac{1}{8}\times 4+\cdots+\tfrac{1}{2^{25}}\times 2^{24}+\tfrac{1}{2^{26}}\times 2^{24}+\tfrac{1}{2^{27}}\times 2^{24}+\text{etc.}\\ &=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots\cdots\cdot\ \text{jusqu'à 24 termes,}\ +\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\text{etc.}\\ &=12+1=13.\end{aligned}$$

Ainsi moralement parlant, mòn esperance est reduite à 13 ecus et mon equivalent à autant, ce qui paroit bien plus raisonnable que de le faire infini.""

„*Vaga est hactenus ista solutionis explicatio et contradictioni obnoxia; si enim verum sit, non maiorem nobis videri summam* 2^{25} *quam* 2^{24}, *nulla omnino attentio facienda erit ad summam, quam*

situm infinito pecuniae numero emere ratione posset, parte tamen infinitesima tantum suarum opum. Regulae igitur aestimandarum sortium expositae ad opulentissimos pertinent homines, aut si id, quod ludo acquiri et amitti potest, rationem habet minimam ad opes collusorum. Si vero collusoribus opes sint finitae et lucra damnaque rationem finitam ad opes teneant, regulae illae correctionem desiderant. Nisi enim hoc praestatur, homines ad eas aestimandae sortis suae causas confugere tuto nequeunt et ita illae nullius prorsus essent usus. Quocirca ad veram cuiusque sortis existimationem indagandam necesse est praeter ludi conditiones etiam opes ludentium considerare et conclusiones ab iis pendentes conficere. Is ergo ludus mihi non aequus videtur, quo a vel lucror vel perdo, sed is demum iustus est censendus, quo a vicibus vel ditior vel pauperior reddor, siquidem utrumque aeque facile ac-

---

acquirere possim post vigesimum quartum iactum, quippe ante vigesimum quintum iactum faciendum iam possideam $2^{24}-1$, *quod non differt in hac theoria ab* 2^{24}. *Eodem igitur iure spem meam* 12 *scudos valere dici potest quam* 13.

Id vero nequaquam dico ad impugnandum Auctoris principium, quod meum quoque est, que les hommes de bon sens doivent estimer l'argent à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire, *seu potius ne quis inde occasionem capiat male sentiendi de ipsa theoria. Verum id ipsum etiam expressis indicat verbis Cl.* Cramerus, *quae plane ad mentem nostram sunt. Sic igitur pergit":*

„„On le (l'equivalent) pourra encor trover plus petit, en faisant quelque autre supposition de la valeur morale des richesses; car celle que je viens de faire n'est pas exactement juste, puisqu'il sera vrai que 100 millions font plus de plaisir que 10 millions, quoiqu'ils n'en fassent pas 10 fois plus. Par exemple, si l'on vouloit supposer que la valeur morale des biens fut comme la racine quarrée de leurs quantités mathematiques, c'est à dire, que le plaisir que me fait 40 000 000 fut double du plaisir que me fait 10 000 000, alors mon esperance morale seroit

$$\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{4}+\frac{1}{16}\sqrt{8}+\text{etc.}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot$$

Mais cette quantité n'est pas l'equivalent, car l'equivalent doit être non pas egal à mon esperance, mais tel que le chagrin de sa perte soit egal à l'esperance morale du plaisir que j'espere de recevoir en gagnant. Donc, l'equivalent doit être (par supposition)

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{6-4\sqrt{2}}=2{,}9 \text{ etc.},$$

moins que 3, ce qui est bien mediocre et que je crois pourtant aprocher plus de l'estime vulgaire que 13. etc."“

Epistola a Nicolao Bernoulli ad Patruelem Danielem data periit, epistola autem ab eodem auctore d. 9. Sept. 1713 ad P. R. de Montmort scripta typis expressa est in libro iam supra laudato Cel. P. R. de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 2. éd. Paris 1713, p. 401—402. L. G. D.

cidere potest, et in hoc casu mihi perinde est ludum sive suscipere sive recusare ad illum vero ludum nullo modo accederem, nisi essem ditissimus. Sed id etiam multo magis est certum eum esse stultissimum putandum, qui mecum secundum posteriorem conditionem ludum suscipere vellet et mihi 100 verbi gratia R. habenti, si lucrarer, 100 R. solvere, si vero perderem, tantum 50 R. a me recipere esset contentus. Ex hoc igitur iniustitia omnium ludorum perspicitur, nisi instituantur ab hominibus infinite divitibus.

Quantae autem cuiusque sunt opes et divitiae, non tantum ex argenti et bonorum quantitate, sed praeterea ex eius studiis et facultatibus, ex quibus ei quoque foenora affluere possunt [, censendum est]. Hoc igitur modo cuiusvis hominis opes determinari convenit simulque pecuniae quantitas aequivalens definiri potest. Quamobrem opibus cuiusvis certam quandam argenti quantitatem substituere licebit, quam *status* eius nomine in sequentibus appellabo, atque propterea quispiam in duplo meliorem statum pervenire dicetur, cuius opes duplo fiunt maiores, vel potius qui censet se duplo opulentiorem esse factum. Is enim demum duplo ditior est aestimandus, qui aeque proclivis est duplam argenti summam erogare in casu, quo antea simplam tantum expendere non dubitavit. His ergo praemissis, qui in ludo vel negotio quodam duos casus habet obiectos aeque proclives, quorum altero in statum b, altero in statum c reducitur, eius status valere putandus est $\sqrt{bc}$. Hic enim status tanto esse debet minor altero b, quanto est maior altero c. Qui igitur eum in statum $\sqrt{bc}$ collocare promiserit, ei sortem suam cedere iure potest. Simili modo, qui tres obvios habet casus, quorum unus ipsum in statum b, secundus in statum c et tertius in statum d constituit, eius status valere $\sqrt[3]{bcd}$ dicendus est aut ab alio, ut illi sortem suam cedat, in hunc statum $\sqrt[3]{bcd}$ constitui debet.

Regula ex his habetur haec: omnes status, qui singulis casibus evenire possunt, in se invicem multiplicentur et ex facto radix dignitatis tanti gradus, quot sunt casus, extrahatur; erit haec valor status expectationi aequivalentis. Secundum methodum hactenus usitatam oportet omnes status, qui singulis casibus evenire possunt, in unam summam coniicere eamque per casuum numerum dividere. Discrimen igitur inter has duas methodos in hoc consistit, quod nostra multiplicatione utitur, quando altera additione, item elevatione, quando haec ipsa multiplicatione; sive nos operationes geometrice instituimus, illi vero arithmetice, ita ut quas operationes hi ad ipsos

status accommodant, nos easdem in statuum logarithmos transferamus, eiusque, quod prodit, logarithmi numerus respondens nobis indicat statum ludentis quaesitum. Sint m casus, quibus in statum a, n casus, quibus in b, p casus, quibus in c constituor. Erit status meus medius seu expectationem meam repraesentans

$$\sqrt[m+n+p]{a^m b^n c^p};$$

nam $m+n+p$ est numerus omnium casuum et $a^m b^n c^p$ est factum omnium statuum, qui singulis casibus evenire possunt. Status medius vero ex regulis HUGENIANIS est

$$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p},$$

cui similis nostrae formulae logarithmus

$$\frac{mla+nlb+plc}{m+n+p}.$$

Valeat status meus A et oblati mihi sint casus m, quibus a lucror seu quibus in statum $A+a$ constituor, casus vero n, quibus b lucror seu in statum $A+b$ pervenio, casusque p, quibus c lucror ideoque statum $A+c$ adipiscor; erit status meus expectandus

$$\sqrt[m+n+p]{(A+a)^m(A+b)^n(A+c)^p};$$

aestimandus igitur sum lucrari

$$\sqrt[m+n+p]{(A+a)^m(A+b)^n(A+c)^p}-A.$$

Si ponatur A esse infinities maius quam a, b et c, erit

$$(A+a)^{\frac{m}{m+n+p}}=A^{\frac{m}{m+n+p}}+\frac{mA^{\frac{-n-p}{m+n+p}}a}{m+n+p},$$

$$(A+b)^{\frac{n}{m+n+p}}=A^{\frac{n}{m+n+p}}+\frac{nA^{\frac{-m-p}{m+n+p}}b}{m+n+p}$$

et

$$(A+c)^{\frac{p}{m+n+p}}=A^{\frac{p}{m+n+p}}+\frac{pA^{\frac{-m-n}{m+n+p}}c}{m+n+p};$$

horum factum est

$$A+\frac{pc+nb+ma}{p+n+m};$$

a quo si auferatur A, habebitur

$$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p},$$

quod est valor lucri mei; atque eadem est formula, ac si lucrum expectationis meae ex regulis HUGENII deduxissem. Ex quo id perspicitur, quod initio annotavi, si status colludentium infinite sint magni, regulas traditas veram cuiusque expectationem praebere. In formula vero nostra expectandum statum praebente facile perspicitur, si litterae a, b vel c loco lucri detrimentum significent, iis signum — praefigi debere.

Sit unus casus, quo ego bona A possidens adipiscor a, et unus, quo perdo b; erit status meus expectandus

$$=\sqrt{(A+a)(A-b)};$$

qui valor si maior fuerit quam A, lucrari spero et hic ludus statum meum meliorem efficere censendus est; gratis igitur conditionem hanc alii non cedo, sed ab eo postulo, ut mihi solvat

$$\sqrt{(A+a)(A-b)}-A,$$

quo in statum speratum collocer. Contra autem, si $\sqrt{(A+a)(A-b)}$ minor fuerit quam A, ludus ad meum damnum dirigitur ideoque optarem ludum deserere vel alium in meum locum constituere, cui, ut suscipiat, etiam

$$A-\sqrt{(A+a)(A-b)}$$

persolverem, non vero maiorem summam, quia vel hanc persolvere vel in ludo manere mihi perinde esset. Quando vero

$$\sqrt{(A+a)(A-b)}=A,$$

tum ludus mihi prorsus est indifferens neque dubito eum suscipere neque alii relinquere. Accedit vero hoc, quando est

$$Aa = Ab + ab \quad \text{vel} \quad A = \frac{ab}{a-b},$$

i. e. si excessus lucri super damnum est ad damnum ut lucrum ad meum statum. Huiusmodi igitur ludus mihi aequus est existimandus, non is, in quo est $a = b$. Si enim lucrum a aequale est damno b aeque proclivi, ludum semper, nisi sint mea bona infinita, ad meum damnum suscipio et tantum susceptio ludi aequiparanda est damno

$$A - \sqrt{(A^2 - a^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{A} + \frac{1}{8} \cdot \frac{a^4}{A^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{a^6}{A^5} + \frac{5}{128} \cdot \frac{a^8}{A^7} + \text{etc.}$$

REFLEXIONS
SUR UNE ESPECE SINGULIERE DE LOTERIE
NOMMEE LOTERIE GENOISE[1]

Lu à l'Académie de Berlin le 10 mars 1763

Commentatio 812 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 1, 1862, p. 319—335

Un Italien proposa autrefois un projet d'une espèce de loterie qui paraissait fort au goût de la plupart des hommes, à cause des gains très considérables qu'on y pouvait faire sans risquer presque rien. Le plan était entièrement différent des loteries ordinaires, parce que chacun pouvait déterminer non seulement sa mise, mais aussi la grandeur du gain auquel il voudrait aspirer. Il y avait plutôt quelque ressemblance avec le jeu de Pharaon[2]), à l'égard des mises arbitraires qu'on peut mettre sur une telle carte qu'on veut; mais il est pourtant différent par rapport aux prix que chacun peut choisir à volonté. L'arrangement de cette loterie dépend uniquement du calcul de probabilité, et l'entrepreneur, au lieu d'en tirer un profit fixe, risque de perdre très considérablement, quoique selon le plan dont je viens de parler, il soit probable qu'il gagne une bonne partie de tout l'argent qui y aura été mis. C'est à peu près comme si je m'engageais à payer à un autre 100 écus pour un qu'il m'aurait donné, en cas qu'il jette avec trois dés, la première fois, trois *six*; il serait bien possible que je perdisse à ce jeu 99 écus. Or, la probabilité de gagner un écu étant 215 fois plus grande que celle de perdre

1) Voir les mémoires 338 et 600 de ce volume et les deux lettres mentionnées dans la note 1 p. 113. L. G. D.

2) Voir le mémoire 313 de ce volume. L. G. D.

99 écus, l'avantage est de mon côté et est estimé valoir $\frac{29}{54}$ écus, ou un peu plus qu'un demi-écu. C'est à dire, si je m'engageais de cette manière envers 1000 personnes dont chacune m'aurait donné un écu, je pourrais estimer mon avantage à $537\frac{1}{27}$ écus, quoiqu'il soit possible que je perdisse 99000 écus. C'est sur ce pied qu'on pourra évaluer l'avantage de celui qui entreprendrait la loterie mentionnée, en comparant la mise de chacun avec la probabilité qu'il aura de gagner.

DESCRIPTION DE CETTE LOTERIE

Cette loterie consiste en 90 billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4 etc. jusqu'à 90, desquels on se propose de tirer au hasard 5 à un temps fixé; et alors, ces cinq numéros feront gagner ceux qui en auront auparavant choisi un ou deux ou trois, pour y attacher leurs mises. Car on peut participer à cette loterie de plusieurs manières différentes.

I. Ou on choisit à volonté un nombre qui ne surpasse point 90 et on paie aussi une somme d'argent qu'on jugera à propos. Alors, quand ce nombre se rencontre parmi les cinq qui seront tirés, on retirera un prix qui sera un certain multiple de la mise.

II. Ou on choisit deux nombres à la fois, auxquels on attache une certaine mise, et en cas que tous les deux se trouvent ensuite parmi les cinq tirés, on recevra un prix assez considérable à proportion de la mise. Or, si l'un d'eux seulement se trouve parmi les cinq, on reçoit aussi un prix moindre.

III. Ou on choisit trois nombres à la fois, auxquels on attache à volonté une certaine mise, et on peut attendre un prix quelques mille fois plus grand que la mise, en cas que tous les trois nombres se trouvent parmi les cinq tirés; mais les prix seront moindres, lorsque deux des nombres choisis, ou un seul s'y trouvera.

Je ne me souviens plus de la grandeur des prix en détail qu'on paie en chaque cas, ce qui ne contribue rien aux recherches que je me propose de faire; mais on comprend aisément qu'ils peuvent être très considérables pour le cas où trois nombres qu'on aura choisis se rencontrent parmi les cinq tirés. Et si l'on voulait admettre des quaternaires, le prix fixé pour le cas où tous les quatre nombres se trouveraient dans les cinq billets sortis pourrait au delà de 100000 fois surpasser la quantité de la mise.

Il est évident que ni le nombre 90 des billets, ni celui des 5 qu'on tire, n'est essentiel à la nature de cette loterie et qu'il est absolument libre d'établir un nombre de billets quelconque et d'en tirer enfin plus ou moins que cinq, ce qui me mène à des recherches plus générales qui peuvent servir ou à former d'autres plans de telles loteries, ou à examiner ceux qui pourront être proposés par d'autres.

Posons donc n pour le nombre de tous les billets marqués des nombres 1, 2, 3, . . . n et qu'on en tire au hasard t; et tout revient à déterminer la probabilité que, d'un certain nombre de numéros qu'on aura choisis, il se trouve ou un seul ou deux ou trois ou enfin tous dans les t billets qu'on va tirer. Or, selon le nombre des numéros, la détermination de la probabilité qu'on cherche se réduit aux problèmes suivants.

PROBLEME 1

1. *Le nombre de tous les billets étant* $=n$, *dont on doit tirer au hasard* t *billets, trouver la probabilité qu'un nombre choisi à volonté s'y trouvera.*

SOLUTION

Il est évident, par les premières règles de la probabilité, que, pour que le nombre choisi se trouve parmi les t billets qu'on va tirer, le nombre de tous les billets étant $=n$, la probabilité est

$$=\frac{t}{n},$$

et pour qu'il ne s'y trouve pas, la probabilité est

$$=\frac{n-t}{n}.$$

Donc, la solution fournit:

que le nombre choisi	la probabilité est
se trouve parmi les billets tirés	$\frac{t}{n}$
qu'il ne s'y trouve pas	$\frac{n-t}{n}$

COROLLAIRE 1

2. Donc, si le nombre de tous les billets est 90 et qu'on en tire 5, comme dans le cas proposé au commencement,

qu'un nombre choisi	la probabilité est
se trouve parmi les 5 billets	$\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$
et qu'il ne s'y trouve point	$\frac{85}{90}=\frac{17}{18}$

COROLLAIRE 2

3. Si l'on établissait 100 billets et qu'on en voulût tirer 10, ayant choisi un nombre à volonté, alors

que ce nombre se trouve	la probabilité est
parmi les 10 billets tirés	$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$
qu'il ne s'y trouve pas	$\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$

PROBLEME 2

4. *Le nombre de tous les billets étant* $=n$, *dont on va tirer* t *billets, si l'on a choisi deux nombres, trouver la probabilité ou que tous les deux à la fois, ou qu'un seul, ou qu'aucun ne se trouve parmi les billets tirés.*

SOLUTION

Distinguons les deux nombres choisis, l'un par A, l'autre par B; et que A se trouve parmi les t billets tirés, la probabilité [§ 1] est

$$=\frac{t}{n},$$

et qu'il ne s'y trouve point,

$$=\frac{n-t}{n}.$$

Supposons que A s'y trouve déjà; et pour voir si B s'y trouve aussi, ou non, il faut considérer que de $n-1$ billets on tire seulement $t-1$; et que B s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{t-1}{n-1},$$

et qu'il ne s'y trouve point,

$$=\frac{n-t}{n-1}.$$

Donc, que tous les deux nombres A et B s'y trouvent à la fois, la probabilité est

$$=\frac{t(t-1)}{n(n-1)},$$

et que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{t(n-t)}{n(n-1)}.$$

La même probabilité est que le seul nombre B s'y trouve; donc, que l'un ou l'autre s'y trouve, sans distinction, la probabilité est

$$=\frac{2t(n-t)}{n(n-1)}.$$

Or, qu'aucun ne s'y trouve ou que tous les deux restent parmi les $n-t$ nombres non tirés, la probabilité sera

$$=\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)},$$

d'où nous tirons les conclusions suivantes:

que de deux nombres choisis	la probabilité est
tous les deux s'y trouvent	$\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$
qu'un seul s'y trouve	$\frac{2t(n-t)}{n(n-1)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$\frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}$

PROBLEME 3

5. *Le nombre de tous les billets étant* $= n$, *dont on va tirer au hasard* t *billets, si l'on a choisi trois nombres, déterminer la probabilité ou que tous les trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun ne se trouve parmi les billets tirés.*

SOLUTION

Distinguons les trois nombres choisis par les lettres A, B, C; et que les deux, A et B, se trouvent dans les billets tirés, la probabilité [§ 4] est

$$= \frac{t(t-1)}{n(n-1)},$$

et qu'aucun ne s'y trouve,

$$= \frac{(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)}.$$

Supposons que les deux nombres A et B s'y trouvent; et nous aurons encore à considérer $n-2$ billets et à chercher la probabilité que le nombre C se trouve dans les $t-2$ billets qui en sortiront; or, cette probabilité [§ 1] est évidemment

$$= \frac{t-2}{n-2},$$

et que C n'y soit point, la probabilité est

$$= \frac{n-t}{n-2}.$$

Donc, pour que tous les trois nombres A, B, C se trouvent dans les billets tirés, la probabilité est

$$= \frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)};$$

or, que seulement A et B s'y trouvent, sans C, la probabilité est

$$= \frac{t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Mais il sera également probable qu'on y trouve seulement les deux A et C,

ou les deux B et C; donc, pour que deux seulement, sans distinction, se trouvent dans les t billets tirés, la probabilité est

$$=\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Ensuite, que le nombre A s'y trouve, la probabilité [§ 1] est $=\frac{t}{n}$; mais que les deux autres, B et C, se trouvent parmi les $n-t$ billets restants, le nombre de tous devant maintenant être regardé comme $n-1$, la probabilité [§ 4] est

$$=\frac{(n-t)(n-t-1)}{(n-1)(n-2)};$$

donc, pour que le seul nombre A s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)};$$

et puisque chacun des deux autres, B et C, peut s'y trouver aussi probablement, la probabilité qu'un seul, qui que ce soit, s'y trouve, est

$$=\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}.$$

D'où nous concluons:

que de trois nombres choisis	la probabilité est
tous les trois s'y trouvent	$\frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$
que deux seulement s'y trouvent	$\frac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$
qu'un seul s'y trouve	$\frac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$
qu'aucun ne s'y trouve	$\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$

PROBLEME 4

6. *Le nombre de tous les billets étant* $=n$, *dont on va tirer* t *billets, si l'on a choisi quatre nombres, déterminer la probabilité ou que tous les quatre, ou que trois, ou deux seulement, ou un seul, ou aucun ne se trouve dans les billets tirés.*

SOLUTION

Désignons les quatre nombres choisis par les lettres A, B, C, D; et ayant déjà déterminé la probabilité que des trois nombres A, B, C ou tous les trois, ou deux, ou un seul, ou aucun ne se trouve dans les billets tirés, nous n'avons qu'à combiner avec chacun de ces cas la probabilité que le quatrième nombre, D, s'y trouve aussi, ou non; ce qui nous frayera le chemin de pousser aisément nos recherches à autant de nombres choisis qu'on voudra. Reprenons donc les formules trouvées pour trois nombres A, B, C et joignons-y la probabilité que le quatrième, D, s'y trouve, ou non:

que des nombres A, B, C, il se trouve dans les billets tirés	la probabilité est	que le quatrième, D, s'y trouve	que le quatrième, D, ne s'y trouve pas
tous les trois	$\dfrac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{t-3}{n-3}$	$\dfrac{n-t}{n-3}$
deux seulement	$\dfrac{3t(t-1)(n-t)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{t-2}{n-3}$	$\dfrac{n-t-1}{n-3}$
un seul	$\dfrac{3t(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{t-1}{n-3}$	$\dfrac{n-t-2}{n-3}$
nul	$\dfrac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)}$	$\dfrac{t}{n-3}$	$\dfrac{n-t-3}{n-3}$

De là, nous concluons la probabilité:

I. que les trois nombres A, B, C avec le quatrième, D, s'y trouvent,

$$=\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

II. que les trois nombres A, B, C sans le quatrième, D, s'y trouvent, et que deux des nombres A, B, C avec le nombre D s'y trouvent,

$$=\frac{t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\frac{3t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

donc, que trois quelconques des quatre nombres A, B, C, D s'y trouvent, la probabilité est

$$=\frac{4t(t-1)(t-2)(n-t)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

III. que deux seulement des trois nombres A, B, C sans le quatrième, D, s'y trouvent, la probabilité est

$$=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

et qu'un seul des trois nombres A, B, C avec le quatrième, D, s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{3t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

donc, que deux quelconques seulement des quatre nombres A, B, C, D se trouvent dans les billets tirés, la probabilité sera

$$=\frac{6t(t-1)(n-t)(n-t-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

IV. qu'un seul des trois nombres A, B, C sans le quatrième, D, s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{3t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

et que nul des trois nombres A, B, C, mais le quatrième, D, seul s'y trouve, la probabilité est

$$=\frac{t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

donc, qu'un seul quelconque de tous les quatre nombres A, B, C, D se trouve dans les billets tirés, la probabilité sera

$$=\frac{4t(n-t)(n-t-1)(n-t-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

V. enfin, qu'aucun des trois nombres A, B, C ni le quatrième, D, ne se trouve dans les billets tirés, la probabilité sera

$$=\frac{(n-t)(n-t-1)(n-t-2)(n-t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

PROBLEME 5

7. *Le nombre de tous les billets étant* $=n$, *dont on va tirer* t *billets, si l'on a choisi autant de nombres qu'on voudra, déterminer la probabilité de tous les cas possibles qui peuvent avoir lieu.*

SOLUTION

La méthode que je viens d'expliquer dans la solution du problème précédent sert à découvrir successivement les probabilités de plusieurs nombres choisis, et la loi de leur progression étant évidente, nous n'avons qu'à mettre ici devant les yeux les formules pour chaque nombre de numéros qu'on aura choisis. Mais pour abréger ces formules, puisque n marque le nombre de tous les billets et t le nombre de ceux qu'on en va tirer, désignons par r le nombre de ceux qui restent, de sorte que

$$r = n - t \quad \text{ou} \quad n = t + r.$$

I. Ayant choisi un seul nombre:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouve ce nombre	$1 \cdot \frac{t}{n} = 1A^1$
qu'il ne s'y trouve pas	$1 \cdot \frac{r}{n} = 1A^0$

II. Ayant choisi deux nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les deux	$1 \cdot \frac{t(t-1)}{n(n-1)} = 1B^2$
un seul	$2 \cdot \frac{tr}{n(n-1)} = 2B^1$
nul	$1 \cdot \frac{r(r-1)}{n(n-1)} = 1B^0$

III. Ayant choisi trois nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les trois	$1 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)} = 1C^3$
deux seulement	$3 \cdot \frac{t(t-1)r}{n(n-1)(n-2)} = 3C^2$
un seul	$3 \cdot \frac{tr(r-1)}{n(n-1)(n-2)} = 3C^1$
nul	$1 \cdot \frac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} = 1C^0$

IV. Ayant choisi quatre nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les quatre	$1 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 1D^4$
trois seulement	$4 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 4D^3$
deux seulement	$6 \cdot \frac{t(t-1)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 6D^2$
un seul	$4 \cdot \frac{tr(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 4D^1$
nul	$1 \cdot \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 1D^0$

V. Ayant choisi cinq nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les cinq	$1 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 1E^5$
quatre seulement	$5 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5E^4$
trois seulement	$10 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 10E^3$
deux seulement	$10 \cdot \frac{t(t-1)r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 10E^2$
un seul	$5 \cdot \frac{tr(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5E^1$
nul	$1 \cdot \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 1E^0$

VI. Ayant choisi six nombres:

que dans les billets tirés	la probabilité est
se trouvent tous les six	$1\cdot\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=1F^6$
cinq seulement	$6\cdot\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)r}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=6F^5$
quatre seulement	$15\cdot\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)r(r-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=15F^4$
trois seulement	$20\cdot\frac{t(t-1)(t-2)r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=20F^3$
deux seulement	$15\cdot\frac{t(t-1)r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=15F^2$
un seul	$6\cdot\frac{tr(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=6F^1$
nul	$1\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}=1F^0$
	etc.

Pour abréger, j'ai donné à chacune de ces formules une certaine marque dont je me servirai dans la suite. C'est donc de là qu'il faudra toujours tirer la signification de ces marques.

COROLLAIRE 1

8. Il est évident comment les valeurs des marques de chaque ordre se peuvent aisément trouver des valeurs des marques de l'ordre précédent. La manière suivante semble la plus simple:

$$B^2=\frac{t-1}{n-1}A^1,\quad B^1=\frac{r}{n-1}A^1,\quad B^0=\frac{r-1}{n-1}A^0;$$

$$C^3=\frac{t-2}{n-2}B^2,\quad C^2=\frac{r}{n-2}B^2,\quad C^1=\frac{r-1}{n-2}B^1,\quad C^0=\frac{r-2}{n-2}B^0;$$

$$D^4=\frac{t-3}{n-3}C^3,\quad D^3=\frac{r}{n-3}C^3,\quad D^2=\frac{r-1}{n-3}C^2,\quad D^1=\frac{r-2}{n-3}C^1,\quad D^0=\frac{r-3}{n-3}C^0;$$

$$E^5=\frac{t-4}{n-4}D^4,\quad E^4=\frac{r}{n-4}D^4,\quad E^3=\frac{r-1}{n-4}D^3,\quad E^2=\frac{r-2}{n-4}D^2,$$

$$E^1=\frac{r-3}{n-4}D^1,\quad E^0=\frac{r-4}{n-4}D^0;$$

$$F^6 = \frac{t-5}{n-5} E^5, \quad F^5 = \frac{r}{n-5} E^5, \quad F^4 = \frac{r-1}{n-5} E^4, \quad F^3 = \frac{r-2}{n-5} E^3,$$

$$F^2 = \frac{r-3}{n-5} E^2, \quad F^1 = \frac{r-4}{n-5} E^1, \quad F^0 = \frac{r-5}{n-5} E^0$$

etc.

COROLLAIRE 2

9. Le calcul des valeurs de toutes ces marques pourra donc, dans chaque cas, aisément se faire par le calcul des logarithmes. C'est à cette fin que j'ai séparé de chaque marque son coefficient numérique dont on tiendra facilement compte, après avoir trouvé la valeur de la marque.

COROLLAIRE 3

10. Il faut donc bien prendre garde qu'on ne prenne point ces marques pour des puissances, puisque les nombres qui tiennent lieu des exposants ne sont pas de vrais exposants de puissances, mais ils marquent seulement le nombre des numéros dont il est probable qu'ils se trouvent, en chaque cas, dans les billets tirés.

COROLLAIRE 4

11. Puisque les probabilités, prises ensemble, de tous les cas possibles de chaque ordre doivent donner une certitude complète, leur somme sera toujours égale à l'unité. Ainsi l'on aura:

$$1A^1 + 1A^0 = 1,$$

$$1B^2 + 2B^1 + 1B^0 = 1,$$

$$1C^3 + 3C^2 + 3C^1 + 1C^0 = 1,$$

$$1D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D^1 + 1D^0 = 1$$

etc.

PROBLEME 6

12. *Ayant établi une telle loterie de n billets, dont on va tirer t billets, déterminer les prix, conformément à la loi d'égalité, qu'on est obligé de payer aux participants dans chaque cas, par rapport à leur mise.*

SOLUTION

Puisque le prix est toujours proportionnel à la mise, supposons la mise toujours d'un écu, de sorte que, pour chaque écu que le participant aura payé, il en retirera les prix que nous allons déterminer conformément aux règles de l'égalité. Pour cet effet, il faut considérer séparément les cas où le participant aura choisi un ou deux ou trois ou quatre etc. nombres, ce qui nous mène aux recherches suivantes.

I. Si le participant n'a choisi qu'un nombre et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soit le prix
ce nombre se trouve	$1A^1$	a
qu'il ne s'y trouve pas	$1A^0$	0

La probabilité est donc A^1 qu'il retire a, et A^0 qu'il ne retire rien, d'où son avantage est $= A^1 a$, qui, selon les règles de l'égalité, lui doit valoir autant que sa mise 1. Il faut dont qu'il soit $A^1 a = 1$, et partant le prix doit être

$$a = \frac{1}{A^1}.$$

II. Si le participant a choisi deux nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les deux	$1B^2$	a
un seul	$2B^1$	b
nul	$1B^0$	0

L'avantage du participant sera donc $1B^2 a + 2B^1 b$, qui doit être égalé à la mise 1, de sorte que nous ayons

$$1B^2 a + 2B^1 b = 1,$$

d'où l'on peut déterminer les deux prix a et b par une infinité de manières différentes, car, quelque valeur qu'on prenne pour l'un, on trouvera celle de l'autre. Mais puisqu'il faut éviter les cas où l'un s'évanouirait ou deviendrait même négatif, on remplira cette condition le plus commodément en partageant l'unité en deux parties α et β, de sorte qu'il soit

$$\alpha + \beta = 1;$$

et alors, on aura les prix en général

$$a = \frac{\alpha}{1B^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\beta}{2B^1}.$$

III. Si le participant a choisi trois nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les trois	$1C^3$	a
deux seulement	$3C^2$	b
un seul	$3C^1$	c
nul	$1C^0$	0

L'avantage du participant étant donc

$$1C^3a + 3C^2b + 3C^1c,$$

il faut qu'il soit équivalent à la mise 1. Pour cet effet, partageons la mise 1 à volonté en trois parties α, β, γ, de sorte qu'il y ait

$$\alpha + \beta + \gamma = 1;$$

et de là, nous aurons en général les déterminations suivantes des prix

$$a = \frac{\alpha}{1C^3}, \quad b = \frac{\beta}{3C^2}, \quad c = \frac{\gamma}{3C^1},$$

d'où l'on voit que ces trois prix peuvent être variés à l'infini.

IV. Si le participant a choisi quatre nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les quatre	$1D^4$	a
trois seulement	$4D^3$	b
deux seulement	$6D^2$	c
un seul	$4D^1$	d
nul	$1D^0$	0

Partageons maintenant l'unité en quatre parties égales ou inégales, comme on jugera à propos, ou posons

$$1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta;$$

et les valeurs des prix seront

$$a = \frac{\alpha}{1D^4}, \quad b = \frac{\beta}{4D^3}, \quad c = \frac{\gamma}{6D^2}, \quad d = \frac{\delta}{4D^1}.$$

V. Si le participant a choisi cinq nombres et qu'il en ait payé un écu,

en cas que dans les billets tirés	la probabilité étant	soient les prix
se trouvent tous les cinq	$1E^5$	a
quatre seulement	$5E^4$	b
trois seulement	$10E^3$	c
deux seulement	$10E^2$	d
un seul	$5E^1$	e
nul	$1E^0$	0

Qu'on partage à volonté l'unité en cinq parties, de sorte qu'il soit

$$1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon;$$

et l'on aura en général la juste détermination de ces prix

$$a = \frac{\alpha}{1E^5}, \quad b = \frac{\beta}{5E^4}, \quad c = \frac{\gamma}{10E^3}, \quad d = \frac{\delta}{10E^2}, \quad e = \frac{\varepsilon}{5E^1}.$$

Cette détermination est si aisée qu'il serait superflu d'aller plus loin, et il n'est pas probable qu'on fasse jamais usage de plus de 5 nombres, à cause des prix trop exorbitants qu'on devrait accorder.

COROLLAIRE 1

13. Ce n'est donc que dans le premier cas que le prix est déterminé, $\alpha = \frac{1}{A^1}$; dans les autres cas, on peut d'autant plus varier les prix que le nombre des billets choisis est grand. Cela dépend de la division de l'unité en autant de parties qu'il y a de prix en chaque cas.

COROLLAIRE 2

14. La première manière de diviser l'unité est celle qui prend des parties égales, et alors on aura

pour le second cas $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$,

pour le troisième $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$,

pour le quatrième $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{4}$,

pour le cinquième $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \frac{1}{5}$,

d'où l'on tirera des prix déterminés pour chaque cas.

COROLLAIRE 3

15. Si l'on juge que, de cette façon, les hauts prix des cas supérieurs deviennent trop grands, les coefficiens numériques nous fournissent une telle manière de diviser qui, rendant les formules plus simples, semble produire une espèce d'égalité. On pourrait prendre

pour le II^e cas $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$;

pour le III^e cas $\alpha = \frac{1}{7}$, $\beta = \frac{3}{7}$, $\gamma = \frac{3}{7}$;

pour le IV^e cas $\alpha = \frac{1}{15}$, $\beta = \frac{4}{15}$, $\gamma = \frac{6}{15}$, $\delta = \frac{4}{15}$;

pour le V^e cas $\alpha = \frac{1}{31}$, $\beta = \frac{5}{31}$, $\gamma = \frac{10}{31}$, $\delta = \frac{10}{31}$, $\varepsilon = \frac{5}{31}$.

COROLLAIRE 4

16. Si l'on voulait diminuer d'avantage les hauts prix pour rendre plus considérables les autres, on pourrait se servir des divisions suivantes:

II^e cas $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{4}{5}$;

III^e cas $\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = \frac{6}{16}$, $\gamma = \frac{9}{16}$;

IV^e cas $\alpha = \frac{1}{43}$, $\beta = \frac{8}{43}$, $\gamma = \frac{18}{43}$, $\delta = \frac{16}{43}$;

V^e cas $\alpha = \frac{1}{106}$, $\beta = \frac{10}{106}$, $\gamma = \frac{30}{106}$, $\delta = \frac{40}{106}$, $\varepsilon = \frac{25}{106}$.

SCHOLIE

17. Représentons à la fois les prix que fourniront ces trois manières différentes de partager l'unité en chaque cas.

Ayant choisi d'avance	En cas que dans les billets tirés se trouvent	Les prix d'après la I^e manière	II^e manière	III^e manière
un nombre	le nombre	$\frac{1}{A^1}$	$\frac{1}{A^1}$	$\frac{1}{A^1}$
	ou non	0	0	0
deux nombres	tous les deux	$\frac{1}{2B^2}$	$\frac{1}{3B^2}$	$\frac{1}{5B^2}$
	un seul	$\frac{1}{4B^1}$	$\frac{1}{3B^1}$	$\frac{2}{5B^1}$
	nul	0	0	0
trois nombres	tous les trois	$\frac{1}{3C^3}$	$\frac{1}{7C^3}$	$\frac{1}{16C^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{9C^2}$	$\frac{1}{7C^2}$	$\frac{2}{16C^2}$
	un seul	$\frac{1}{9C^1}$	$\frac{1}{7C^1}$	$\frac{3}{16C^1}$
	nul	0	0	0

Ayant choisi d'avance	En cas que dans les billets tirés se trouvent	Les prix d'après la Iᵉ manière	IIᵉ manière	IIIᵉ manière
quatre nombres	tous les quatre	$\frac{1}{4D^4}$	$\frac{1}{15D^4}$	$\frac{1}{43D^4}$
	trois seulement	$\frac{1}{16D^3}$	$\frac{1}{15D^3}$	$\frac{2}{43D^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{24D^2}$	$\frac{1}{15D^2}$	$\frac{3}{43D^2}$
	un seul	$\frac{1}{16D^1}$	$\frac{1}{15D^1}$	$\frac{4}{43D^1}$
	nul	0	0	0
cinq nombres	tous les cinq	$\frac{1}{5E^5}$	$\frac{1}{31E^5}$	$\frac{1}{106E^5}$
	quatre seulement	$\frac{1}{25E^4}$	$\frac{1}{31E^4}$	$\frac{2}{106E^4}$
	trois seulement	$\frac{1}{50E^3}$	$\frac{1}{31E^3}$	$\frac{3}{106E^3}$
	deux seulement	$\frac{1}{50E^2}$	$\frac{1}{31E^2}$	$\frac{4}{106E^2}$
	un seul	$\frac{1}{25E^1}$	$\frac{1}{31E^1}$	$\frac{5}{106E^1}$
	nul	0	0	0

PROBLEME 7

18. *Ayant fixé les prix d'une telle loterie selon la loi de l'égalité, trouver la diminution de ces prix, afin que l'entrepreneur en retire un profit prescrit.*

SOLUTION

Par rapport aux frais que l'établissement d'une telle loterie exige, il faut rabattre quelque chose des prix que la loi de l'égalité a fournis, comme cela se pratique dans les loteries ordinaires. Outre cela, une telle loterie ne saurait être permise que pour des besoins importants, et à cet égard, la diminution des prix doit être plus considérable. Mais, puisque le profit n'est pas certain, comme dans les autres loteries, et qu'il pourrait arriver que l'entrepreneur,

malgré toute la probabilité, y perdît très considérablement, il est bien juste que le rabat des prix soit plus grand qu'à l'ordinaire où l'on se contente de 10 pour-cent. Cependant, comme ce ne sont que les grands prix qui pourraient ruiner l'entrepreneur, il est raisonnable qu'on augmente le rabat seulement dans les grands prix, et qu'on laisse celui des petits prix à dix pour-cent. Un plus grand rabat dans les petits prix sauterait aussi trop aux yeux et dégoûterait les participants, au lieu que, dans les grands prix, on ne s'aperçoit presque point de la diminution, vu que peu de personnes sont en état d'en calculer la juste valeur.

Or, pour procurer à la caisse un profit de 10 pour-cent sur les moindres prix, on n'a qu'à les multiplier par $\frac{9}{10}$; ce seront donc les prix de chaque cas qui répondent à un seul nombre. Pour les prix qui répondent à deux nombres, on pourrait bien les multiplier par $\frac{8}{10}$, ce qui produirait un profit de 20 pour-cent, sans qu'on s'en aperçoive aisément. Et lorsque trois nombres se rencontrent dans les billets tirés, on pourrait, avec autant de raison, multiplier les prix par $\frac{7}{10}$, et ceux qui conviennent à quatre nombres par $\frac{6}{10}$, et enfin celui qui convient à cinq nombres par $\frac{5}{10}$, ce qui est équivalent à un profit de 50 pour-cent. Mais, en chaque cas, on pourra régler la diminution des prix comme on jugera le plus à propos, et on aura principalement en vue d'arrondir les nombres autant qu'il sera possible. Ayant donc fait le plan sur les prix conformes à la loi de l'égalité, il sera aisé d'y appliquer les diminutions les plus convenables qui remplissent le mieux les conditions qu'on aura en vue.

PROBLEME 8

19. *Le nombre de tous les billets étant* 90, *dont on doit tirer en son temps* 5, *dresser le plan des prix qui conviennent à tous les cas, selon la loi de l'égalité.*

SOLUTION

Ici est renfermée la loterie projetée autrefois et dont j'ai parlé au commencement. Nous verrons bientôt quels prix elle pouvait promettre, en assignant ceux que la loi d'égalité exige. Or, pour appliquer à ce cas nos formules générales, nous avons

$$n = 90, \quad t = 5 \quad \text{et partant} \quad r = 85,$$

d'où nous tirons d'abord

$$A^1 = \frac{1}{18} \quad \text{et} \quad A^0 = \frac{17}{18},$$

et ces deux valeurs nous mènent à celles de toutes les marques suivantes. Mais puisque nous avons besoin de ces valeurs renversées, je m'en vais les exprimer en sorte, de même que leurs logarithmes, pour en faciliter ensuite le calcul.

$-lA^0 = 0{,}0248236$	$1 : A^0 = 1{,}0588$
$-lA^1 = 1{,}2552725$	$1 : A^1 = 18{,}0000$
$-lB^0 = 0{,}0499343$	$1 : B^0 = 1{,}1218$
$-lB^1 = 1{,}2752436$	$1 : B^1 = 18{,}8470$
$-lB^2 = 2{,}6026025$	$1 : B^2 = 400{,}5000$
$-lC^0 = 0{,}0753389$	$1 : C^0 = 1{,}1894$
$-lC^1 = 1{,}2954470$	$1 : C^1 = 19{,}7445$
$-lC^2 = 2{,}6176663$	$1 : C^2 = 414{,}6353$ [2])
$-lC^3 = 4{,}0699639$ [1])	$1 : C^3 = 11\,748{,}000$ [2])
$-lD^0 = 0{,}1010443$	$1 : D^0 = 1{,}262$
$-lD^1 = 1{,}3158882$	$1 : D^1 = 20{,}696$ [2])
$-lD^2 = 2{,}6329063$	$1 : D^2 = 429{,}44$
$-lD^3 = 4{,}0800643$ [1])	$1 : D^3 = 12\,024{,}4$ [2])
$-lD^4 = 5{,}7084532$	$1 : D^4 = 511\,038$
$-lE^0 = 0{,}1270578$	$1 : E^0 = 1{,}340$
$-lE^1 = 1{,}3365728$	$1 : E^1 = 21{,}706$ [2])
$-lE^2 = 2{,}6483267$	$1 : E^2 = 444{,}96$
$-lE^3 = 4{,}0902835$ [1])	$1 : E^3 = 12\,310{,}7$ [2])
$-lE^4 = 5{,}7135328$ [1])	$1 : E^4 = 517\,050$ [2])
$-lE^5 = 7{,}6429517$	$1 : E^5 = 43\,949\,270$ [2])

1) Dans l'édition originale, les chiffres marqués sont: 4,0699659; 4,0800649; 4,0902841; 5,7135334. L. G. D.

2) Dans l'édition originale, les chiffres marqués sont: 414,6354; 11748,054; 20,695; 12024,5; 21,705; 12310,5; 517051; 43949268. L. G. D.

Voilà donc le plan de cette loterie selon les trois manières différentes:

		I^e manière	II^e manière	III^e manière
I^r cas	1	18	18	18
II^e cas	2	200,25	133,5	80,1
	1	4,712	6,282	7,539
III^e cas	3	3916,00 [1])	1678,29	734,25
	2	46,071	59,234	51,830
	1	2,1938	2,8206	3,7021
IV^e cas	4	127 759,5	34 069,2	11 884,6 [3])
	3	751,53	801,63	559,28
	2	17,893	28,629	29,961
	1	1,2934	1,3797 [2])	1,9251
V^e cas	5	8 789 854,0 [1])	1 417 718,5 [2])	414 615,7
	4	20 682,00 [1])	16 679,03 [2])	9 755,66 [3])
	3	246,214 [1])	397,119 [2])	348,414 [3])
	2	8,899	14,353	16,791
	1	0,8682	0,7002 [2])	1,0238

A présent, il est aisé de diminuer ces prix à proportion du profit qu'on veut procurer à l'entrepreneur.

1) Dans l'édition originale, les chiffres marqués sont: 3916,02; 8789853,6; 20682,04; 246,210. L. G. D.

2) Dans l'édition originale, les chiffres marqués sont: 1,3791; 1417718,3; 16679,06; 397,113; 0,7001. L. G. D.

2) Dans l'édition originale, les chiffres marqués sont: 11844,6; 9755,68; 348,410. L. G. D.

COROLLAIRE 1

20. Puisque ces trois manières sont également conformes à la loi de l'égalité, rien n'empêche qu'on ne mette en usage toutes les trois à la fois et qu'on n'accorde aux participants la liberté de soumettre leur mise à celle qui leur plaira le mieux. Ainsi, ceux qui choisiront deux ou plusieurs nombres seront les maîtres de se déterminer ou pour la première manière ou pour la seconde ou pour la troisième.

COROLLAIRE 2

21. Cependant, il sera de l'intérêt de l'entrepreneur d'exclure entièrement la première manière, pour le cas où l'on choisit cinq nombres. Car, en cas qu'on attrapperait précisément tous les cinq nombres qui seront tirés dans les cinq billets, le prix de presque 9 millions, fût-il diminué jusqu'à la moitié, pourrait ruiner la banque.

SCHOLIE

22. Or, en diminuant ces prix selon les règles expliquées ci-dessus [§ 18] et en arrondissant les nombres, on pourra former le plan suivant qui doit probablement apporter à l'entrepreneur un profit très considérable, sans qu'il paraisse désavantageux aux intéressés.

Plan d'une telle loterie à 90 billets dont on doit tirer 5.

Ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants écus	écus	écus
1 nombre	ce nombre	16	16	16
2 nombres	tous les deux	160	106	64
	un seul	4	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$
3 nombres	tous les trois	2741	1174	513
	2 seulement	36	47	41
	un seul	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$
4 nombres	tous les quatre	76 655	20 441	7130
	3 seulement	526	561	391
	2 seulement	14	$22\frac{1}{2}$	24
	un seul	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
5 nombres	tous les cinq	4 394 927 [1])	708 859	207 307 [1])
	4 seulement	12 409	10 007	5 853
	3 seulement	172	278	243
	2 seulement	7	$11\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
	un seul	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

On pourrait encore mieux arrondir ces nombres et augmenter, par ce moyen, insensiblement d'avantage le profit de l'entreprise.

PROBLEME 9

23. *Le nombre de tous les billets étant* 100, *dont on doit tirer en son temps* 9, *dresser le plan des prix qui conviennent à tous les cas, selon la loi de l'égalité.*

1) Edition originale: 4394925; 207305. L. G. D.

SOLUTION

Le nombre des billets qu'on doit tirer étant ici plus grand qu'auparavant, les prix pour le cas de 5 nombres choisis ne deviendront plus si exorbitants que dans le plan précédent, ce qui rendra l'exécution moins dangereuse.

Ayant donc ici

$$n = 100, \quad t = 9 \quad \text{et partant} \quad r = 91,$$

nous avons d'abord

$$A^1 = \frac{9}{100} \quad \text{et} \quad A^0 = \frac{91}{100},$$

d'où nous tirerons les valeurs des marques suivantes.

$-lA^0 = 0{,}0409586$	$1 : A^0 = 1{,}0989$
$-lA^1 = 1{,}0457575$	$1 : A^1 = 11{,}1111$
$-lB^0 = 0{,}0823513$	$1 : B^0 = 1{,}2088$ [1])
$-lB^1 = 1{,}0823513$	$1 : B^1 = 12{,}0879$
$-lB^2 = 2{,}1383027$	$1 : B^2 = 137{,}50$
$-lC^0 = 0{,}1241874$	$1 : C^0 = 1{,}3310$
$-lC^1 = 1{,}1193349$	$1 : C^1 = 13{,}1624$
$-lC^2 = 2{,}1704874$	$1 : C^2 = 148{,}077$
$-lC^3 = 3{,}2844308$	$1 : C^3 = 1925{,}0$
$-lD^0 = 0{,}1664764$	$1 : D^0 = 1{,}4671$
$-lD^1 = 1{,}1567166$	$1 : D^1 = 14{,}3455$
$-lD^2 = 2{,}2030166$	$1 : D^2 = 159{,}594$
$-lD^3 = 3{,}3121611$	$1 : D^3 = 2051{,}92$
$-lD^4 = 4{,}4930512$	$1 : D^4 = 31120{,}833$
$-lE^0 = 0{,}2092283$	$1 : E^0 = 1{,}6189$
$-lE^1 = 1{,}1945051$	$1 : E^1 = 15{,}6497$
$-lE^2 = 2{,}2358978$	$1 : E^2 = 172{,}146$
$-lE^3 = 3{,}3401898$	$1 : E^3 = 2188{,}72$
$-lE^4 = 4{,}5162810$	$1 : E^4 = 32830{,}8$
$-lE^5 = 5{,}7763524$	$1 : E^5 = 597520$

1) Edition originale: 1,2087. L. G. D.

De ces valeurs on formera, selon les trois manières, le plan suivant:

Cas	Sortent	Ie manière	IIe manière	IIIe manière
I	1	11,111	11,111	11,111
II	2	68,75	45,83	27,50
	1	3,022	4,029	4,835
III	3	641,66	275,00	120,3125
	2	16,453	21,154	18,509
	1	1,462	1,880	2,468
IV	4	7 780,208	2 074,722	723,740
	3	128,245 1)	136,795	95,438 1)
	2	6,649	10,639	11,134
	1	0,8966	0,9564	1,3344
V	5	119 504	19 274,84	5 636,981
	4	1 313,232	1 059,06	619,450
	3	43,774	70,604	61,945
	2	3,443	5,553	6,496
	1	0,626	0,505	0,738

COROLLAIRE 1

24. Pourvu qu'une telle loterie ne soit tirée jusqu'à ce que le fonds ne se soit accru au delà de quelques centaines de milliers d'écus, l'entrepreneur ne risque pas trop de se ruiner, vu que les plus hauts prix, après être diminués, ne monteront pas à 100000 écus, supposé que la mise ne surpasse pas un écu.

COROLLAIRE 2

25. Mais en cas qu'on voudrait former une telle loterie en petit et que le fonds entier ne monterait pas à 100 000 écus, on devrait bien retrancher la première manière du cas de cinq billets choisis.

1) Edition originale: 128,240; 95,439. L. G. D.

COROLLAIRE 3

26. Il faut aussi remarquer que de telles loteries doivent être tirées à plusieurs reprises, afin que, si une avait trop favorisé les participants, les autres puissent dédommager l'entrepreneur. Or chaque fois, on peut tirer la loterie aussitôt que le fonds surpasse une certaine somme proportionnée aux prix qu'on veut admettre.

SCHOLIE 1

27. Diminuons ces prix suivant les règles données ci-dessus [§ 18], et nous obtiendrons ce

Plan d'une telle loterie à 100 *billets dont on doit tirer* 9.

Ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants			
		écus	écus	écus	en général
1 nombre	ce nombre	10	10	10	a
2 nombres	tous les deux	55	36	22	b
	un seul	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{3}$	c
3 nombres	tous les trois	449	192	84	d
	2 seulement	13	17	15	e
	un seul	$1\frac{1}{3}$ [1]	$1\frac{2}{3}$	2	f
4 nombres	tous les quatre	4668	1245	434	g
	3 seulement	90	96	$66\frac{2}{3}$	h
	2 seulement	$5\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{2}$	9	i
	un seul	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	k

1) Edition originale: $1\frac{1}{4}$. L. G. D.

Ayant choisi	en cas que dans les billets tirés se trouvent	on retirera, pour chaque écu qu'on aura mis, l'un des prix suivants			
		écus	écus	écus	en général
5 nombres	tous les cinq	59752	9637	$2818\frac{1}{2}$	l
	4 seulement	788	635	$371\frac{2}{3}$	m
	3 seulement	$30\frac{1}{2}$	49	$43\frac{1}{3}$	n
	2 seulement	$2\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$ [1]	5	p
	un seul	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	q

SCHOLIE 2

28. Outre ces trois manières, on peut faire pour chaque cas une infinité d'autres répartitions des prix que nous avons marqués en général dans ce plan, à côté, par les lettres a, b, c, d etc. Si l'on veut que ces prix soient déjà diminués dans la même raison que nous avons diminué les autres, il faut les déterminer par les équations suivantes:

$$\text{I.}\quad \frac{10}{9}a\cdot A^1 = 1,$$

ou

$$0{,}1\,a = 1;$$

$$\text{II.}\quad \frac{10}{8}b\cdot B^2 + \frac{10}{9}c\cdot 2B^1 = 1,$$

ou

$$0{,}0090909\,b + 0{,}1838383\,c = 1;$$

$$\text{III.}\quad \frac{10}{7}d\cdot C^3 + \frac{10}{8}e\cdot 3C^2 + \frac{10}{9}f\cdot 3C^1 = 1,$$

ou

$$0{,}000742115\,d + 0{,}02532467\,e + 0{,}2532467\,f = 1;$$

1) Edition originale: $4\frac{1}{4}$. L. G. D.

$$\text{IV.}\quad \frac{10}{6} g \cdot D^4 + \frac{10}{7} h \cdot 4D^3 + \frac{10}{8} i \cdot 6D^2 + \frac{10}{9} k \cdot 4D^1 = 1,$$

ou

$$0{,}0000535547\, g + 0{,}002784845\, h + 0{,}04699425\, i + 0{,}3098139\, k = 1;$$

$$\text{V.}\quad \frac{10}{5} l \cdot E^5 + \frac{10}{6} m \cdot 5E^4 + \frac{10}{7} n \cdot 10E^3 + \frac{10}{8} p \cdot 10E^2 + \frac{10}{9} q \cdot 5E^1 = 1,$$

ou

$$0{,}000003347168\, l + 0{,}000253827\, m + 0{,}00652698\, n + 0{,}07261263\, p$$
$$+ 0{,}3549952\, q = 1.$$

De ces formules, on pourra tirer les prix suivants qui semblent commodes pour la pratique:

$$a = 10;$$

$$b = 50, \quad c = 3;$$

$$d = 200, \quad e = 20, \quad f = 1;$$

$$g = 1000, \quad h = 100, \quad i = 10, \quad k = \frac{2}{3};$$

$$l = 5000, \quad m = 500, \quad n = 50, \quad p = 5, \quad q = \frac{1}{2}.$$

Par un tel plan, la banque ne risquerait pas tant que suivant la première ou la seconde manière.

ANALYSE D'UN PROBLEME DU CALCUL DES PROBABILITES [1]

Commentatio 813 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma **1**, 1862, p. 336—341

Il y a, dans une urne, quatre billets a, b, c, d, dont on tire un au hasard, et après l'avoir remis dans l'urne, on en tire un de nouveau, et cela à n reprises; on demande la probabilité que le billet a ne sera jamais tiré, ou qu'il ne sera tiré qu'une seule fois ou deux fois etc., ou enfin, qu'il sorte à chacun des n tirages.

1. Le billet donné ne sortira point au premier tirage,

$$\textit{probabilité:} \quad \frac{3}{4};$$

ni au second tirage,

$$\textit{probabilité:} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2;$$

ni au troisième tirage,

$$\textit{probabilité:} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

etc.;

il ne sortira point du tout,

$$\textit{probabilité:} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

---

1) Voir les mémoires 201, 313, 811 de ce volume et la note 1 p. 113. L. G. D.

2. il ne sortira qu'une fois sur les n tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot n;$$

3. il sortira deux fois sur les n tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$$

etc.;

4. il sortira à chacun des n tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Si des quatre billets a, b, c, d, on en tire *deux* chaque fois, à n reprises différentes,

1. le billet donné a ne s'y trouvera jamais,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

2. il s'y trouvera une fois,

$$\textit{probabilité:}\quad n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Le nombre des billets a, b, c etc. étant $=N$, qu'on en tire m billets à la fois et qu'on répète cette opération n fois:

1. le billet donné a ne se trouvera jamais parmi les billets tirés,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(1-\frac{m}{N}\right)^n;$$

2. il s'y rencontrera une fois,

$$\textit{probabilité:}\quad n\cdot\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-1};$$

3. il s'y rencontrera deux fois,

$$\textit{probabilité:}\quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{m}{N}\right)^2\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-2}$$

etc.;

4. il s'y rencontrera à chaque tirage,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(\frac{m}{N}\right)^n.$$

EXEMPLE

Le nombre des billets étant 50000 dont on tire à chaque reprise 8000 et cela cinq fois de suite, il y aura donc

$$N = 50\,000,\quad m = 8\,000,\quad n = 5.$$

1. Le billet donné a ne sortira point du tout,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(\frac{21}{25}\right)^5 = 0{,}418\,2120;$$

2. il se rencontrera dans un seul des cinq tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad 5\cdot\frac{4}{25}\left(\frac{21}{25}\right)^4 = 0{,}398\,2972;$$ [1]

3. il se rencontrera dans deux tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad 10\left(\frac{4}{25}\right)^2\left(\frac{21}{25}\right)^3 = 0{,}115\,732;$$ [1]

4. il se rencontrera dans trois tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad 10\left(\frac{4}{25}\right)^3\left(\frac{21}{25}\right)^2 = 0{,}028\,901;$$ [1]

1) Edition originale: 0,3982950; 0,151730; 0,028906. L. G. D.

5. il se rencontrera dans quatre tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad 5\left(\frac{4}{25}\right)^4\left(\frac{21}{25}\right) = 0{,}002\,752;$$

6. il se rencontrera dans tous les cinq tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad \left(\frac{4}{25}\right)^5 = 0{,}000\,105.$$

Le nombre des tirages, n, étant le même, on demande la probabilité que deux billets, a et b, ne se rencontrent jamais ensemble si, de N billets, on tire chaque fois $N-m$.

1. Au premier tirage, a n'est pas au nombre des $N-m$ billets tirés,

$$\textit{probabilité:}\quad \frac{m}{N};$$

b n'y est pas non plus,

$$\textit{probabilité:}\quad \frac{m(m-1)}{N(N-1)} = \nu;$$

2. les deux manquent au second tirage,

$$\textit{probabilité:}\quad \nu^2;$$

3. les deux manquent au troisième,

$$\textit{probabilité:}\quad \nu^3$$

etc.;

4. les deux manquent à tous les tirages,

$$\textit{probabilité:}\quad \nu^n.$$

On demande la probabilité que λ billets donnés ne se rencontrent dans aucun des n tirages. On n'a qu'à poser

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\lambda+1)}{N(N-1)(N-2)\cdots(N-\lambda+1)} = \nu,$$

et la probabilité cherchée sera $= \nu^n$.

Dans l'exemple précédent on aurait

$$N = 50\,000, \quad N - m = 8\,000, \quad m = 42\,000 \quad \text{et} \quad n = 5.$$

Si de 10 billets qui se trouvent dans une urne, on en tire 2, il en restera 8. Quand, après les avoir remis, on répète l'opération encore une fois, il est certain que six billets au moins ne seront pas tirés; mais il est possible que le nombre des non-tirés soit même 8. Il s'agit d'énumérer les cas où 6, 7 et 8 billets seront restés intacts.

Il y en aura six. Supposons qu'au premier tirage soient sortis les numéros 1 et 2. Au second tour, les deux numéros doivent être de 3 à 10, donc la probabilité est

$$= \frac{8 \cdot 7}{10 \cdot 9}.$$

Il y en aura sept, lorsque 1 ou 2 sort de nouveau au second tirage, c'est à dire qu'on ait au second tirage

1, 3 ou 1, 4 ou 1, 5 etc.,

huit chances favorables; ou bien

2, 3 ou 2, 4 ou 2, 5 etc.,

autant de chances. Or, le nombre de tous les cas possibles étant $= \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}$, la probabilité sera

$$= 2 \cdot \frac{2 \cdot 8}{10 \cdot 9}.$$

Il y en aura huit, si au second tour sortent les mêmes numéros 1 et 2 qu'au premier: seule chance favorable, dont la probabilité est

$$= \frac{2 \cdot 1}{10 \cdot 9}.$$

Donc, pour que le nombre des billets restés intacts soit

6 ou 7 ou 8,

la probabilité respective sera

$$\frac{8 \cdot 7}{10 \cdot 9}, \quad 2 \cdot \frac{8 \cdot 2}{10 \cdot 9}, \quad \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 9}.$$

Quand on tire trois fois de suite, il y aura ou 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 billets de non-tirés.

I. Que le nombre des non-tirés soit 8. Au premier tirage étant sortis les numéros 1 et 2, il faut que ces mêmes numéros sortent au second et au troisième tirage; la probabilité de la première de ces chances étant $\frac{1\cdot 2}{10\cdot 9}$, celle des deux chances est

$$=\left(\frac{1\cdot 2}{10\cdot 9}\right)^2.$$

II. Pour que le nombre des non-tirés soit 4, il faut qu'au second tirage il sorte deux billets différents des numéros 1 et 2, ce qui donne pour mesure de la probabilité $\frac{8\cdot 7}{10\cdot 9}$; et pour qu'au troisième tour il en vienne encore deux billets autres que les quatre déjà tirés, la probabilité sera

$$=\frac{8\cdot 7}{10\cdot 9}\cdot\frac{6\cdot 5}{10\cdot 9}.$$

III. Pour que le nombre des non-tirés soit 7, il faut considérer les quatre cas suivants:

premier tirage ·	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*
second „	*ab*	*ac*	*ac*	*ac*
troisième „	*ac*	*ab*	*bc*	*ac*

la probabilité de chaque cas particulier est

$$2\cdot\frac{8\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 10\cdot 9},$$

donc, la probabilité totale est

$$8\cdot\frac{8\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 10\cdot 9}.$$

IV. Pour que le nombre des non-tirés soit 6, il faut considérer les 7 cas suivants:

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*	*ab*
second „	*ab*	*cd*	*cd*	*ac*	*ac*	*cd*	*ac*
troisième „	*cd*	*ab*	*cd*	*ad*	*cd*	*ac*	*bd*

dont les probabilités respectives seront

$$\frac{8\cdot7\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot10\cdot9}, \quad \frac{8\cdot7\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot10\cdot9}, \quad \frac{8\cdot7\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot10\cdot9},$$

$$2\cdot\frac{8\cdot7\cdot2\cdot2}{10\cdot9\cdot10\cdot9}, \quad 2\cdot\frac{8\cdot7\cdot2\cdot2}{10\cdot9\cdot10\cdot9}, \quad 2\cdot\frac{8\cdot7\cdot2\cdot2}{10\cdot9\cdot10\cdot9}, \quad 2\cdot\frac{8\cdot7\cdot2}{10\cdot9\cdot1}$$

et par conséquent, la probabilité totale sera

$$\frac{8\cdot7\cdot38}{10\cdot9\cdot10\cdot9}.$$

V. Soit le nombre des non-tirés 5; les trois cas à considérer

premier tirage	*ab*	*ab*	*ab*
second „	*ac*	*cd*	*cd*
troisième „	*de*	*ae*	*de*

la probabilité de chacun de ces cas est

$$2\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot2}{10\cdot9\cdot10\cdot9}$$

et par conséquent la probabilité totale

$$6\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot2}{10\cdot9\cdot10\cdot9}.$$

En résumant tous ces cas, nous obtenons le tableau suivant:

Nombre des billets non-tirés	probabilité
4	$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{(10\cdot9)^2}$
5	$6\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot2}{(10\cdot9)^2}$
6	$\frac{8\cdot7\cdot38}{(10\cdot9)^2}$
7	$8\cdot\frac{8\cdot2\cdot1\cdot2}{(10\cdot9)^2}$
8	$\frac{1\cdot2\cdot1\cdot2}{(10\cdot9)^2}$

Si au lieu de 10 billets il y en a n, dont on tire deux à chaque reprise, on aura

I. En tirant deux fois,

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{1\cdot 2}{n(n-1)}$
$n-3$	$2\cdot\frac{(n-2)2}{n(n-1)}$
$n-4$	$\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$

Considérons maintenant les numérateurs de ces différents cas, et en posant, pour plus de simplicité,

$$n-2=m,$$

ils seront

$$2,\quad 4m\quad \text{et}\quad m(m-1);$$

leur somme nous donne la valeur m^2+3m+2; et par conséquent l'équation

$$A+Bm+m(m-1)=m^2+3m+2,$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs de m, nous fournit les valeurs des coefficients A et B.

II. En tirant trois fois, on aura

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{n^2(n-1)^2}$
$n-3$	$8\cdot\frac{(n-2)2\cdot 1\cdot 2}{n^2(n-1)^2}$
$n-4$	$\frac{8(n-2)2(n-3)2+3\cdot 1\cdot 2(n-2)(n-3)}{n^2(n-1)^2}$
$n-5$	$6\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)2}{n^2(n-1)^2}$
$n-6$	$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^2(n-1)^2}$

En posant de nouveau $n-2=m$, les numérateurs de ces différents cas seront

$$4, \quad 32m, \quad 38m(m-1), \quad 12m(m-1)(m-2)$$

et

$$m(m-1)(m-2)(m-3),$$

dont la somme nous donne la valeur $(m^2+3m+2)^2$; et par conséquent, l'équation pour déterminer les coefficients 4, 32, 38 et 12 sera

$$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)(m-2)+m(m-1)(m-2)(m-3)$$
$$=(m^2+3m+2)^2.$$

CONCLUSION

Ainsi, on peut conclure que, si le nombre des billets est n, dont on tire deux à chaque reprise, le nombre des tirages étant $p+1$, on aura

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\dfrac{A}{n^p(n-1)^p}$
$n-3$	$\dfrac{B(n-2)}{n^p(n-1)^p}$
$n-4$	$\dfrac{C(n-2)(n-3)}{n^p(n-1)^p}$
$n-5$	$\dfrac{D(n-2)(n-3)(n-4)}{n^p(n-1)^p}$
etc.	etc.

et les coefficients A, B, C, D etc. seront donnés par l'équation

$$A+Bm+Cm(m-1)+Dm(m-1)(m-2)+\cdots$$
$$+m(m-1)(m-2)\cdots(m-2p-1)=(m^2+3m+2)^p,$$

qui est indépendante de $m=n-2$.

Ainsi, en tirant quatre fois par deux, on trouve

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-2$	$\dfrac{8}{n^3(n-1)^3}$
$n-3$	$\dfrac{208(n-2)}{n^3(n-1)^3}$
$n-4$	$\dfrac{652(n-2)(n-3)}{n^3(n-1)^3}$
$n-5$	$\dfrac{576(n-2)(n-3)(n-4)}{n^3(n-1)^3}$
$n-6$	$\dfrac{188(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^3(n-1)^3}$
$n-7$	$\dfrac{24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{n^3(n-1)^3}$
$n-8$	$\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n^3(n-1)^3}$

Si on a n billets, dont on tire trois à chaque reprise, en tirant deux fois de suite, on aura

pour le nombre des billets non-sortants	la probabilité
$n-3$	$\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{n(n-1)(n-2)}$
$n-4$	$\dfrac{2\cdot 3\cdot 3\cdot (n-3)}{n(n-1)(n-2)}$
$n-5$	$9\cdot\dfrac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$
$n-6$	$\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$

En considérant les numérateurs, leur somme

$$6+18m+9m(m-1)+m(m-1)(m-2)$$

se présentera sous la forme

$$(m+1)(m+2)(m+3);$$

ici

$$m=n-3$$

et par conséquent, l'équation identique qui sert à déterminer les coefficients 6, 18 et 9 sera

$$A + Bm + Cm(m-1) + m(m-1)(m-2) = (m+1)(m+2)(m+3).$$

En tirant trois fois de suite, l'équation identique pour déterminer les coefficients sera de même

$$\begin{gathered}A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) + Em(m-1)(m-2)(m-3)\\ + Fm(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\\ = \{(m+1)(m+2)(m+3)\}^2\end{gathered}$$

et ainsi de suite.

REGLE GENERALE

Toutes ces recherches nous conduisent à la règle suivante.

Si on a n billets, dont on tire p à chaque reprise, et cela q fois de suite, on demande les probabilités des différents nombres des billets non-sortants.

A cet effet, on commence par chercher les coefficients A, B, C etc. de l'équation identique

$$\begin{gathered}A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) + \cdots\\ + m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-p(q-1)+1)\\ = \{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+p)\}^{q-1};\end{gathered}$$

alors les numérateurs des probabilités respectives seront

$$\begin{gathered}A, \quad Bm, \quad Cm(m-1), \quad Dm(m-1)(m-2) \quad \text{etc.},\\ m(m-1)(m-2)\ldots(m-p(q-1)+1),\end{gathered}$$

m étant $=n-p$, et le dénominateur étant pour toutes le même

$$n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\ldots(n-p+1)^{q-1}.$$

ici le tableau:

Nombre des billets non-sortants	probabilités
$n-p$	$\dfrac{A}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\cdots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-1$	$\dfrac{B(n-p)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\cdots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-2$	$\dfrac{C(n-p)(n-p-1)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\cdots(n-p+1)^{q-1}}$
$n-p-3$	$\dfrac{D(n-p)(n-p-1)(n-p-2)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\cdots(n-p+1)^{q-1}}$
. . . .	. . . .
$n-pq$	$\dfrac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\cdots(n-pq+1)}{n^{q-1}(n-1)^{q-1}(n-2)^{q-1}\cdots(n-p+1)^{q-1}}$

VON DER GESCHWINDIGKEIT DER VERMEHRUNG UND VON DER ZEIT DER VERDOPPELUNG[1])

Achtes Capitel aus dem Werke

Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben .

erwiesen von

JOHANN PETER SÜSSMILCH[2]),

Königl. Preuss. Oberconsistorialrath, Probst in Cölln, und Mitglied der Königl. Academie der Wissenschaften.

Erster Theil. Zwote und ganz umgearbeitete Ausgabe. Berlin, 1761.
Im Verlag des Buchladens der Realschule.

INHALT

---

1) Siehe EULERS Abhandlung 334, p. 79 dieses Bandes und das p. 545 u. f. veröffentlichte Fragment aus den *Adversaria mathematica*. L. G. D.

2) Zu dem, was schon p. 98, Anm. 1, und p. 161, Anm. 2, über SÜSSMILCH und sein Hauptwerk *Die göttliche Ordnung* gesagt worden ist, sei noch Folgendes hinzugefügt. Das Werk erlebte fünf Auflagen, in den Jahren 1741/42, 1761/62, 1767/68 je in 2 Teilen, die vierte, 1775/76, und die fünfte, 1790/92, je in 3 Teilen. L. G. D.

§ 152. Die Zeiten der Verdoppelung werden nach einer vom Herrn Prof. EULER angegebenen Methode und verfertigten Tabelle bestimmet, wenn man weiss, den wievielsten Theil von der Summe der Einwohner der Überschuß der Gebornen beträgt.

§ 153, 154. Es werden die Brandenburgischen Provinzen nochmals nach diesen Zeiten der Verdoppelung geprüft, und bewiesen, daß im Ganzen eine Verdoppelung in 96 Jahren habe erfolgen können. Dieses wird durch die Rechnung des Herrn WARGENTIN bestättiget.

§ 155. Die Wichtigkeit der Sache und die Grösse des Gewinstes, so ein Land in Zeiten der Ruhe und Gesundheit durch die kluge Sorgfalt des Regenten erhalten kann, wird kürzlich bemerket.

§ 156. Es wird noch eine andre allgemeine Tabelle des Herrn Prof. EULERS für alle Fälle des Überschusses mitgetheilet.

§ 157. Anweisung zum Gebrauch der vorstehenden Tabelle.

§ 158. Es wird aus diesen Sätzen geschlossen, dass nach der Schöpfung und Sündfluth eine Verdoppelung in zehn Jahren gar wol möglich hat seyn können, wornach

§ 159. eine Tabelle entworfen ist, woraus die Menge der Menschen einige Jahrhunderte nach der Sündfluth kann erkannt werden, wobey die Zeiten der Verdoppelung allmählig mit dem Anwachs der Menschen sind vergrössert worden.

§ 160. Es wird noch eine andre Tabelle des Herrn Prof. EULERS mitgetheilet, welche den Fortgang der Vermehrung vor Augen leget, und die nach sehr mässigen Sätzen verfertiget ist.

§ 161. Anmerkungen zu dieser Tabelle.[1])

§ 162. Nachdem die Welt nach der Sündfluth zulänglich bevölkert war, so verkürzte die Weisheit des Schöpfers die Dauer des menschlichen Lebens und vergrößerte die Zeiten der Verdoppelung, damit die Bevölkerung langsamer gehen und die Welt nicht überfüllet werden möchte.

§ 163, 164. Es wird gezeiget, daß die profan Geschichte mit der biblischen Zeitrechnung wol bestehen könne, und dass etliche hundert Jahre nach der Sündfluth Asien schon hat können bevölkert seyn.

§ 165. Zuletzt werden die Zeiten der Verdoppelung widerlegt, welche PETTY ohne genugsamen Grund angenommen, desgleichen

§ 166. die vom KING und DAVENANT. Sowie diese allzu langsam, so ist dagegen

§ 167. der D. GREW allzu geschwinde gegangen, welcher daher hier auch kürzlich widerlegt wird.

---

1) Die folgenden Paragraphen 162—167 bieten zu wenig mathematisches Interesse und sind daher in diesem Bande nicht mit abgedruckt worden. F. R.

§ 147.

Die Geschwindigkeit [der Vermehrung] und besonders die Verdoppelung verdienet eine besondre und nähere Untersuchung und Bestimmung. Es lassen sich dadurch einige Schwierigkeiten heben, die bey der Bevölkerung der Welt, vor und nach der Sündfluth, entstehen können. Und da auch der Ritter PETTY[1]) eine allzulange Zeit zur Verdoppelung angenommen und viele Gelehrte ihm beygepflichtet; so ist nöthig, hierinn etwas genaueres vestzusetzen.

Dass sich ein Unterschied in der Geschwindigkeit der Vermehrung finde, erhellet schon zur Genüge aus der Erfahrung (§ 127—131), da in einigen Provinzen die Einwohner in 50 Jahren sich um $\frac{2}{10}$, in andern um $\frac{4}{10}$, in noch andern um $\frac{6}{10}$ oder $\frac{3}{5}$ vermehret haben u. s. w.

Es muß sich auch ein Unterschied finden, wenn in einer Provinz mehr oder weniger Geborne gegen die Gestorbenen kommen. Man setze z. E. dass die Sterblichkeit in allen Provinzen gleich und $\frac{1}{36}$ seyn soll; so werden überall von 36000 Lebenden 1000 sterben. Wenn nun aber in A dagegen 1100, in B 1300, in C 1500 gebohren werden; so werden in A nicht mehr als 100, in B 300, in C aber 500 Geborne überschiessen. Wo aber ein Capital jährlich mit 500 vergrössert wird, da muss die Verdoppelung nothwendig eher und geschwinder erfolgen, als wo nur 100 hinzukommen. 500 ist $\frac{1}{72}$ von 36000, 100 ist aber nur $\frac{1}{360}$. Folglich ist die Vergrösserung in C fünfmal so gross, als in A.

§ 148.

Man kann daher bloss aus dem Verhältnisse der Todten zu den Gebornen und aus dem verschiedenen Überschusse der Gebornen, der sich unter den Brandenburgischen Provinzen befindet, urtheilen, 1) dass die Vermehrung in selbigen mit verschiedener Geschwindigkeit geschehen müsse. Man kann auch 2) daraus urtheilen, dass die Geschwindigkeit in einer und eben derselben Provinz zu verschiedenen Zeiten unterschieden seyn könne und müsse, wenn sich nemlich das Verhältniss der Todten zu den Gebornen ändert und 12 Geborne gegen 10 Todte giebt, da es zu andrer Zeit 15 gegeben hat. Man darf

1) WILLIAM PETTY (1623—1687), Verfasser der *Essays in political arithmetic,* London 1699. L. G. D.

daher 3) nur auf die Grösse des zweiten Gliedes in diesem Verhältnisse sehen; so kann man schon davon urtheilen. Aus den Tabellen ist zu sehen, dass gegen 10 Todte 11, 12, 13, 14, 15 und mehr Geborne kommen. In den letzten Fällen muss also die Geschwindigkeit grösser seyn, als in den ersten, wenn der Lauf nicht durch fremde Dinge gestöhret wird. Es lässet sich weiter 4) daraus urtheilen, ob sich äusserliche und fremde Dinge in die Vermehrung eingemischet, oder ob sie durch Auswanderungen und andre Hindernisse aufgehalten und gestöhret sey. So sind z. E. die Generalverhältnisse von der Kurmark, Pommern, Neumark, Minden und Cleve meist gleich, nemlich wie 10 : 13, gleichwol haben sich die Einwohner daselbst in 50 Jahren verschiedentlich vermehret. Die Mark hat fast anderthalbmal so viel Einwohner, als vor 50 Jahren, da die andern nur etwan ein halbmal so viel bekommen haben. Daraus lässt sichs also wahrscheinlich schliessen, dass die Vermehrung in der Mark nicht bloss aus sich selbst und aus ihrem innerlichen Wachstum herrühre, sondern dass sie durch äusserliche und fremde Ursachen, durch Colonisten, gar sehr müsse beschleuniget worden seyn, indem in allen andern Provinzen keine Auswanderung geschehen ist (§ 136).

§ 149.

So wie die Vermehrung überhaupt, so rühret auch derselben Verschiedenheit aus zwey Quellen her. Die Mortalität und die Fruchtbarkeit sind es, worauf alles beruhet. Wenn die Mortalität von gleicher Grösse ist und bleibt; so entstehet der Unterschied in der Geschwindigkeit von der Fruchtbarkeit, sowol der allgemeinen als der besondern. Wenn aber die Mortalität sich verändert und die Fruchtbarkeit bleibt einerley, dass einer von 50 statt 36, oder daß einer von 25 statt 36 stirbt: so muss dadurch das Verhältniss der Sterbenden zu den Gebornen auch gar sehr verändert werden, und die Vermehrung kann dadurch viel langsamer oder geschwinder gemacht werden. Ich will dieses erläutern.

Man setze 36000 Lebende in einer Provinz, wovon, nach dem jetzigen Gesetze der Sterblichkeit, jährlich $\frac{1}{36}$ oder ein Tausend sterben, und wogegen 1500 gebohren werden. Das Verhältniss der Gestorbenen zu den Gebornen ist also wie 10 : 15, oder es werden halb einmal so viele gebohren, und die Zahl der Lebenden wird mit $\frac{1}{72}$ vergrössert (§ 147). Wenn die Fruchtbarkeit verringert wird, dass nur 1200 statt 1500 gebohren werden; so ist der Überschuss der Gebornen nur 200, und es wird die Zahl der Einwohner nur mit $\frac{1}{180}$ ver-

grössert. Wenn aber die Fruchtbarkeit einerley bliebe, dass nemlich 1500 gebohren würden, es würde aber die Sterblichkeit verringert, dass statt 1000 nur 800 oder $\frac{1}{45}$ abginge: so würden die Gestorbenen zu den Gebornen seyn, wie 800 zu 1500. Der Überschuss würde also 700 seyn, folglich würde die Zahl der Einwohner um $\frac{1}{51}$ grösser werden. Wenn aber die Sterblichkeit verringert und die Fruchtbarkeit zugleich vergrössert würde, so, dass nur 700 oder $\frac{1}{51}$ stürbe und dagegen 1800 gebohren würden: so würde der Überschuss der Gebornen 1100 seyn, folglich die Zahl der Einwohner mit [fast] $\frac{1}{32}$ vergrössert werden. Die Vermehrung würde also weit schneller seyn, und die Verdoppelung weit eher erfolgen als nach den vorigen Fällen, da die Vermehrung mit $\frac{1}{51}$, und noch mehr, als da sie nur mit $\frac{1}{180}$ geschahe.

Dieses sind aber Fälle, die sogar in den jetzigen Umständen der bevölkerten Welt möglich sind, indem vorher erwiesen ist, dass unter Bauersleuten oft nur $\frac{1}{45}$ stirbt (§ 21), und in der preussischen Tabelle oft 18 Geborne gegen 10 Todte gekommen sind (§ 127).

§ 150.

Siehet man aber auf die Zeiten vor und auch einige Hundert Jahre nach der Sündfluth, da die Menschen einige Jahrhunderte lebten; so lässt sichs wol einsehen, dass damals die Sterblichkeit weit geringer gewesen seyn müsse, dergestalt, dass wol kaum von 60, 80 und mehrern jährlich Einer mag gestorben seyn. Es ist auch kein Zweifel, dass nicht bey solchem längeren Leben, bey stärkeren Kräften, bey einer schlechteren Lebensart, die Fruchtbarkeit weit grösser könne und müsse gewesen seyn. Daraus lässt sich schliessen, dass man nichts unmögliches annehme, wenn man setzt, dass damals 2, ja 3 und mehrere Geborne gegen Einen Sterbenden gekommen sind. Ich will nicht einmal die höchsten Fälle annehmen, sondern nur setzen, dass 1) gleich nach der Sündfluth, so wie in den holländischen Dörfern noch jetzt geschieht (§ 58)[1], unter 60 Lebenden jährlich Eine neue Ehe entstanden sey.

1) Süssmilch, wie überhaupt die Statistiker der älteren Schule, misst dem Verhältnisse der Anzahl der jährlich getrauten Paare zu der Zahl der Einwohner eines Landes große Wichtigkeit bei. Süssmilch findet dieses Verhältnis in der Kurmark gleich 1 : 108 (§ 56), in Schweden gleich 1 : 126, in Finnland 1 : 108 (§ 57), in England gleich 1 : 116 (§ 59), in den holländischen Dörfern aber nach N. Struyck (siehe p. 98 des vorliegenden Bandes) gleich 1 : 64 (§ 58), «welches Verhältniss aber als unbrauchbar für andre Länder erkläret wird.» L. G. D.

Wenn wir also 100 000 Lebende annehmen; so werden davon 1 666 Ehen geworden seyn. Wir wollen 2) nur jeder Ehe 6 Kinder durch die Bank geben, da jetzt 4 kommen; so werden 9 996 Kinder seyn gebohren worden. Wir wollen nun 3) die Sterblichkeit nur auf $\frac{1}{72}$, statt $\frac{1}{36}$, ansetzen, halb[1]) so hoch wie sie jetzt ist; so werden von 100 000 Lebenden ihrer 1 388 verstorben seyn. Diese, von den Gebornen abgezogen, lassen 8 608 zum Überschuß über die Gestorbenen, und dieser ist $\frac{1}{11}$ des Ganzen, womit die Zahl der Lebenden vergrössert wird. Die Gestorbenen verhalten sich zu den Gebornen, wie 1 zu $7\frac{1}{10}$; es sind ihrer also 7 mal mehr gebohren, als gestorben.

§ 151.

Diese jetzt angezeigten Fälle der verringerten Sterblichkeit und vergrösserten Fruchtbarkeit und der dadurch beschleunigten Vermehrung haben nun zu der Zeit statt gehabt, da 1) das Leben der Menschen von längerer Dauer gewesen als anjetzt, und da 2) die Zeugungskräfte länger gedauret, und 3) keine Hindernisse den Ehen bey einer noch nicht bevölkerten Erde gelegt worden. Nach dem Maasse aber, dass sich diese Umstände geändert, dass das Alter abgenommen, und folglich die Sterblichkeit zugenommen, auch die Bevölkerung das Heyraten aufgehalten; hat auch die Geschwindigkeit in der Vermehrung abnehmen, und die Zeiten der Verdoppelung haben grösser werden müssen.

§ 152.

Bey der Berechnung der Verdoppelung kommt es darauf an, dass man wisse, den wievielsten Theil von der Anzahl der Einwohner in einer Provinz der Überschuss der Gebornen über die Gestorbenen ausmache? Wenn z. E. in einer Provinz 10 000 sterben, und es werden dagegen 15 000 gebohren; so beträgt der Überschuss der Gebornen 5 000. Der wievielste Theil sind nun diese 5 000 von der Zahl aller Einwohner? Wenn die Einwohner der Zahl nach bekandt sind, so ist das Verhältniss durch die Division und durch das Verhältniss des Quotienten zu 1 leicht zu finden. Da aber deren Zahl mehrentheils unbekandt ist; so kann ich sie finden, wenn ich die Mittelzahl der Gestorbenen von etlichen guten und gemeinen Jahren durch 36 multiplicire

1) Im Originale steht aus Versehen *noch einmal so hoch* statt *halb so hoch*. L. G. D.

[§ 149]; oder wenn ich keine gute Mittelzahl der Todten haben kann: so darf man allenfals nur die Mittelzahl der Getauften mit 27 multipliciren (§ 117). So genau kommt es hiebey nicht darauf an.

Wenn man nun setzt, dass der Überschuss der Gebornen $\frac{1}{72}$ von der Summe der Lebenden betrage; so werden da, wo vor einem Jahre 72 gelebet, im folgenden zweiten Jahre leben: 72 und noch $\frac{1}{72}$. Es ist aber $\frac{1}{72} = 1$, folglich $72 + 1$ oder 73. Wenn nun die Summe der Lebenden 36000 gewesen; so wird die Regel der Proportion also gemacht: Wenn aus 72 im folgenden Jahre 73 geworden, wie viel werden aus 36000 werden? Das Product wird seyn

$$\frac{73}{72} \cdot 36\,000.$$

Im dritten Jahre wird es seyn

$$\frac{73}{72}\left(\frac{73}{72} \cdot 36000\right)$$

u. s. w. Es enstehet also hieraus eine Progression, wodurch die Zeiten der Verdoppelung können bestimmet werden. Ich habe hiebey meinen hochgeschätzten Freund und academischen Collegen, den Herrn Prof. EULER, um Hülfe angesprochen, dem ich auch hiemit öffentlich für die gehabte Mühe Dank abstatte.

Folgende Tabelle wird uns die Zeiten der Verdoppelung bey jetziger Sterblichkeit vor Augen legen.

Wenn in einem Lande 100 000 Menschen leben, und es stirbt Einer von 36,

und es verhalten sich sodann die Gestorbenen zu den Gebornen, wie	so wird alsdann der Überschuß der Gebornen seyn:	Dieser Überschuß der Gebornen wird sodann seyn von der Summe aller Lebenden:	und also wird die Verdoppelung erfolgen in:
10 : 11	277	$\frac{1}{360}$ 1)	$250\frac{1}{2}$ Jahren
10 : 12	555	$\frac{1}{180}$	125 „
10 : 13	833 2)	$\frac{1}{120}$ 3)	$83\frac{1}{2}$ 4) „
10 : 14	1111 5)	$\frac{1}{90}$	$62\frac{3}{4}$ „
10 : 15	1388	$\frac{1}{72}$	$50\frac{1}{4}$ „
10 : 16	1666	$\frac{1}{60}$	42 „
10 : 17	1944 6)	$\frac{1}{51}$	$35\frac{3}{4}$ „
10 : 18	2222 7)	$\frac{1}{45}$	$31\frac{2}{3}$ „
10 : 19	2499	$\frac{1}{40}$	28 „
10 : 20	2777	$\frac{1}{36}$	$25\frac{3}{10}$ „
10 : 22	3333 8)	$\frac{1}{30}$	$21\frac{1}{8}$ „
10 : 25	4166 9)	$\frac{1}{24}$	17 „
10 : 30	5555 10)	$\frac{1}{18}$	$12\frac{4}{5}$ „

§ 153.

Nach dieser Tabelle kann man die Geschwindigkeit in dem Fortgange der Vermehrung in den Brandenburgischen Provinzen beurtheilen.

1) Es erhellet hieraus, dass bey der jetzigen Sterblichkeit und bey einem ganz mittelmäßigen Überschusse der Gebornen, bey $\frac{3}{10}$, oder wenn die Todten

1) Im Original steht: $\frac{1}{361}$; 2) 722, 3) $\frac{1}{138}$; 4) 96; 5) 1100; 6) 1943; 7) 2221; 8) 3332; 9) 4165; 10) 5554. L. G. D.

zu den Gebornen sind wie 10 : 13, die Verdoppelung in 83 bis 84 Jahren[1]) erfolgen könne. Da nun das Generalverhältniss von *allen preussischen Landen* ist wie 10 : 13 (Tab. XX, § 127)[2]); so ist hieraus klar, was man in selbigen in weniger als 100 Jahren erwarten könne, wenn keine Störungen von Kriegen und dergleichen dazwischen kommen.

2) Man siehet ferner hieraus, wie sehr die Verdoppelung beschleunigt wird, wenn nur 1 Geborner mehr und wenn 14 Geborne gegen 10 Sterbende kommen, indem sodann die Verdoppelung in 62 bis 63 Jahren geschieht.

3) Wenn ihrer halb einmal so viele gebohren werden, als sterben, oder diese sind zu jenen wie 10 : 15; so erfolgt sie schon in 50 Jahren. Und in 42 Jahren, wenn gar 16 Geborne gegen 10 Sterbende kommen. Dis ist nun aber gar kein ohnmöglicher Fall. Die *preussische Tabelle* (Tab. XXI) hat vor der Pest 15, und in den 46 Jahren nach derselben 16 Geborne gegen 10 Gestorbene gehabt. Folglich darf man sich über den schleunigen Fortgang der Vermehrung in solcher Provinz gar nicht wundern, um so weniger, da im Jahr 1732 die Salzburgische Colonie von 20 000 Seelen dazu gekommen. Es sind ihrer nicht einmal so viele, als seyn können, welches wol von der zuweilen durch epidemische Jahre veränderten Sterblichkeit herrühret.

Die *Mark Brandenburg* (Tab. XXII) hatte auch von 1698 bis 1712, 16 ja sogar 17 Geborne gegen 10 Gestorbene. Wäre es dabey geblieben; so hätten ihre Einwohner schon um das Jahr 1740 verdoppelt seyn können, und zwar ohne Colonisten, bloss durch den innerlichen und natürlichen Wachsthum. Allein dieser große Überschuss der Gebornen fiel nachher von $\frac{7}{10}$ und $\frac{6}{10}$ auf $\frac{3}{10}$, so daß das Generalverhältniss aller in der Tabelle befindlichen 36 Jahre nur ist, wie 10 : 13. Dadurch ist die Geschwindigkeit in der Vermehrung aufgehalten worden. Die Ursache von diesem Abfall des Überschusses liegt in der verringerten Zahl der Heyratenden, welches schon (§ 71) erwiesen ist, indem statt etlicher 90 nachher 110 bis 116 nur Ein Ehepaar gegeben. Wegen dieser verringerten allgemeinen Fruchtbarkeit haben auch nachher nicht mehr so viele können gebohren werden, und also auch nicht überschiessen. Wenn es dem

1) Original: *in 96 Jahren.* L. G. D.

2) Diese Tabelle XX umfaßt den Zeitraum von 1698 bis 1756 und, für die letzten 18 Jahre desselben, 390 465 getraute Paare, 1 597 994 Getaufte und 1 196 786 Begrabene. L. G. D.

Herrn von Bielefeld[1]) belieben solte, alle diese Dinge in ihrer Verbindung und nach ihren Ursachen in Überlegung zu ziehen; so verspreche ich mir ein ganz andres Urtheil von unsrer Mark sowol, als allen Brandenburgischen Provinzen (§ 143).[2])

Das *Herzogthum Cleve* (Tab. XXX) hatte zwar anfänglich auch 15 Geborne gegen 10 Gestorbene; es fiel aber dieses gar bald, so, dass nachher das Verhältniss mehrentheils nur gewesen ist $\frac{10}{11}$ bis $\frac{10}{12}$. Der Überschuß fiel also von $\frac{1}{2}$ bis auf $\frac{1}{5}$ ja bis $\frac{1}{10}$ herunter. Das Generalverhältniss von 59 Jahren ist wie 10 : 11. Nach der Tabelle (§ 152) gehören daselbst 125 bis 200 Jahre zur Verdoppelung.

Nach diesen Beyspielen wird man die besondre Geschwindigkeit der Vermehrung der einzelnen Provinzen leicht beurtheilen können, wobey ich mich jetzt nicht aufhalte.

§ 154.

Man erkennet hieraus die Übereinstimmung dieser Rechnungen mit dem, was vorher aus der Erfahrung und aus den Listen ist dargethan worden (§ 131 und folgende).

Da nun 1) aus dem Generalverhältniss der Brandenburgischen Provinzen, welches 2) auf 50, 60 und mehr Jahren einzelner Provinzen und 3) auf vielen hundert Jahren aller Provinzen zusammen, beruhet, in welcher langen Reihe von Jahren 4) die guten und epidemischen Jahre mit einander vermischt sind, und da auch 5) nicht alle Provinzen von gleicher Beschaffenheit sind, indem einige $\frac{6}{10}$, andere $\frac{3}{10}$, noch andere nur $\frac{2}{10}$ ja $\frac{1}{10}$ Überschuss geben, und also 6) in dem Generalverhältniss fast alle mögliche Fälle vorkommen, nur nicht langwierige Kriege und lang anhaltende Pesten: da aus diesem Generalverhältniss der Gestorbenen zu den Gebornen, welches ist wie 10 : 13 oder 100 : 133 (Tab. XX), erhellet, daß die Verdoppelung in $83\frac{1}{2}$ oder rund in 85 Jahren[3]),

1) Jakob Friedrich Freiherr von Bielfeld (fälschlich Bielefeld oder Bielefeldt) (1717—1770), wurde 1743 Ehrenmitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften und 1748 in den Freiherrnstand erhoben. Seine bekannteste Schrift, auf die Süssmilch hier anspielt, ist das dreibändige Werk *Institutions politiques*, Leyde 1759/62. L. G. D.

2) Süssmilch beweist, daß die Gesamtanzahl der Menschen auf Erden nicht konstant bleibt, und benutzt diese Gelegenheit, «den Herrn von Bielefeld zu widerlegen, welcher die Richtigkeit der *Preussischen Listen* ohne Grund hat verdächtig zu machen gesucht; welches gänzlich abgelehnet wird.» L. G. D.

3) Original: *in 96 oder rund 100 Jahren;* vgl. dazu p. 514. L. G. D.

erfolgen könne: so sehe ich nicht ein, warum man diese Regel nicht für allgemein solte halten können. Und dieses um so mehr, da Schweden, Finnland und Engelland damit übereinstimmen.

Herr WARGENTIN *)[1]) hat die Zeiten der Verdoppelung auch berechnet und stimmt mit diesen Rechnungen meist überein. Nach dem Verhältniss $\frac{10}{14}$ setzt er die Zeit auf 74 Jahre. Nach dem epidemischen Jahre von 1749, da es $\frac{100}{126}$ gewesen, würde sie in 100 Jahren, und nach dem gesunderen Jahre von 1750, da das Verhältniss wie 100 : 137 war, in 77 Jahren erfolgen. In Finnland sind im Jahr 1749, ohnerachtet die Pocken und andre nicht gewöhnliche Seuchen über 5000 Kinder mehr als gewöhnlich weggenommen, dennoch 144 Geborne gegen 100 Todte gewesen; nach welchem Fuss die Verdoppelung in 69 Jahren geschehen müste. Er hat sich einer andern Methode zur Berechnung bedienet und dabei zum Grunde gesetzt, dass die Geburten sich zur Zahl der Lebenden verhalten wie 1 : 30; wenn aber dieses Verhältniss ist wie 1 : 25; so erfolgt die Verdoppelung in 58 Jahren.

§ 155.

Es ist also möglich, dass die Einwohner eines Landes sich nicht nur in 100, sondern sogar in 50 ja 40 Jahren verdoppeln können. Es ist nicht nur möglich, sondern es geschiehet noch jetzt würklich und muss geschehen, wenn gegen 10 Sterbende 15 bis 16 Geborne kommen und der Überschuss $\frac{1}{70}$ oder $\frac{1}{60}$ der Einwohner beträgt (§ 152), wie solches in Preussen und anderswo sich in der That findet. Jedoch wird bey dem allen zum Grunde gesetzt, daß dieser Lauf der Natur nicht durch Pesten oder auch durch heftige, blutige und langedaurende Kriege müsse unterbrochen werden.

Welch ein Gewinst ist das aber nicht für einen Staat? Welche Reitzungen für Fürsten, um sich wahrhaftig zu bereichern? Wenn sie auch um

*) Schwedische Abhandlung: Vol. 17, p. 6.

1) PETER WILHELM WARGENTIN (1717—1783), schwedischer Astronom und Statistiker, 34 Jahre lang Sekretär der schwedischen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm. SÜSSMILCH's Zitat bezieht sich nicht auf die Originalausgabe (sonst müßte es *Vol. 16* heißen), sondern auf die KÄSTNERSCHE Übersetzung der Abh. der schwedischen Akademie, in der sich WARGENTINS *Anmerkungen vom Nutzen der jährlichen Verzeichnisse Gebohrner und Verstorbener in einem Lande*, Bd. 17 (1755), Leipzig 1757, p. 3—16, 81—94, 159—167, 239—250, finden. Vgl. G. ENESTRÖM, *P. W. WARGENTIN und die sogenannte HALLEYSCHE Methode.* Abh. zur Gesch. der Math. 9 (1899) p. 81—95. L. G. D.

Gottes willen es nicht wolten; so solten sie doch wol wenigstens um ihres eigenen Nutzens willen ihrer Länder Bestes besorgen. Hieraus ist klar, wie der Unterthanen und der Regenten Bestes auf eine ganz unzertrennliche Weise verbunden sey. Diejenigen Summen, die ein Fürst anwendet, um seinem Volke Brod und Unterhalt zu verschaffen und alle Hindernisse zum Heyraten aus dem Wege zu räumen; die Freygebigkeiten, die er an Arme, an Beförderung der Handwerker, Künste und Wissenschaften, an Handlung, an die Cultur des Ackerbaues, verwendet, bringen gewiß mehr, als hundertfältigen Zins. Die Mühe, so er sich giebt, um seinem Volke Freyheit, Sicherheit und Überfluss zu verschaffen und sie zum Fleiß und Tugend zu ermuntern, zeigt sich gar bald, wie ein guter Saame, in den Früchten und in der Vermehrung seines Volkes. Es ist möglich, daß ein Fürst 50 Jahre regieren und daß er in solcher Zeit sein Volk verdoppelt sehen kann. Wie abscheulich muß nicht bloss diese Betrachtung den Krieg machen? Zu welcher Sorgfalt soll das nicht antreiben, ansteckenden Seuchen vorzubeugen, selbige unter dem ärmeren und unwissenden Theil des Volkes, wo nicht ganz zu hindern, doch zu verringern, theils durch Beförderung der medicinischen Wissenschaft, theils durch Bestellung hinlänglicher und geschickter Ärtzte?

§ 156.

Um aber die Sache zum Gebrauch für alle fast mögliche Fälle allgemeiner zu machen; so hat der Herr Professor Euler annoch nachstehende Tabelle (S. 519 und 520) verfertiget.

§ 157.

Anweisung zum Gebrauch vorstehender Tabelle.[1])

1) Man setze den Fall, dass gegen 100 Sterbende nur 110 sollen gebohren werden, und dass die Sterblichkeit soll seyn $\frac{1}{32}$, oder dass jährlich von 32 Einer stirbt, welches nicht unmöglich ist: so werden von 100000 Lebenden jährlich 3125 sterben und dagegen 3437 gebohren werden, und also wird der Überschuss seyn 312. Dieser ist von der Summe der Lebenden $\frac{1}{320}$, oder er verhält sich zu selbigen wie 1 : 320. Dieses Verhältniss ist in der Tabelle befindlich, und giebt zur Verdoppelung $222\frac{1}{10}$ Jahre. Wenn also die Sterblichkeit so gross und die Fruchtbarkeit so klein ist, so gehören über 200 Jahre dazu.

1) Im Original folgt die Tabelle unmittelbar nach § 156. L. G. D.

Tabelle,
um alle Zeiten der Verdoppelung nach selbiger zu berechnen.[1])

Verhältniss des Überschusses zur Zahl der Lebenden	Zeiten der Verdoppelung. Jahre. Zehntausendtheilchen	Verhältniss des Überschusses zur Zahl der Lebenden	Zeiten der Verdoppelung. Jahre. Zehntausendtheilchen
10	7,2722	21	14,9000
11	7,9659	22	15,5932
12	8,6595	23	16,2864
13	9,3530	24	16,9797
14	10,0465	1 : 25	17,6729
1 : 15	10,7400	26	18,3662
16	11,4333	27	19,0594
17	12,1266	28	19,7527
18	12,8200	29	20,4458
19	13,5133	30	21,1391
20	14,2066		

1) In dieser Tabelle sind die Zahlen der Originalausgabe abgedruckt. Indessen sind von diesen 82 Zahlen nur 12 bis auf 4 Dezimalstellen richtig. Hier die genaueren Werte, in derselben Reihenfolge.

7,2725	22,5256	76,5921	215,2212
7,9661	23,9119	83,5220	222,1623
8,6596	25,2983	90,4564	229,0769
9,3532	26,6846	97,3860	236,0094
10,0466	28,0709	104,3214	242,9424
10,7400	29,4572	111,2494	249,8793
11,4334	30,8438	118,1807	256,8077
12,1267	32,2298	125,1111	263,7375
12,8200	33,6162	132,0422	270,6617
13,5134	35,0026	138,9732	277,6005
14,2067			

14,8999	38,4688	145,9044	284,5543
15,5932	41,9349	152,8381	291,4690
16,2865	45,4007	159,7654	298,4040
16,9797	48,8661	166,7017	305,3352
17,6730	52,3321	173,6344	312,2717
18,3661	55,7979	180,5602	319,1920
19,0595	59,2625	187,4992	326,1430
19,7526	62,7289	194,4261	333,0346
20,4458	66,1953	201,3578	339,9932
21,1391	69,6602	208,2964	346,9286
			693,4577

L. G. D.

Verhältniss des Überschusses zur Zahl der Lebenden	Zeiten der Verdoppelung. Jahre. Zehntausendtheilchen	Verhältniss des Überschusses zur Zahl der Lebenden	Zeiten der Verdoppelung. Jahre. Zehntausendtheilchen
1 : 32	22,5255	1 : 210	145,9072
1 : 34	23,9119	1 : 220	152,8387
1 : 36	25,2983	1 : 230	159,7702
1 : 38	26,6847	1 : 240	166,7017
1 : 40	28,0711	1 : 250	173,6332
1 : 42	29,4574	1 : 260	180,5647
1 : 44	30,8438	1 : 270	187,4961
1 : 46	32,2302	1 : 280	194,4275
1 : 48	33,6165	1 : 290	201,3590
1 : 50	35,0029	1 : 300	208,2905
1 : 55	38,4687	1 : 310	215,2220
1 : 60	41,9345	1 : 320	222,1535
1 : 65	45,4003	1 : 330	229,0850
1 : 70	48,8661	1 : 340	236,0164
1 : 75	52,3318	1 : 350	242,9479
1 : 80	55,7977	1 : 360	249,8794
1 : 85	59,2634	1 : 370	256,8109
1 : 90	62,7292	1 : 380	263,7425
1 : 95	66,1950	1 : 390	270,6740
1 : 100	69,6607	1 : 400	277,6055
1 : 110	76,5923	1 : 410	284,5370
1 : 120	83,5238	1 : 420	291,4685
1 : 130	90,4554	1 : 430	298,4000
1 : 140	97,3868	1 : 440	305,3314
1 : 150	104,3183	1 : 450	312,2629
1 : 160	111,2598	1 : 460	319,1943
1 : 170	118,1813	1 : 470	326,1258
1 : 180	125,1128	1 : 480	333,0573
1 : 190	132,0443	1 : 490	339,9888
1 : 200	138,9757	1 : 500	346,9202
		1 : 1000	693,4937

2) Wir wollen einen andern Fall setzen. Die Sterblichkeit soll seyn, wie sie unter den Landleuten zu seyn pflegt, $\frac{1}{43}$ (§ 21). Die Fruchtbarkeit soll bey einem angefüllten Lande, wo die Ehen Hindernisse finden, mittelmässig seyn, dass daher nur 13 Geborne gegen 10 Todte kommen. So werden von 100000 sterben 2325, dagegen werden gebohren werden 3022. Der Unterschied oder der Überschuss wird seyn 697. Dieser verhält sich zur Zahl der Lebenden, wie 1 : 143. Diesem kommt in der Tabelle das Verhältniss wie 1 : 140 am nächsten, und giebt $97\frac{3}{10}$ Jahre zur Verdoppelung. Und auf die Weise können alle andre Fälle berechnet werden.

§ 158.

Da sowol aus der Tabelle (§ 152) als aus der Erfahrung erhellet, sonderlich aus dem, was von *Preussen* angeführet worden (§ 153, n. 3), dass bey dem jetzigen Zustande der Welt und in bereits bevölkerten Ländern eine Verdoppelung in 50, 40 und noch weniger Jahren erfolgen könne, wenn Kriege und Pesten nicht dazwischen kommen: so werden wir nunmehro wol leicht einsehen und zugestehen, dass die Verdoppelungen im Anfange der Welt und nach des Noah Zeiten in noch viel kleineren Perioden haben geschehen können und auch haben erfolgen müssen, weil sowol die Dauer des Lebens damals viel länger, folglich die Sterblichkeit viel kleiner, anbey auch die Fruchtbarkeit viel grösser gewesen.

Ich will hier nicht einmal alles das annehmen, was mir ein jeder würde zugeben müssen, welcher die Sache recht einsieht; sondern nur solche Fälle setzen, die im jetzigen Zustande der Welt nicht ganz unmöglich scheinen. Wir wollen 100000 Menschen setzen, unter denen 1) die Sterblichkeit $\frac{1}{60}$ gewesen, oder von 60 jährlich Einer hat sterben sollen; so werden ihrer 1666 in einem Jahre gestorben seyn. In der *kurmärkischen* Liste (Tab. I) giebt es Fälle, da nur von 50 Einer abgegangen. Wir wollen setzen, 2) daß unter 60 Lebenden eine Ehe geschlossen worden, dergleichen sich auf den Holländischen Dörfern gefunden (§ 58); so werden 1666 Ehepaare in einem Jahre entstanden seyn. Es soll 3) die eheliche Fruchtbarkeit nur ganz mässig gewesen seyn, und es sollen auf jede Ehe durch die Bank nur 5 Kinder kommen, welches jetzt noch zuweilen geschieht; so werden 4) von 1666 Ehen 8330 Kinder seyn erzeuget worden. Die Gestorbenen verhielten sich demnach zu den Gebornen wie 1666 zu 8330, oder wie 1 : 5. Es werden also 5 mal so viel gebohren als gestorben seyn. Nach Abzug

der Gestorbenen bleiben 6664 übrig. Dieser Überschuß der Gebornen ist zur Summe aller Lebenden, wie 1:15, oder er ist $\frac{1}{15}$. Nach der Tabelle (§ 156) giebt dieses Verhältniss $10\frac{7}{10}$ Jahre zur Verdoppelung.

Es ist also bey den angenommenen ganz mässigen Sätzen möglich, dass eine Verdoppelung in 10 Jahren erfolgen könne. Die allgemeine und die eheliche Fruchtbarkeit findet noch jetzt statt. Die angenommene Sterblichkeit zu $\frac{1}{60}$ würde auch noch jetzt, ohne die vorzügliche Dauer des patriarchalischen Lebens statt finden, wenn bey den Kindern die convulsivischen Krankheiten und die Pocken nicht ganz weggenommen, sondern nur gemindert würden, als woran anjetzt in Städten $\frac{3}{10}$, im Ganzen aber wenigstens $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ von allen Gebornen im ersten Jahre ihres Lebens hinweggerissen werden, wie nachher wird erwiesen werden.

§ 159.

Da also erwiesen ist, daß auch in 10 Jahren eine Verdoppelung möglich sey; so habe ich die nachstehende Tabelle darnach entworfen, damit man sich einen richtigen Begrif von der großen Geschwindigkeit der Vermehrung nach der Sündfluth machen und den gemachten Einwendungen begegnen könne. Ich habe nach der Col. *B* zuerst 10 Jahre zur Verdoppelung angenommen, da noch gar keine Hindernisse weder den Heyraten, noch der ehelichen Fruchtbarkeit im Wege stunden, ja da ein jeder Vater und Herr einer Familie viele Kinder, und zwar mit Recht, für einen Segen hielt. So wie die Menschen etwas anwuchsen, habe ich die Zeiten der Verdoppelung etwas vergrössert auf 15, 20, 25 Jahre u. s. w.

Tabelle,

welche die geschwinde Vermehrung der Menschen nach der Schöpfung und Sündfluth aus den erwiesenen möglichen Perioden der Verdoppelungen vor Augen stellet.

Zahl der Menschen	Perioden der Verdoppelung	Jahre vom Anfang an	Zahl der Verdoppelungen
A	B	C	D
2	In 10 Jahren	1	0
4	" " "	10	1
8	" " "	20	2
16	" " "	30	3
32	" " "	40	4

A	B	C	D
64	In 10 Jahren	50	5
128	„ „ „	60	6
256	„ „ „	70	7
512	„ „ „	80	8
1 024	„ „ „	90	9
2 048	„ „ „	100	10
4 096	„ 15 „	115	11
8 192	„ „ „	130	12
16 384	„ „ „	145	13
32 768	„ „ „	160	14
65 536	„ „ „	175	15
131 072	„ „ „	190	16
262 144	„ „ „	205	17
524 288	„ „ „	220	18
1 048 576	„ 20 „	240	19
2 097 152	„ „ „	260	20
4 194 304	„ „ „	280	21
8 388 608	„ „ „	300	22
16 777 216	„ 25 „	325	23
33 554 432	„ „ „	350	24
67 108 864	„ „ „	375	25
134 217 728 [1])	„ „ „	400	26
268 435 456	„ „ „	425	27
536 870 912	„ „ „	450	28
1 073 741 824	„ „ „	475	29
2 147 483 648	„ „ „	500	30
4 294 967 296	„ 30 „	530	31
8 589 934 592	„ „ „	560	32
17 179 869 184	„ 40 „	600	33
34 359 738 368	„ 50 „	650	34
68 719 476 736	„ „ „	700	35
137 438 953 472	„ „ „	750	36
274 877 906 944	„ „ „	800	37
549 755 813 888	„ „ „	850	38
1 099 511 627 776	„ „ „	900	39

1) Original: 134 217 748; infolgedessen sind auch alle folgenden Zahlen des Originals falsch. Die Berichtigung ist schon in der 4. Auflage (p. 293) erfolgt. L. G. D.

Anmerkung. Es haben sich auch andre bemühet, diese Materie durch Tabellen zu erläutern. Man hat sich hiezu der Generationen zum Theil bedienet. Meiner Einsicht nach sind die erwiesenen Verdoppelungen wol ohnstreitig das kürzeste und sicherste Mittel. Wolte man dagegen etwas einwenden; so müste man die Gründe umstossen, worauf die erwiesenen Perioden der Verdoppelung beruhen, welches wol schwerlich wird geschehen können. WHISTON*)[1]) hat sich auch schon dieser Methode bedienet, und er hatte Recht, ob er schon von andern deshalb ist getadelt worden. Der Herr WALLACE**)[2]) hat in seiner schönen Abhandlung auch eine mitgetheilet, dabey [ich] mich aber jetzt nicht aufhalte.

§ 160.

Um aber zu zeigen, dass in der vorhergehenden Tabelle (§ 159) nichts unmögliches enthalten sey; so will ich noch eine andre schon vor einigen Jahren von dem Herrn Prof. EULER auf meine Bitte nach der vorgedachten Methode verfertigte Tabelle mittheilen. Sie ist zu schön, als dass ich sie solte können weglassen. Obschon nach dieser die Vermehrung im Anfange langsamer geht, und auch nach 300 Jahren die Zahl der Lebenden nicht so gross ist, als nach der vorstehenden Tabelle; so wird man doch auch leicht urtheilen, dass dieser Unterschied nicht so gross seyn würde, wenn ein längeres Leben und eine grössere Fruchtbarkeit der Ehen nach der Schöpfung und Sündfluth zum Grunde gelegt wäre. Doch zu denen Folgen, die ich nachher aus der erwiesenen Geschwindigkeit der Vermehrung herleiten will, wird auch diese auf sehr gemässigten Sätzen beruhende Tabelle hinlänglich seyn, indem daraus erhellet, dass nach 300 Jahren von einem Ehepaar schon an die 4 Millionen Nachkommen haben entstehen können.

---

*) *Allgemeine Welthistorie* mit D. BAUMGARTENS[3]) Vorrede. I. Theil p. 221, § 238.

**) *Sur la difference du nombre des hommes* etc. p. 7 sq.

---

1) WILLIAM WHISTON (1667—1752), englischer Mathematiker und Theologe, Verfasser zahlreicher Schriften über die verschiedensten Wissensgebiete. L. G. D.

2) ROBERT WALLACE (1697—1771) veröffentlichte unter anderm eine *Dissertation on the Numbers of Mankind in ancient and modern Times*, 1753, die auf Veranlassung von MONTESQUIEU (1689—1755) eine französische Übersetzung erfuhr und 1809 von neuem in englischer Ausgabe erschien. L. G. D.

3) SIEGMUND JAKOB BAUMGARTEN (1706—1757), einflußreicher Theologe, seit 1734 Professor in Halle, übersetzte die von englischen Gelehrten bearbeitete «Allgemeine Weltgeschichte», 16 Bände, Halle 1744—1756. L. G. D.

Herr Prof. EULER nimmt an, 1) dass im Anfang 2 Eheleute gewesen von 20 Jahren, 2) ihre Nachkommen sollen sich auch im 20sten Jahre jederzeit verheyraten, und es sollen 3) aus jeder Ehe 6 Kinder erzeuget werden. (Dis würde gewiss noch erfolgen können, wenn die ungleichen Ehen gehindert würden, wenn gleich und gleich, und wenn alles zur rechten Zeit heyraten könnte.) Damit aber 4) nicht alle Jahr eine Veränderung vorgehe; so sollen immer Zwillinge auf die Welt kommen, nemlich aus jeder Ehe das erste Paar im 22sten, das andre im 24sten und das dritte im 26sten Jahre. Es sollen 5) alle Kinder am Leben bleiben, sich verheyraten und nicht eher sterben, als bis sie 40 Jahre alt sind. (Dieses ist bey der jetzigen Kürtze des Lebens ohngefehr die mittlere Dauer desselben im Ganzen, bey der viel längeren Dauer vor und nach der Sündfluth ist auch dieses mittlere Alter viel grösser gewesen. Wenn daher die Fruchtbarkeit der Ehen zu gross scheinen möchte; so wird die Sache hiedurch wieder ersetzet.)

Nach diesen Sätzen werden also im Anfang nur 2 Personen seyn, nach 2 Jahren 4, nach 4 Jahren sechse, nach 8 Jahren achte. Von dieser Zeit an geht keine Veränderung vor, als bis die 2 ersten Kinder das 22ste Jahr erreichet, welches nach 24 Jahren geschieht, da erst wieder 2 Kinder zur Welt kommen. Zwey Jahre hernach wird dieses Paar noch 2, dasjenige aber, was im 4ten Jahre gebohren, auch 2 Kinder liefern; im 28sten Jahre werden 6 Kinder kommen, im 30sten wieder nur 4, und also fort.

Um sich nun von diesem im Anfang etwas unordentlichen Wachsthum einen Begrif zu machen; so stehen in der 2ten Columne die Geburten von 2 zu 2 Jahren, in der dritten Columne ist die Zahl aller vorher Gebornen zusammen genommen, welche jederzeit die Zahl aller Lebenden anzeigen würde, wenn inzwischen niemand gestorben wäre. Da aber im 40sten Jahre des Alters alle wieder sterben; so ist deren Anzahl in der 4ten Columne. Wenn man selbige von der Zahl aller, in der dritten Columne, abzieht; so bekommt man die Zahl der Lebenden in jedem Jahre, die in der 5ten Columne befindlich ist.[1])

---

1) Der letzte Satz ist nach der vierten Auflage p. 293 wiedergegeben. Die zweite Auflage hat hier folgende unrichtige Wendung: ... *in der 4ten Columne. Wenn man selbige von den Gebornen abzieht; so bekommt man die Zahl der Lebenden in jedem Jahre, wenn man die Gestorbenen von den Gebornen abzieht, die in der 5ten Columne befindlich.* L. G. D.

Tabelle des allmähligen Wachsthums nach vorangenommenen Sätzen.

Jahre	Zahl der Gebornen	Zahl aller	Zahl der Gestorbenen	Zahl der Lebenden
0	0	2	0	2
2	2	4	0	4
4	2	6	0	6
6	2	8	0	8
8	0	8	0	8
10	0	8	0	8
12	0	8	0	8
14	0	8	0	8
16	0	8	0	8
18	0	8	0	8
20	0	8	2	6
22	0	8	2	6
24	2	10	2	8
26	4	14	2	12
28	6	20	2	18
30	4	24	2	22
32	2	26	2	24
34	0	26	2	24
36	0	26	2	24
38	0	26	2	24
40	0	26	2	24
42	0	26	4	22
44	0	26	6	20
46	2	28	8	20
48	6	34	8	26
50	12	46	8	38
52	14	60	8	52
54	12	72	8	64
56	6	78	8	70
58	2	80	8	72

Jahre	Zahl der Gebornen	Zahl aller	Zahl der Gestorbenen	Zahl der Lebenden
60	0	80	8	72
62	0	80	8	72
64	0	80	10	70
66	0	80	14	66
68	2	82	20	62
70	8	90	24	66
72	20	110	26	84
74	32	142	26	116
76	38	180	26	154
78	32	212	26	186
80	20	232	26	206
82	8	240	26	214
84	2	242	26	216
86	0	242	28	214
88	0	242	34	208
90	2	244	46	198
92	10	254	60	194
94	30	284	72	212
96	60	344	78	266
98	90	434	80	354
100	102	536	80	456
102	90	626	80	546
104	60	686	80	606
106	30	716	80	636
108	10	726	82	644
110	2	728	90	638
112	2	730	110	620
114	12	742	142	600
116	42	784	180	604
118	100	884	212	672

Jahre	Zahl der Gebornen	Zahl aller	Zahl der Gestorbenen	Zahl der Lebenden
120	180	1064	232	832
122	252	1316	240	1076
124	282	1598	242	1356
126	252	1850	242	1608
128	180	2030	242	1788
130	100	2130	244	1886
132	42	2172	254	1918
134	14	2186	284	1902
136	16	2202	344	1858
138	56	2258	434	1824
140	154	2412	536	1876
142	322	2734	626	2108
144	532	3266	686	2580
146	714	3980	716	3264
148	786	4766	726	4040
150	714	5480	728	4752
152	532	6012	730	5282
154	322	6334	742	5592
156	156	6490	784	5706
158	72	6562	884	5678
160	86	6648	1064	5584
162	226	6874	1316	5558
164	532	7406	1598	5808
166	1008	8414	1850	6564
168	1568	9982	2030	7952
170	2032	12014	2130	9884
172	2214	14228	2172	12056
174	2032	16260	2186	14074
176	1568	17828	2202	15626
178	1010	18838	2258	16580

Jahre	Zahl der Gebornen	Zahl aller	Zahl der Gestorbenen	Zahl der Lebenden
180	550	19388	2412	16976
182	314	19702	2734	16968
184	384	20086	3266	16820
186	844	20930	3980	16950
188	1766	22696	4766	17930
190	3108	25804	5480	20324
192	4608	30412	6012	24400
194	5814	36226	6334	29892
196	6278	42504	6490	36014
198	5814	48318	6562	41756
200	4610	52928	6648	46280
202	3128	56056	6874	49182
204	1874	57930	7406	50524
206	1248	59178	8414	50764
208	1542	60720	9982	50738
210	2994	63714	12014	51700
212	5718	69432	14228	55204
214	9482	78914	16260	62654
216	13530	92444	17828	74616
218	16690[1])	109134	18838	90296

1) Euler hat hier 10 Geburten zu wenig gerechnet. Die richtigen Zahlen dieser Zeile sind

218 | 16 700 | 109 144 | 18 838 | 90 306

Dieser Fehler pflanzt sich in den folgenden Zeilen fort, so daß schließlich eine Verminderung von 360 in der Zahl der Lebenden nach 300 Jahren, nämlich 3 993 954 statt 3 994 314, herauskommt. Der Anfang der Tabelle gestattet übrigens eine leichte Probe: in $(300 - 218) - 20 = 62$ Jahren werden aus einem Paar von Zwanzigjährigen 72 Lebende; aus den 10 von Euler zu wenig Gerechneten werden also $5 \cdot 72 = 360$.

Von den letzten 41 Zahlen der zweiten Kolonne sind indessen nur 15 unrichtig, entsprechend den 15 von Null verschiedenen Zahlen derselben Kolonne im Zeitraum $0 - 62$. In der Zahl der Gestorbenen macht sich, den Annahmen zufolge, der Fehler erst von Zeile $218 + 40 = 258$ an bemerkbar. Die richtigen Zahlen der Lebenden siehe Fußnote 2 p. 531. L. G. D.

Jahre	Zahl der Gebornen	Zahl aller	Zahl der Gestorbenen	Zahl der Lebenden
220	17906	127040	19388	107652
222	16702	143742	19702	124040
224	13552	157294	20086	137208
226	9612	166906	20930	145976
228	6250	173156	22696	150460
230	4664	177820	25804	152016
232	5784	183604	30412	153192
234	10254	193858	36226	157632
236	18194	212052	42504	169548
238	28730	240782	48318	192464
240	39702	280484	52928	227556
242	48126	328610	56056	272554
244	51298	379908	57930	321978
246	48160	428068	59178	368890
248	39866	467934	60720	407214
250	29414	497348	63714	433634
252	20526	517874	69432	448442
254	16698	534572	78914	455658
256	20702	555274	92444	462830
258	34232	589506	109134	480372
260	57178	646684	127040	519644
262	86626	733310	143742	589568
264	116558	849868	157294	692574
266	139126	988994	166906	822088
268	147584	1136578	173156	963422
270	139324	1275902	177820	1098082
272	117440	1393342	183604	1209738
274	89806	1483148	193858	1289290
276	66638	1549786	212052	1337734
278	57926	1607712	240782	1366930

Jahre	Zahl der Gebornen	Zahl aller	Zahl der Gestorbenen	Zahl der Lebenden
280	71632	1679344	280484	1398860
282	112112 [1]	1791456	328610	1462846
284	178036	1969429	379908	1589584
286	260362	2229854	428068	1801786
288	342310	2572164	467934	2104230
290	403268	2975432	497348	2478084
292	426034	3401466	517874	2883592
294	404348	3805814	534572	3271242
296	346570	4152384	555274	3597110
298	273884	4426268	589506	3836752
300	214370	4640638	646684	3993954 [2]

1) In der vierten «verbesserten Ausgabe, genau durchgesehen und näher berichtiget von Christian Jacob Baumann, Prediger zu Lebus», Berlin 1775, hat Baumann an dieser Stelle (p. 297) 10000 Geburten zu viel gerechnet. Diese Zeile lautet nämlich dort:

282 | 122 112 | 1 801 456 | 328 610 | 1 472 846

Dieser von Baumann hineinkorrigierte Fehler pflanzt sich in den folgenden Zeilen fort, so daß die letzte fälschlich lautet:

300 | 214 370 | 4 650 638 | 646 684 | 4 003 954. L. G. D.

2) Die richtigen Zahlen der letzten Zeile heißen:

300 | 214 370 | 4 641 038 | 646 724 | 3 994 314

Vergleiche hierzu die Fußnote 1 p. 529. Es seien hier die richtigen Anzahlen der Lebenden angeführt, vom 216. Jahr ab.

Jahre	Zahl der Lebenden	Jahre	Zahl der Lebenden	Jahre	Zahl der Lebenden	Jahre	Zahl der Lebenden
216	74 616	238	192 474	260	519 674	282	1 462 946
218	90 306	240	227 576	262	589 608	284	1 589 684
220	107 662	242	272 584	264	692 634	286	1 801 916
222	124 050	244	322 018	266	822 178	288	2 104 420
224	137 218	246	368 930	268	963 532	290	2 478 344
226	145 986	248	407 254	270	1 098 202	292	2 883 912
228	150 470	250	433 674	272	1 209 858	294	3 271 592
230	152 026	252	448 482	274	1 289 410	296	3 597 470
232	153 202	254	455 698	276	1 337 854	298	3 837 122
234	157 642	256	462 870	278	1 367 050	300	3 994 314
236	169 558	258	480 402	280	1 398 970		

L. G. D.

§ 161.

Man siehet hieraus, dass allezeit nach 24 Jahren die Anzahl der Lebenden ziemlich genau dreymal grösser werde, woraus nach 1000 und mehr Jahren eine erstaunliche Vermehrung erwachsen muss. Denn da die Menge aller Lebenden nach 300 Jahren sich schon beynahe auf 4 Millionen beläuft; so können,wenn man die Triplicirung nur auf 25 Jahre setzt, nach 400 Jahren schon 324 Millionen, und nach 450 Jahren so gar schon an 3000 Millionen Menschen gewesen seyn. Mehr, als jetzt würklich auf dem ganzen Erdboden leben. Da nun die Vermehrung vor der Sündfluth, wo nicht einen noch grössern, doch gewiss nicht einen viel geringeren Fortgang gehabt hat; so muss der Erdboden zur Zeit derselben weit stärker bevölkert gewesen seyn als anjetzo. Es können auch mehrere Nahrung gehabt haben, wenn 1) die Meere damals in engeren Grenzen gestanden und nicht soviel Erdreich bedecket als anjetzo. Sodann auch 2) wenn damals der Erdboden nicht mit so vielem Sande bedeckt gewesen als anjetzo, und 3) wenn er nicht nur überhaupt fruchtbarer gewesen, sondern wenn er wol gar die Fruchtbarkeit der alten Susianischen und Babylonischen Felder gehabt, die nach des STRABO[1]), HERODOTUS[2]) und andrer Bericht 100 ja 200fältige Frucht sollen gegeben haben.

Anmerkung. Ohnerachtet in dieser EULERISCHEN Tabelle große Unordnungen zu herrschen scheinen, so gehören doch die Zahlen der Geburten zu einem Geschlecht von Progressionen, welche man *Series recurrentes* nennet und welche entstehen, wenn ein algebraischer Bruch durch die Division aufgelöset wird. So unordentlich diese Progressionen auch anfänglich scheinen; so werden sie doch endlich, wenn sie stets fortgesetzt werden, in eine geometrische Progression verwandelt, daher denn die im Anfang wahrgenommene Unordnungen je länger je mehr abnehmen, bis sie endlich fast ganz verschwinden.[3])

1) STRABON, griechischer Geograph (um 60 vor Chr. bis etwa 20 nach Chr.), bereiste fast die ganze damals bekannte Welt und hinterließ eine *Geographie* in 17 Büchern. Ausgabe durch J. DE CASAUBON, Genève 1587. Verbesserte Ausgabe durch ALMELOVEN, Amsterdam 1707, neuere Ausgabe von KRAMER, Berlin 1844—52. L. G. D.

2) Der griechische Geschichtsschreiber HERODOT aus Halikarnassos lebte ungefähr von 484 bis 408 vor Chr. Den geographischen und historischen Stoff zu seinem Geschichtswerke hatte er zumeist selbst auf verschiedenen Reisen gesammelt. L. G. D.

3) Vergleiche hierzu das Vorwort zu diesem Bande. Den betreffenden Satz beweist EULER, unter Hinweis auf eine Arbeit DANIEL BERNOULLIS aus dem Jahr 1728, in seiner *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, cap. XVII, *De usu serierum recurrentium in radicibus aequationum indagandis*; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 8, p. 339—361, insbesondere § 338. L. G. D.

ANMERKUNG DES HERAUSGEBERS.

1. Die vorliegende Arbeit ist in dem von Herrn G. ENESTRÖM bearbeiteten *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS* nicht aufgeführt, geschweige denn in andern Verzeichnissen EULERSCHER Werke. Daß sie aber von EULER selbst herrührt, steht fest. Schon in der Vorrede zur *Göttlichen Ordnung*, p. VIII, sagt SÜSSMILCH: „... Es hat zwar mein hochgeschätzter Freund und College, der Herr Professor EULER, würdigster Director der mathematischen Classe bey der Königlichen Academie der Wissenschaften, ausser dem mir bey der Berechnung der Verdoppelung geleisteten Beystande, die Durchlesung der abgedruckten Bogen gütigst übernommen, und es kann mich desselben bezeugte Zufriedenheit und freundschaftliches, jedoch unparteyisches Urtheil, in etwas beruhigen ..." — Ferner kommt im Inhaltsverzeichnisse zum 8. Kapitel EULERS Name dreimal vor und im Register, Seite 591, schreibt SÜSSMILCH: »Professor EULER bestimmt die Stufen der Verdoppelung in einer Tabelle, Theil I, p. 280, 285, 286. Er berechnet die Verdoppelung der ersten Welt, p. 292, 293—297». Der Verfasser der *Göttlichen Ordnung* bestätigt selber an mehreren Stellen ausdrücklich die Mitarbeit EULERS an diesem Kapitel. Im § 152 z. B. schreibt er: « ... Ich habe hiebey meinen hochgeschätzten Freund und academischen Collegen, den Herrn Prof. EULER, um Hülfe angesprochen, dem ich auch hiemit öffentlich für die gehabte Mühe Dank abstatte.» Ferner steht im § 160 zu lesen: « ... so will ich noch eine andre schon vor einigen Jahren von dem Herrn Prof. EULER auf meine Bitte nach der vorgedachten Methode verfertigte Tabelle mittheilen. Sie ist zu schön, als dass ich sie solte können weglassen».

Herr E. J. GUMBEL hat im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 25, 1916, p. 251—264, die in der Anmerkung zu § 161 enthaltene Behauptung, dass die Geburtenzahlen in jener EULERSCHEN Tabelle eine rekurrente Reihe bilden, die sich schliesslich in eine geometrische Progression verwandelt, wenn sie genügend weit fortgesetzt wird, als richtig erwiesen. Siehe hierüber das Vorwort des Herausgebers. Eine wichtige Ergänzung zum SÜSSMILCHISCHEN Kapitel bildet der p. 545 u. f. erstmals veröffentlichte Aufsatz EULERS *Sur la multiplication du genre humain*.

2. Nach Mitteilungen von Herrn G. ENESTRÖM wurde diese EULERSCHE Tabelle zum erstenmal in der zweiten Auflage (1761) des SÜSSMILCHISCHEN Werkes veröffentlicht. Gleichlautend ist sie in der dritten Auflage enthalten. Zu der vierten Auflage (1775) siehe die Fußnote 1 p. 531. Da die Tabelle in der ersten Auflage (1741/42) nicht vor kommt, muß sie nach 1742 und, obigem Zitate gemäß, mehrere Jahre vor 1761 verfaßt worden sein. Unter EULERS Namen ist sie allem Anscheine nach nicht separat veröffentlicht worden; auch das Schicksal der EULERSCHEN Handschrift ist durchaus unbekannt. In

den andern Werken SÜSSMILCHS und in dessen gleichzeitigen Lebensbeschreibungen finden sich keine Angaben über diese Arbeit. (Siehe z. B. P. SCHMIDT, Art. „Süssmilch“, im *Handwörterbuch der Staatswissenschaften.* 3. Auflage, Bd. 7, Jena 1911, p. 1053.)

Dagegen hat sich in den von der Petersburger Akademie der Eulerkommission zur Verfügung gestellten und nach Zürich geschickten *Notizbüchern* ein von EULER eigenhändig geschriebener Aufsatz vorgefunden, worin die Theorie solcher statistischer Reihen entwickelt wird.[1]) Die Eintragungen in das Notizbuch H 6 fallen nach Herrn G. ENESTRÖM in die Jahre 1750—1755. Es dürfte also die EULERSCHE Tabelle in SÜSSMILCHS *Göttlicher Ordnung* um 1755 verfaßt worden sein, und somit ist der erste Versuch, statistische Reihen mathematisch durch eine erzeugende Funktion darzustellen, auf EULER zurückzuführen.

3. Es handelt sich aber nicht nur um jene Tabelle, «die zu schön ist, als dass man sie solte können weglassen». Eine genauere Untersuchung hat ergeben, daß jedenfalls noch zwei weitere Tabellen mit zugehörigem Text von EULER herrühren. Aus dem Satze SÜSSMILCHS: „Die Zeiten der Verdoppelung werden nach einer vom Herrn Professor EULER *angegebenen Methode* und verfertigten Tabelle bestimmet ...“ geht ferner deutlich genug hervor, dass auch die Methoden von EULER herrühren; man ersieht, durch Vergleich mit der Abhandlung 334 dieses Bandes, daß EULER überhaupt den ganzen Inhalt des 8. Kapitels inspiriert hat. In dieser Überzeugung wird man noch bestärkt durch die Tatsache, daß sich EULER gerade zu jener Zeit mit der *Rettung der göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürfe der Freygeister*, die 1747 erschien, und mit dem apologetischen Werke E. PONTOPPIDANS[2]), 1755, beschäftigt hatte (siehe im ENESTRÖMSCHEN *Verzeichnis* die Nummern 92 und 218, und das Vorwort zum vorliegenden Bande). Aus diesen Gründen sind außer den numerischen Tabellen, deren Autorschaft aktenmäßig festgestellt ist, noch die ersten fünfzehn Paragraphen aus dem achten Kapitel des SÜSSMILCHISCHEN Buches von der *Göttlichen Ordnung* hier abgedruckt worden.

Der oben zitierte Satz aus dem Vorworte SÜSSMILCHS, der sich nicht ausschließlich auf das achte Kapitel bezieht, läßt sogar auf die Mitwirkung EULERS an der berühmten SÜSSMILCH-BAUMANNSCHEN Mortalitätstafel schließen, die über ein Jahrhundert lang in Deutschland praktische Anwendung fand und erst durch die Resultate der Sterblichkeitsmessungen des 19. Jahrhunderts verdrängt wurde.

---

1) Siehe p. 545—552 des vorliegenden Bandes.

2) ERICK PONTOPPIDAN, der jüngere (1698—1764), Bischof von Bergen, Verfasser mehrerer Geschichtswerke und theologischer Schriften. Hier handelt es sich um seine *Essays sur la nouveauté du monde.* Copenhague 1755.

FRAGMENTA
EX ADVERSARIIS MATHEMATICIS DEPROMPTA[1]

Ex manuscriptis academiae scientiarum Petropolitanae nunc primum edita

DE QUADRATIS MAGICIS[2]

Quadratum magicum est quadratum in cellulas quadratas divisum, quibus inscripti sunt numeri, ita ut eorum summa quaquaversus est eadem:

r	i	l	n	p	t
a	A	B	C	D	b
c	E	F	G	H	d
e	I	K	L	M	f
g	N	O	P	Q	h
u	k	m	o	q	s

1) In praefatione a NICOLAO FUSS minore *Operibus postumis* praemissa legitur p. IV—V: „Praeter scripta postuma ab EULERO ipso elaborata et maximam partem ipsius manu exarata exstant volumina tria, quibus titulus est: *Adversaria mathematica.* His adversariis administri et discipuli EULERI inferre solebant theses quasdam et sententias breves, quas quidem a magistro acceptas ipsi fusius et accuratius explicaverant. Ex his thesibus selectae sunt graviores, quae *Operibus postumis* suo loco insererentur, et primum quidem nonaginta dignae visae sunt, quae typis describerentur. Deinde clarissimus TSCHEBYSCHEFF, perlustratis iterum dictis voluminibus, invenit alias sex theses, quas addendas esse censuit; has tomus prior exhibet sub Numero XXIII, p. 487—493. In hunc

2) Vide Commentationes 530 et 795 huius voluminis. L. G. D.

Scilicet ut summa numerorum in lamella *ab* contentorum sit aequalis summae numerorum in quavis alia lamella *no* contentorum, interdum quoque summae numerorum in diagonali *rs* vel *tu* contentorum.

Si hac postrema conditione gaudeat, vocatur *perfectum*, sin vero minus, *imperfectum*.

THEOREMA

Si singuli numeri per datam quantitatem multiplicentur aut si data quantitate augeantur, nihilominus eandem in quadrato magico habebunt proprietatem ac antea.

COROLLARIUM

Si ergo ostendatur modus numeros in hac naturali serie

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9 \quad \text{etc.}$$

in quadratum magicum disponendi, poterunt quoque quaevis series arithmeticae ita disponi.

PROBLEMA

Distribuere hos novem numeros, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *in quadratum magicum.*

SOLUTIO

Quia summa horum numerorum $= 45$, erit summa numerorum in una lamella positorum $= 15$. Distribuantur hi novem numeri in tres numerorum

praeterea ex adversariis illatae sunt theses geometricae octo, theses analytici argumenti quatuor et duae ad calculum integralem spectantes; ita ut omnino tomo priori 110 theses ex adversariis depromptae contineantur."

Praeter haec tria volumina in manuscriptis academiae Petropolitanae inveniuntur insuper novem alia, quae a G. Eneström *Notizbücher* appellata et signis H 1, H 2, ... H 9 denotata sunt. Vide G. Eneström, *Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie,* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 22, 1913, Zweite Abt., p. 191—205, imprimis p. 193—194 et 197—198. L. G. D.

ordines, quorum quilibet faciat 15; quod his duobus modis fieri potest:

$$\begin{array}{ccc} 9 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 9 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \end{array}$$

Hae series in latitudinem iam constituunt unaquaeque 15; ut idem faciant in longitudinem, componantur hae duae in unam, ut una transversum sit posita

$$\begin{array}{ccc} 9 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{array}$$

Hoc iam est quadratum imperfectum; quaerendum est, quomodo hae lamellae sint disponendae, ut perfectum evadat. Quaerantur ergo tres numeri ex diversis lamellis, quorum summa faciat 15.

Quos video esse 2, 8, 5 et 5, 4, 6; oportet ergo, ut ita ordinentur:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{array}$$

Q. E. I.

PROBLEMA

Invenire seriem 9 numerorum arithmeticam, cuius differentia sit $= a$ et quae in quadratum magicum reducta producat numerum b.

SOLUTIO

Series nostra naturalis ducatur in x et cuivis termino addatur y; erit primus terminus $x + y$, secundus $2x + y$, differentia ergo $x = a$. Haec series in quadratum magicum disposita producit

$$15a + 3y = b,$$

ergo

$$y = \frac{b}{3} - 5a.$$

Seriei ergo huius 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. singuli termini ducantur in a et cuique addatur $\frac{b}{3} - 5a$. Erit inventa series quaesita.

EXEMPLUM

Sit $a = 4$ et numerus seu summa in quadrato magico constans $b = 36$. Hanc habebimus seriem

$$-4, \ 0, \ 4, \ 8 \ \text{etc.}$$

et hoc habebitur quadratum magicum

$$\begin{array}{ccc} 8 & 28 & 0 \\ 4 & 12 & 20 \\ 24 & -4 & 16 \end{array}$$

PROBLEMA

Invenire seriem 9 numerorum arithmeticam, cuius primus numerus $= a$ et summa in quadrato magico constans $= b$.

SOLUTIO

Seriei nostrae singuli termini ducantur in x iisque addatur y. Erit terminus primus $= x + y = a$ et summa in quadrato magico $= 15x + 3y = b$, ergo

$$3y = b - 15x = 3a - 3x,$$

ergo

$$x = \frac{b}{12} - \frac{a}{4} \quad \text{et} \quad y = \frac{5a}{4} - \frac{b}{12}.$$

Singuli nempe termini seriei huius

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7 \ \text{etc.}$$

ducantur in $\frac{b}{12} - \frac{a}{4}$ iisque addatur $\frac{5a}{4} - \frac{b}{12}$; habebitur series quaesita.

EXEMPLUM

Sit $a = 8$ et $b = 84$. Erit series quaesita

$$8, \quad 13, \quad 18, \quad 23, \quad 28 \quad \text{etc.},$$

differentia $= 5$; et quadratum magicum erit

$$\begin{array}{ccc} 23 & 48 & 13 \\ 18 & 28 & 38 \\ 43 & 8 & 33 \end{array}$$

Adversaria mathematica H 1, p. 027—030.

PROBLEMA DE SORTE IN LUDIS[1])

A habet a nummos, B vero b nummos. Iacitur tesseris, et quoties iactus obtingit, cuius probabilitas existendi est $\frac{1}{m}$, *tum B ipsi A tradit nummum; quoties vero iactus evenit alius, cuius existendi probabilitas est* $\frac{1}{n}$, *tum A ipsi B nummum praebet. Hac conditione tamdiu certant, donec omnes nummi ad alterutrum concedant, qui deinde depositum* 1 *lucratur. Quaeritur ante certamen institutum utriusque expectatio.*

RESPONSUM

Expectatio ipsius A erit

$$= \frac{n^b(m^a - n^a)}{m^{a+b} - n^{a+b}}.$$

Expectatio ipsius B erit

$$= \frac{m^a(m^b - n^b)}{m^{a+b} - n^{a+b}}.$$

Erit ergo

sors ipsius A: sortem ipsius B uti $n^b(m^a - n^a) : m^a(m^b - n^b)$.

1) Vide Commentationes 201, 313 et 811 huius voluminis. L. G. D.

SOLUTIO

In statu ipsius A est expectatio ad nummum accipiendum ad expectationem ad nummum perdendum uti n ad m. Durante hoc certamine sit

dum A habet nummos	eius expectatio
0	0
1	$\alpha = \dfrac{n\beta + m0}{m+n}$
2	$\beta = \dfrac{n\gamma + m\alpha}{m+n}$
3	$\gamma = \dfrac{n\delta + m\beta}{m+n}$
4	$\delta = \dfrac{n\varepsilon + m\gamma}{m+n}$
5	ε
.	.
.	.
.	.
$a+b$	1

In hac serie sint tres termini continui X, Y, Z. Erit

$$nZ = (m+n)Y - mX$$

eritque adeo series recurrens; ad quam inveniendam ponatur[1])

$$nzz = (m+n)z - m,$$

cuius radices sunt

$$z = 1 \quad \text{et} \quad z = \frac{m}{n};$$

erit ergo terminus indici generali x respondens

$$= A + B\left(\frac{m}{n}\right)^x.$$

Ponatur $x = 0$; erit

$$A + B = 0.$$

Ponatur $x = a + b$; erit

$$A + B\left(\frac{m}{n}\right)^{a+b} = 1$$

---

1) Vide *Euleri Introductionem in analysin infinitorum*, cap. XIII; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 8, p. 229. L. G. D.

hincque

$$A = \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{n}\right)^{a+b}} = \frac{-n^{a+b}}{m^{a+b} - n^{a+b}}$$

et

$$B = \frac{n^{a+b}}{m^{a+b} - n^{a+b}}.$$

Quare dum A habet x nummos, erit eius sors

$$= \frac{n^{a+b}}{m^{a+b} - n^{a+b}} \left(\frac{m^x - n^x}{n^x}\right),$$

seu sors ipsius A erit

$$= \frac{n^{a+b-x}(m^x - n^x)}{m^{a+b} - n^{a+b}}.$$

Quare initio, dum A habet a nummos, erit eius expectatio

$$= \frac{n^b(m^a - n^a)}{m^{a+b} - n^{a+b}}.$$

Expectatio vero ipsius B erit

$$= 1 - \frac{n^b(m^a - n^a)}{m^{a+b} - n^{a+b}} = \frac{m^{a+b} - m^a n^b}{m^{a+b} - n^{a+b}}.$$

Q. E. I.

EXEMPLUM

Iactus duabus tesseris favorabilis ipsi A IX, 4 modis,

" " " " " B VII, 6 modis,

ergo $m : n = 3 : 2$. Sit $b = 2$, erit

$$\text{sors } A : \text{sortem } B = 2^2(3^a - 2^a) : 3^a(3^2 - 2^2) = (4 \cdot 3^a - 4 \cdot 2^a) : 5 \cdot 3^a.$$

Si $b = 2$ et $a = \infty$, erit

$$\text{sors } A : \text{sortem } B = 4 : 5.$$

Ergo, etiamsi A sumat innumeros nummos, tamen sors ipsius B erit melius.

SCHOLION

Ut expectationes amborum sint aequales, fieri debet

$$m^a n^b - n^{a+b} = m^{a+b} - m^a n^b$$

seu

$$2 m^a n^b = m^{a+b} + n^{a+b};$$

et si detur ratio $m:n$, erit

$$a = \frac{bln - l(2n^b - m^b)}{lm - ln}.$$

Sit $m = 9$, $n = 5$, $b = 12$; erit

$$a = \frac{12\,l5 - l(2\cdot 5^{12} - 9^{12})}{l9 - l5}.$$

Intelligitur ergo, ut sortium aequalitas adesse possit, necesse esse, ut sit

$$2n^b > m^b \quad \text{seu} \quad 2\left(\frac{n}{m}\right)^b > 1,$$

hoc est

$$l2 - bl\frac{m}{n} > 0$$

ideoque

$$b < \frac{l2}{lm - ln}.$$

Adversaria mathematica H 4, 1740—1750? p. 186—187.

PROBLEMA DE PERMUTATIONIBUS[1]

Sint numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... n *singuli loculis suis*

$$\boxed{1}, \quad \boxed{2} \quad \text{etc.}$$

inclusi eorumque ordo omnibus modis permutetur; definire casus, quibus vel nullus vel unus vel duo vel tres etc. tantum loculis suis sint inclusi.

---

1) Vide Commentationem 738 huius voluminis. L. G. D.

SOLUTIO

Est numerus omnium variationum $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$.

I. Ut omnes loculis suis contineantur, casuum numerus est $= 1$.

II. Ut $n - 1$ tantum in loculis suis insint, casus est nullus, $= 0$.

III. Reperiantur $n - 2$ tantum in suis loculis, 2 ergo in alienis, quod unico modo fieri potest, hi autem bini $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ modis sumi possunt; unde numerus casuum est

$$= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1.$$

IV. Reperiantur tantum $n - 3$ in suis loculis, 3 ergo in alienis, quod ponamus a modis fieri posse, unde, quia terni $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ modis existere possunt, erit numerus casuum

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a.$$

V. Reperiantur $n - 4$ in loculis suis et 4 in peregrinis, quod ponamus b modis fieri posse; erit numerus casuum

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b.$$

VI. Reperiantur $n - 5$ in loculis suis et 5 in peregrinis, quod ponamus c modis fieri posse; eritque numerus casuum

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c.$$

Quaeri ergo oportet numeros a, b, c etc.

Sint tres numeri 1, 2, 3 et tria locula $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$. Quot modis fieri potest, ut nullus in loculo suo reperiatur? Sit 2 in loculo $\boxed{1}$; et 1, 3 loculis $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ relinquuntur, quod unico modo fieri potest; unde, cum etiam 3 in $\boxed{1}$ inesse possit, habemus

$$a = 2.$$

Sint 4 numeri 1, 2, 3, 4 et locula $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$. Sit in primo 2; et reliqua, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, continebunt numeros 1, 3, 4. Si continere deberent numeros 2, 3, 4, id fieret a modis et excluderentur casus, quo 1 esset in loco $\boxed{2}$, qui autem non excludi debet. Sit ergo 1 in $\boxed{2}$, et accedet adhuc unus casus, ita

ut habeamus $a+1$, dum sit 2 in primo loculo. Totidem erunt, si 3 vel 4 sit in primo; unde habemus

$$b = 3(a+1).$$

Sint 5 numeri 1, 2, 3, 4, 5 et 5 loca I, II, III, IV, V. Sit 2 in I et numeri 1, 3, 4, 5 in loca II, III, IV, V distribuendi. Ponamus 2 in loco I hocque fieri posset b modis; sed quia 1 etiam in II esse potest, sit ibi, et accedant a casus, ita ut habeamus $b+a$. Totidemque, si in loco primo sit vel 3 vel 4 vel 5. Unde casuum numerus erit

$$c = 4(b+a).$$

Simili modo reperitur esse

$$d = 5(c+b), \quad e = 6(d+c), \quad f = 7(e+d) \quad \text{etc.}$$

Ergo [1])

1,	a,	b,	c,	d,	e,	f	etc.
1,	2,	9,	44,	265,	1854,	14833	etc.

Habebimus ergo

numerus sitorum in suis loculis	numerus casuum
n	1
$n-1$	$n(1-1)$
$n-2$	$n(n-1)\left(1-1+\frac{1}{2}\right)$
$n-3$	$n(n-1)(n-2)\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$
$n-4$	$n(n-1)(n-2)(n-3)\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)$
$n-5$	$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)$
etc.	etc.

1) Vide tabulam p. 438 huius voluminis. L. G. D.

$$\text{Summa omnium casuum} = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

Applicatio ad casus

$n =$

	1	2	3	4	5	6	7
n	1	1	1	1	1	1	1
$n-1$	0	0	0	0	0	0	0
$n-2$		1	3	6	10	15	21
$n-3$			2	8	20	40	70
$n-4$				9	45	135	315
$n-5$					44	264	924
$n-6$						265	1855
$n-7$							1854

Adversaria mathematica H 6, 1750—1755, p. 287—288.

SUR LA MULTIPLICATION DU GENRE HUMAIN[1]

I.

1. *Hypothese.* Que tous les hommes atteignent la $50^{\text{ième}}$ année, qu'ils se marient tous à l'age de 20 ans et que chaque mariage fournisse 6 enfans, savoir deux à l'age de 22 ans, deux à l'age de 24 et deux à l'age de 26. Trouver la multiplication, soit le nombre de tous les vivans à chaque age.

1) Il arrive assez fréquemment chez EULER, comme c'est le cas dans ce fragment, que la fin d'un brouillon soit en latin, alors que le commencement en est rédigé en une autre langue.

Le présent fragment se rapporte plus particulièrement au chapitre VIII du livre de SÜSSMILCH, réimprimé dans ce volume p. 507—532. EULER donne ici la théorie mathématique des calculs qu'il fit pour SÜSSMILCH et indique de quelle façon il s'y est pris pour dresser la grande table p. 526—531. Voir aussi la préface de l'éditeur. L. G. D.

SOLUTION

Le nombre des vivans

à l'age	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
à présent	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q
2 ans après	$m+n+o$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p

à l'age	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
à présent	r	s	t	u	v	w	x	y	z	$\mathfrak{h}$
2 ans après	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Donc, le nombre des naissances pendant ces deux ans étant $= m + n + o$ et le nombre des morts $= \mathfrak{h}$, l'accroissement est

$$= m + n + o - \mathfrak{h}.$$

2. Soit S le nombre de tous les vivans à présent et λS celui après deux ans, et on aura

$$(\lambda - 1) S = m + n + o - \mathfrak{h}.$$

Or, les nombres des vivans à chaque age demeurant proportionnels, on aura

$$a = \lambda b, \quad b = \lambda c, \quad c = \lambda d \quad \text{etc.}$$

ou

$$z = \lambda \mathfrak{h}, \quad y = \lambda^2 \mathfrak{h}, \quad x = \lambda^3 \mathfrak{h}, \quad w = \lambda^4 \mathfrak{h}, \quad v = \lambda^5 \mathfrak{h},$$

$$u = \lambda^6 \mathfrak{h}, \quad t = \lambda^7 \mathfrak{h}, \quad s = \lambda^8 \mathfrak{h}, \quad r = \lambda^9 \mathfrak{h}, \quad q = \lambda^{10} \mathfrak{h},$$

$$p = \lambda^{11} \mathfrak{h}, \quad o = \lambda^{12} \mathfrak{h}, \quad n = \lambda^{13} \mathfrak{h}, \quad m = \lambda^{14} \mathfrak{h}, \quad l = \lambda^{15} \mathfrak{h},$$

$$k = \lambda^{16} \mathfrak{h}, \quad i = \lambda^{17} \mathfrak{h}, \quad h = \lambda^{18} \mathfrak{h}, \quad g = \lambda^{19} \mathfrak{h}, \quad f = \lambda^{20} \mathfrak{h},$$

$$e = \lambda^{21} \mathfrak{h}, \quad d = \lambda^{22} \mathfrak{h}, \quad c = \lambda^{23} \mathfrak{h}, \quad b = \lambda^{24} \mathfrak{h}, \quad a = \lambda^{25} \mathfrak{h}.$$

Donc

$$m + n + o = \lambda^{12} \mathfrak{h} (1 + \lambda + \lambda^2) = \lambda a = \lambda^{26} \mathfrak{h};$$

et partant

$$1 + \lambda + \lambda^2 = \lambda^{14},$$

$$S = \frac{\lambda^{26} - 1}{\lambda - 1} \mathfrak{h}.$$

3. Pour résoudre l'équation

$$1 + \lambda + \lambda^2 = \lambda^{14},$$

soit

$$\lambda = 1 + \omega,$$

donc

$$3 + 3\omega + \omega\omega = 1 + 14\omega + 91\omega\omega$$

et, à peu près,

$$\omega = \frac{2}{11} \quad \text{ou} \quad \lambda = 1{,}1818.$$

Plus exactement:

$$\begin{array}{r|l}
\lambda = 1{,}10 & l\lambda = 0{,}0413927 \\
\lambda^2 = 1{,}21 & l\lambda^2 = 0{,}0827854 \\
\hline
1 + \lambda + \lambda^2 = 3{,}31 & l\lambda^{14} = 0{,}5794978 \\
\lambda^{14} = 3{,}80 & \\
\hline
-0{,}49 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l||r|l}
\lambda = 1{,}09 & l\lambda = 0{,}0374265 & \lambda = 1{,}08 & l\lambda = 0{,}0334238 \\
\lambda^2 = 1{,}1881 & l\lambda^2 = 0{,}0748530 & \lambda^2 = 1{,}1664 & l\lambda^2 = 0{,}0668476 \\
\hline
1 + \lambda + \lambda^2 = 3{,}2781 & l\lambda^{14} = 0{,}5239710 & 1 + \lambda + \lambda^2 = 3{,}2464 & l\lambda^{14} = 0{,}4679332 \\
\lambda^{14} = 3{,}3417 & & \lambda^{14} = 2{,}9372 & \\
\hline
-0{,}0636 & & 0{,}3092 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l||r}
1{,}10 & -0{,}49 & \lambda = 1{,}0883 \\
1{,}09 & -0{,}0636 & l\lambda = 0{,}0367486 \\
1{,}08 & +0{,}3092 & l\lambda^{26} = 0{,}9554636 \\
 & & \lambda^{26} - 1 = 8{,}0253 \\
 & & l\sqrt{\lambda} = 0{,}0183743 \\
 & & \sqrt{\lambda} - 1 = 0{,}0432
\end{array}$$

4. Pour trouver en combien d'années le nombre sera doublé, que cela arrive après 2ν ans, et

$$\lambda^\nu = 2, \quad \text{donc} \quad \nu = \frac{0{,}3010300}{0{,}0367486}$$

et

$$2\nu = \frac{3010300}{183743} = 16{,}38.$$

Donc $\mathfrak{h}$ étant le nombre de ceux qui meurent en deux ans, le nombre des vivans est [§ 2]

$$S = \frac{\lambda^{26}-1}{\lambda-1}\mathfrak{h} = \frac{8{,}0253}{0{,}0883}\mathfrak{h} = 91\,\mathfrak{h}.$$

Or, ils meurent

en 2 ans $1\,\mathfrak{h}$, en 4 ans $(\lambda+1)\mathfrak{h}$, en 6 ans $(1+\lambda+\lambda^2)\mathfrak{h}$ etc.

ou

$$\frac{\lambda-1}{\lambda-1}\mathfrak{h}, \qquad \frac{\lambda^2-1}{\lambda-1}\mathfrak{h}, \qquad \frac{\lambda^3-1}{\lambda-1}\mathfrak{h} \qquad \text{etc.},$$

donc en un an

$$\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\lambda-1}\mathfrak{h} = \frac{0{,}04322}{0{,}0883}\mathfrak{h} = \text{♃},$$

$$\mathfrak{h} = \frac{883}{432}\text{♃}, \quad S = 185\,\text{♃}.$$

II.

5. Supposons qu'un couple soit mis dans un pays à l'age de 20 ans; qu'ils en naissent 2 à l'age de 22 ans, 2 à l'age de 24 et ainsi de suite jusqu'à la 30ieme année, de sorte que ce mariage fournisse en tout 10 enfans; qu' ensuite ces enfans se marient à l'age de 20 ans et qu'ils se multiplient dans la même raison; et que tous les hommes meurent à l'age de 50 ans. Trouver leur nombre après chaque nombre d'années.

SOLUTION

[On construit facilement la table suivante dont la colonne intitulée *Somme* contient la réponse à la question posée.]

Après ans	*L'age* 0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
0	0										2				
2	2											2			
4	2	2											2		
6	2	2	2											2	
8	2	2	2	2											2
10	2	2	2	2	2										
12	0	2	2	2	2	2									
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
22	0						2	2	2	2	2				
24	2							2	2	2	2	2			
26	4	2							2	2	2	2	2		
28	6	4	2							2	2	2	2	2	
30	8	6	4	2							2	2	2	2	2
32	10	8	6	4	2							2	2	2	2
34	8	10	8	6	4	2							2	2	2
36	6	8	10	8	6	4	2							2	2
38	4	6	8	10	8	6	4	2							2
40	2	4	6	8	10	8	6	4	2						
42		2	4	6	8	10	8	6	4	2					
44			2	4	6	8	10	8	6	4	2				
46	2			2	4	6	8	10	8	6	4	2			
48	6	2			2	4	6	8	10	8	6	4	2		
50	12	6	2			2	4	6	8	10	8	6	4	2	
52	20	12	6	2			2	4	6	8	10	8	6	4	2
54	30	20	12	6	2			2	4	6	8	10	8	6	4
56	36	30	20	12	6	2			2	4	6	8	10	8	6
58	38	36	30	20	12	6	2			2	4	6	8	10	8
60	36	38	36	30	20	12	6	2			2	4	6	8	10
62	30	36	38	36	30	20	12	6	2			2	4	6	8
64	20	30	36	38	36	30	20	12	6	2			2	4	6
66	12	20	30	36	38	36	30	20	12	6	2			2	4
68	8	12	20	30	36	38	36	30	20	12	6	2			2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			⋮

Après ans	*L'age*											*Somme*	*Morts*
	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50		
0												2	
2												4	
4												6	
6												8	
8												10	
10	2											12	
12		2										12	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
22							2					12	
24								2				14	
26									2			18	
28										2		24	
30											2	32	
32	2											40	2
34	2	2										48	
36	2	2	2									54	
38	2	2	2	2								58	
40	2	2	2	2	2							60	
42		2	2	2	2	2						60	
44			2	2	2	2	2					60	
46				2	2	2	2	2				62	
48					2	2	2	2	2			68	
50						2	2	2	2	2		80	
52							2	2	2	2	2	100	
54	2							2	2	2	2	128	2
56	4	2							2	2	2	162	2
58	6	4	2							2	2	198	2
60	8	6	4	2							2	232	2
62	10	8	6	4	2							260	2
64	8	10	8	6	4	2						280	
66	6	8	10	8	6	4	2					292	
68	4	6	8	10	8	6	4	2				300	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				⋮	

6. Series igitur nascentium est haec:

post annos	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,
	0,	2,	2,	2,	2,	2,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	2,	4,	6,	8,	10,

post annos	17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30,	31, . . . n
	8,	6,	4,	2,	0,	0,	2,	6,	12,	20,	30,	36,	38,	36,	30, . . . N

$$N = (n-11) + (n-12) + (n-13) + (n-14) + (n-15).$$ [1]

Ergo Nx^n est terminus in seriei nata ex hac formula [2]:

$$\frac{0 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5}{1 - x^{11} - x^{12} - x^{13} - x^{14} - x^{15}},$$

quae reducitur ad hanc

$$\frac{2x - 2x^6}{1 - x - x^{11} + x^{16}}.$$

Ergo

$$(n) = (n-1) + (n-11) - (n-16).$$

Exempli gratia

$$(25) = (24) + (14) - (9), \quad (33) = (32) + (22) - (17).$$

Haec expressio est summa seriei in infinitum continuatae.

7. Si suprema series in infinitum continuetur, confundetur cum progressione geometrica, cuius exponens est z, ut sit

$$z^{15} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

seu

$$z^{16} - z^{15} - z^5 + 1 = 0,$$

unde z parvum superat unitatem.

1) Dum EULERUS alio loco charactere (x) usus est denotante numerum hominum x annorum (vide Commentationem 335 huius voluminis atque notam p. 155 adiectam), hic eodem charactere (x) significat numerum descendentium unius paris coniugum viginti annorum post x annos.
L. G. D.

2) Vide *Introductionem in analysin infinitorum*, cap. XIII et XVII; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 8, p. 229 et 339. L. G. D.

Sit $z = 1{,}12$	$z = 1{,}14$	$z = 1{,}131$	$z = 1{,}133$
$lz = 0{,}0492180$	$0{,}0569049$	$0{,}0534626$	$0{,}0542299$
$lz^5 = 0{,}2460900$	$0{,}2845245$	$0{,}2673130$	$0{,}2711495$
$lz^{15} = 0{,}7382700$	$0{,}8535735$	$0{,}8019390$	$0{,}8134485$
$lz^{16} = 0{,}7874880$	$0{,}9104784$	$0{,}8554016$	$0{,}8676784$
$z^{16} + 1 = 7{,}13039$	$9{,}13726$	$8{,}16806$	$8{,}37358$
$z^{15} = 5{,}47376$	$7{,}13795$	$6{,}33781$ [1]	$6{,}50802$
$z^5 = 1{,}76234$	$1{,}92542$	$1{,}85060$	$1{,}86702$
$z^{15} + z^5 = 7{,}23590$	$9{,}06337$	$8{,}18841$	$8{,}37504$
Err. $= -0{,}10551$	$+0{,}07389$	$-0{,}02035$	$-0{,}00146$

0,07389		0,00146	
17940 : 21102	11	1889 : 4070	215
17940		3778	
31620		2920	
		1889	
		10310	

Ergo

$$z = 1{,}13315.$$ [2]

Adversaria mathematica H 6, 1750—1755, p. 328—331.

1) Manuscriptum: 6,33785. Itaque etiam sequentes valores corrigendi erant. L. G. D.

2) Series igitur nascentium (§ 6) si vehementer ulterius continuetur, in finem cum progressione geometrica rationem constantem 1,13315 tenente confundetur. L. G. D.

SUR LE CALCUL DES RENTES TONTINIERES[1])

FRAGMENT

Publié ici pour la première fois, d'après un manuscrit d'EULER en possession de Monsieur DAVID EUGÈNE SMITH à New-York[2])

1. Dans les autres établissemens de Tontines[3]), l'entrepreneur n'en attend le profit qu'après l'extinction entiere de la Tontine; mais dans notre cas, le but principal est de retirer d'abord, sur la somme de toutes les mises, la somme de 108 000 écus pour payer les dettes de la ville et partant, il faut tout à fait renoncer au profit qu'on pourroit espérer à l'extinction entiere.

Afin que ce rabat de 108000 écus ne cause une trop grande diminution dans le fond qui doit fournir les rentes dans la suite, cette somme ne sauroit être au dessus de la cinquieme partie de la mise entiere; et puisque les fraix demandent aussi une somme considérable, on ne sauroit fixer le capital entier au dessous de 600 000 écus.

---

1) C'est l'éditeur qui a mis ce titre, le manuscrit d'EULER ne portant pas un titre d'ensemble. Voir la note 2 ci-dessous. — EULER traite aussi des mathématiques d'assurance dans les mémoires 335, 403, 473 et 599 de ce volume; voir la note 3 p. 101 et la préface de l'éditeur. L. G. D.

2) Ce manuscrit, écrit de la main même d'EULER, est un brouillon à feuilles non numérotées et dont une grande partie n'a pas reçu d'EULER une rédaction définitive. Quelques-uns des feuillets ont été tournés de plusieurs côtés, de sorte que chiffres et formules s'entrecroisent parfois dans divers sens. Nous avons cependant pu utiliser presque tout et n'avons laissé de côté que des calculs numériques sans importance et quelques formules dont on ne voit aucun lien avec le reste et qui, peut-être même, se rapportent à un autre mémoire. Nous avons donc nous-même scindé le texte en paragraphes et l'avons disposé dans l'ordre qu'EULER semble avoir voulu suivre. L. G. D.

3) Il manque sans doute le commencement du mémoire, ce qui explique ce début *in medias res*. L. G. D.

2. Je supposerai donc le capital entier de la tontine à 600 000 écus, afin qu'on en puisse d'abord retrancher la cinquieme partie, 120 000 écus, pour les besoins de la ville et les fraix de la régie; et le reste de 480 000 écus doit être placé en fond à 5 pour cent. Or, outre les intérêts, je diminue le capital tous les ans d'une certaine partie, en sorte que, quand les rentiers de chaque classe atteigneroient l'âge de 100 ans, le fond en seroit épuisé.

C'est sur ce principe que j'ai calculé la table suivante, qui marque combien pour cent on payera à chaque rentier, tant à l'égard de son âge que du temps écoulé depuis l'établissement de la tontine, lorsque les vivants profitent de la mort de leurs camarades. De cette maniere, chacun sait d'avance combien il tirera pendant tout le cours de sa vie; ce qui attirera beaucoup mieux la confiance du public que lorsqu'il faut se remettre à la décision des directeurs par rapport au nombre de ceux qui seront enlevés par la mort.

CALCUL DES RENTES DE LA TONTINE

pour les rentiers de l'âge de m ans, dont le nombre[1]) *est supposé* $=(m)$.

3. La mise de chacun étant 100 écus, la mise entiere est $100(m)$ écus, dont on retranche d'abord la cinquieme partie, $20(m)$, pour les besoins de la ville; le capital restant,

$$80(m)=C,$$

placé à 5 pour cent, doit fournir les rentes en sorte qu'après $100-m=n$ ans, il soit éteint entierement.

Donc, si l'on en vouloit y employer tous les ans une partie égale, elle seroit $=\frac{C}{n}$; mais pour rendre les premieres rentes plus considérables aux dépens des dernieres, je fais diminuer ces parties qu'on retranche successivement du capital selon une progression arithmétique qui soit

$$x,\ x-z,\ x-2z,\ x-3z,\ \ldots$$

et partant la derniere

$$x-(n-1)z,$$

qui doit éteindre le capital. La somme de cette progression,

$$=nx-\frac{n(n-1)}{2}z,$$

1) Pour la signification des symboles (m) voir les notes 1 p. 103 et p. 155. L. G. D.

doit donc être égalée au capital C; d'où je tire

$$(n-1)z = 2x - \frac{2C}{n},$$

de sorte que la derniere partie, $x-(n-1)z$, est $=\frac{2C}{n}-x$.

Je la rens trois fois plus petite[1]) que la premiere, x, ou bien

$$\frac{2C}{n} - x = \frac{x}{3},$$

d'où je tire

$$x = \frac{3C}{2n} \quad \text{et} \quad z = \frac{C}{n(n-1)}.$$

4. Cela posé, la somme à distribuer tous les ans parmi les rentiers se trouvera par les operations suivantes.

Après ans	On retranche du capital	Le capital sera donc	Les intérêts	Donc, la somme à distribuer aux rentiers
1	x	$C-x$	$\frac{1}{20}C$	$\frac{1}{20}(C+20x)$
2	$x-z$	$C-2x+z$	$\frac{1}{20}(C-x)$	$\frac{1}{20}(C+19x-20z)$
3	$x-2z$	$C-3x+3z$	$\frac{1}{20}(C-2x+z)$	$\frac{1}{20}(C+18x-39z)$
4	$x-3z$	$C-4x+6z$	$\frac{1}{20}(C-3x+3z)$	$\frac{1}{20}(C+17x-57z)$
5	$x-4z$	$C-5x+10z$	$\frac{1}{20}(C-4x+6z)$	$\frac{1}{20}(C+16x-74z)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ	$x-(\lambda-1)z$	$C-\lambda x$ $+\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)z$	$\frac{1}{20}\left\{\begin{matrix} C-(\lambda-1)x \\ +\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)z \end{matrix}\right\}$	$\frac{1}{20}\left\{\begin{matrix} C+(21-\lambda)x \\ -\frac{(\lambda-1)(42-\lambda)}{2}z \end{matrix}\right\}$

1) A cet endroit, le manuscrit porte aussi la note suivante: *Deux fois plus petite*

$$\frac{2C}{n} - x = \frac{1}{2}x, \quad x = \frac{4C}{3n}, \quad (n-1)z = \frac{2C}{3n}.$$

Voir la note 1 p. 556, la note 1 p. 558 et le § 8 du présent mémoire. L. G. D.

Donc, la derniere distribution sera

$$\frac{1}{20}\Big(C+(21-n)x-\frac{1}{2}(n-1)(42-n)z\Big)$$
$$=\frac{1}{20}\Big(C+(21-n)\frac{3C}{2n}-\frac{1}{2}(n-1)(42-n)\frac{C}{n(n-1)}\Big)$$
$$=\frac{C}{40n}\Big(2n+(21-n)3-(42-n)\Big)=\frac{21C}{40n}.$$

5. Il suffit de calculer cette somme à distribuer de 5 à 5 ans, où, si l'on joint le terme qui répondroit à 0 ans, ces sommes formeront cette progression:

0 ans	5 ans	10 ans	15 ans
$\frac{1}{20}(C+21x+21z)$,	$\frac{1}{20}(C+16x-74z)$,	$\frac{1}{20}(C+11x-144z)$,	$\frac{1}{20}(C+6x-189z)$;

différences I:

$$\frac{1}{4}(x+19z) \qquad \frac{1}{4}(x+14z) \qquad \frac{1}{4}(x+9z) \qquad \frac{1}{4}(x+4z)$$

différences II:

$$\frac{5}{4}z \qquad \frac{5}{4}z \qquad \frac{5}{4}z$$

où [1])

$$C=80(m), \quad n=100-m,$$
$$x=\frac{3C}{2n} \quad \text{et} \quad z=\frac{C}{n(n-1)}.$$

---

1) Sur le manuscrit se trouvent à cet endroit les formules suivantes, qui se rapportent à la note 1 p. 555: *ou bien* .

$$C=80(m), \quad n=100-m, \quad x=\frac{4C}{3n}, \quad z=\frac{2C}{3n(n-1)}.$$

L. G. D.

6. Pour l'âge de 10 ans, on[1]) a

$$(m) = 639,$$

$$C = 51\,120 \quad \text{et} \quad n = 100 - m = 90,$$

donc

$$x = \frac{3\,C}{2\,n} = 852$$

et

$$z = \frac{C}{n\,(n-1)} = 6{,}382$$

$$\underline{\phantom{\text{différence II}}\quad 1{,}595}$$

$$\text{différence II}^{\text{ieme}} \left[= \tfrac{5}{4} z = \right] \quad 7{,}977$$

[d'où l'on déduit la suite suivante des différences premieres, en partant de

$$-\tfrac{1}{4}(x + 19z) = -243{,}315]$$

7,977	7,977	7,977	7,977
— 243,315	— 203,430	— 163,545	— 123,660
— 235,338	— 195,453	— 155,568	— 115,683
— 227,361	— 187,476	— 147,591	— 107,706
— 219,384	— 179,499	— 139,614	— 99,729
— 211,407	— 171,522	— 131,637	

7. [Après 0 années, la somme à distribuer aux rentiers est

$$\frac{1}{20}(C + 21x + 21z) = \frac{1}{20}(51120 + 21 \cdot 858{,}382) = 3457{,}301\,,$$

d'où l'on déduit le tableau suivant]

1) Voir la note 1 p. 103 et la table p. 106—107. L. G. D.

[Après années]	[Somme à distribuer]	[Nombre des survivants]	Pro Cento	[Après années]	[Somme à distribuer]	[Nombre des survivants]	Pro Cento
0	3457,301 243,315	639	5,41	50	1377,116 163,545	273	5,04
5	3213,986 235,338	611	5,26	55	1213,571 155,568	225	5,39
10	2978,648 227,361	584	5,10	60	1058,003 147,591	175	6,04
15	2751,287 219,384	552	4,98	65	910,412 139,614	125	7,28
20	2531,903 211,407	507	4,99	70	770,798 131,637	72	10,70
25	2320,496 203,430	468	4,96	75	639,161 123,670	32	19,97
30	2117,066 195,453	432	4,90	80	515,501 115,683	8	64,47
35	1921,613 187,476	400	4,80	85	399,818 107,706	3	133,27
40	1734,137 179,499	362	4,79	90	292,112	1	292,11
45	1554,638 171,522	319	4,87				
50	1377,116						

8.[1]

$$x = \left[\frac{4C}{3n} =\right] \frac{8}{9} \cdot 852 = 757\frac{1}{3}$$

$$z = \left[\frac{2C}{3n(n-1)} =\right] \frac{2}{3} \cdot 6{,}382 = 4{,}255$$

$$\begin{array}{rr} 2{,}127 & \underline{1{,}064} \end{array}$$

$$\left[\text{Différences deuxièmes} = \frac{5}{4} z =\right] 5{,}319$$

1) Sur le manuscrit d'Euler se trouvent à cet endroit des chiffres qui se rapportent au cas déjà deux fois mentionné dans les notes 1 p. 555 et 1 p. 556. Nous reproduisons ici l'essentiel de ces calculs et développements, en les disposant dans un ordre logique. La théorie en est esquissée au § 9. L. G. D.

$$\text{différences premieres } \left[= \frac{1}{4}(x + 19z)\right] = \frac{209{,}544}{204{,}225}$$

$$\left[\text{Somme à distribuer } = \frac{1}{20}(C + 21x + 21z) = \right]$$

$$\frac{1}{20}(51120 + 21 \cdot 761{,}588) = 2556 + 799{,}667 = 3355{,}667$$

[Après années]	[Somme à distribuer]	[Nombre des survivants]	[Pour cent]
0	3355,667 209,544	639	5,25
5	3146,122 204,225	611	5,15
10	2941,897	584	5,04
etc.	etc.	etc.	etc.

9. Capital $= C$; post n annos ad 0 redigendi[1])

		Dim[inutio]
post annos	1	x
	2	$x - z$
	3	$x - 2z$
	. . . . . .	. . . .
	n	$x - (n-1)z$

$$\text{tota} = nx - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z = C.$$

1) Le manuscrit porte ici un peu pêle-mêle avec d'autres chiffres:

Pour l'âge de 10 *ans*, $C = 51120$, $n = 90$, $x = 7573$, $z = 42$.

Puis vient une série de calculs et le commencement d'un tableau analogue à celui du § 16. Nous ne reproduisons pas ces chiffres, parcequ'ils sont faussés par suite d'une erreur d'ailleurs assez curieuse. En calculant

$$x = \frac{4C}{3n} = 4 \cdot 51120 : 270 = 757{,}3$$

Euler a omis la virgule, écrivant 7573 au lieu de 757,3; ce qui entraîna $z = 42$ au lieu de

Sit

$$x-(n-1)z=\frac{1}{2}x,\quad (n-1)z=\frac{1}{2}x.$$

Erit

$$nx-\frac{n}{4}x=C=\frac{3nx}{4},$$

$$x=\frac{4C}{3n},$$

$$\frac{n(n-1)}{2}z=nx-C=\frac{1}{3}C,$$

$$z=\frac{2C}{3n(n-1)}.$$

[Après années]	Dimin[ution]	Capital	Intérêt
0		C	
1	$\frac{4C}{3n}$	$C-\frac{4C}{3n}$	$\frac{C}{20}$
2	$\frac{4C}{3n}-\frac{2C}{3n(n-1)}$	$C-\frac{8C}{3n}+\frac{2C}{3n(n-1)}$	$\frac{C}{20}-\frac{4C}{60n}$
3	$\frac{4C}{3n}-\frac{4C}{3n(n-1)}$	$C-\frac{12C}{3n}+\frac{6C}{3n(n-1)}$	$\frac{C}{20}-\frac{8C}{60n}+\frac{2C}{60n(n-1)}$
4	$\frac{4C}{3n}-\frac{6C}{3n(n-1)}$	$C-\frac{16C}{3n}+\frac{12C}{3n(n-1)}$	$\frac{C}{20}-\frac{12C}{60n}+\frac{6C}{60n(n-1)}$

[Après années]	[Somme à] distrib[uer]
1	$\frac{4C}{3n}+\frac{C}{20}$
2	$\frac{4C}{3n}-\frac{2C}{3n(n-1)}+\frac{C}{20}-\frac{4C}{60n}$
3	$\frac{4C}{3n}-\frac{4C}{3n(n-1)}+\frac{C}{20}-\frac{8C}{60n}+\frac{2C}{60n(n-1)}$

$z=4{,}2$ et faussa tous les chiffres subséquents du tableau. Après en avoir calculé les cinq premières lignes, EULER, sans doute à cause de l'invraisemblance des résultats, s'est aperçu de l'erreur commise, a biffé le 3 du x et le 2 du z, puis a ébauché un nouveau tableau en prenant $x = 757$ et $z = 4$.

Voir aussi la note 1 p. 558 et le § 8 de ce mémoire. L. G. D.

10. On peut faire en sorte que les rentes croissent dans une progression géométrique: à l'âge de m ans, soit $[m]$ la rente à la premiere année[1]) et

$$\nu [m], \quad \nu^2 [m], \quad \nu^3 [m] \quad \text{etc.}$$

pour les années suivantes; soit $\frac{20}{21} = \lambda$, et nous aurons [v. § 3]

$$\begin{aligned}
80(m) \quad &= \quad \lambda [m] \big((m+1) + \lambda\nu (m+2) + \lambda^2\nu^2(m+3) + \lambda^3\nu^3(m+4) + \cdots\big)\\
80(m+1) &= \lambda [m+1] \big(\qquad\qquad\quad (m+2) + \lambda\nu \;\; (m+3) + \lambda^2\nu^2(m+4) + \cdots\big)
\end{aligned}$$

$$\frac{80(m)}{\lambda [m]} - \frac{80(m+1)}{\lambda [m+1]} \lambda\nu = (m+1).$$

On en tire

$$[m] = \frac{80(m)[m+1]}{\lambda (m+1)(80\nu + [m+1])} = \frac{80(m)[m+1]}{(m+1)(80\lambda\nu + \lambda [m+1])}.$$

11. Soit $\nu = \frac{21}{20}$, d'où $80\nu = 84$ [et] $\lambda\nu = 1$. Alors[2])

$$[m] = \frac{80(m)[m+1]}{(m+1)(80 + \lambda [m+1])}$$

$$= \frac{84(m)}{(m+1) + 84\,\dfrac{(m+1)}{[m+1]}}$$

[d'où

$$\frac{84(m)}{[m]} = (m+1) + 84\,\frac{(m+1)}{[m+1]}.$$

1) Par suite de cette notation EULÉRIENNE, les crochets [ ] ont dans les paragraphes 10 à 15 de ce mémoire deux significations très différentes. Ils marquent, en effet, tantôt la valeur actuelle de certaines rentes viagères, tantôt un complément ajouté par l'éditeur au texte incomplet du brouillon manuscrit. L. G. D.

2) Dans le manuscrit d'EULER se trouvent à cet endroit quelques formules sans texte explicatif. On doit les lire comme suit:

[*Si l'on prenait*] $\nu^{100} = 100$ [*il viendrait*]

$$100\, l\nu = l\,100 = 4{,}60516 \quad [\textit{d'où}] \quad l\nu = 0{,}046$$

[*et*]

$$\begin{aligned}
\nu = e^{0{,}046} &= 1 + \frac{46}{1000} + \frac{1}{2}\,\frac{46^2}{1000^2} + \cdots\\
&= 1 + 0{,}046 + 0{,}001058 \cdots\\
&= 1{,}047.
\end{aligned}$$

L. G. D.

Dans cette formule, mettons successivement $m+1$, $m+2$, $m+3$ etc. au lieu de m. De la somme des équations ainsi obtenues

$$\begin{aligned}
\frac{84\,(m+1)}{[m+1]} &= (m+2) + 84\,\frac{(m+2)}{[m+2]}\\
\frac{84\,(m+2)}{[m+2]} &= (m+3) + 84\,\frac{(m+3)}{[m+3]}\\
\vdots\qquad &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\hline
84\,\frac{(m)}{[m]} &= (m+1)+(m+2)+(m+3)+\cdots
\end{aligned}$$

nous concluons]

$$[m] = \frac{84\,(m)}{(m+1)+(m+2)+(m+3)+\cdots}.$$

12. Soit l'âge $m = 90$; et

$$(m) = 8,\quad (m+1) = 6,\quad (m+2) = 3,\quad (m+3) = 2,$$
$$(m+4) = 1,\quad (m+5) = 0.\text{[1]}$$

[Comme $84 = 80\nu$ et que $(91)+(92)+(93)+(94)+\cdots = 12$, il vient]

$$[90] = \frac{80 \cdot 8 \cdot 21}{12 \cdot 20} = \frac{32 \cdot 21}{12} = 56.$$

Soit l'âge $m = 89$; et $(m) = (89) = 11$, d'où

$$[89] = \frac{84 \cdot 11}{(90)+(91)+(92)+\cdots} = \frac{84 \cdot 11}{20} = \frac{231}{5} = 46{,}2.$$

13. [Pour appliquer la dernière formule du § 11, on doit connaître la somme

$$(m+1)+(m+2)+(m+3)+\cdots$$

pour les divers âges m. On déduit de la table de mortalité de Kersseboom, reproduite p. 106—107 du présent volume, la table suivante.] [1])

1) Euler modifie ici, d'une manière arbitraire semble-t-il, la fin de la table de mortalité de Kersseboom. Au lieu des chiffres Kersseboomiens

$$(90) = 8,\ (91) = 6,\ (92) = 4,\ (93) = 3,\ (94) = 2,\ (95) = 1,$$

Euler prend ici

$$(90) = 8,\ (91) = 6,\ (92) = 3,\ (93) = 2,\ (94) = 1,\ (95) = 0.$$

L. G. D.

Age m [1]	Nombre des survivants (m)	$\sum(m+1)$	Age m	Nombre des survivants (m)	$\sum(m+1)$	Age m	Nombre des survivants (m)	$\sum(m+1)$
90	8	12	60	273	3714	30	507	15452
89	11	20	59	282	3987	29	516	15959
88	15	31	58	291	4269	28	525	16475
87	20	46	57	301	4560	27	535	17000
86	26	66	56	310	4861	26	544	17535
85	32	92	55	319	5171	25	552	18079
84	39	124	54	327	5490	24	559	18631
83	46	163	53	336	5817	23	565	19190
82	54	209	52	345	6153	22	571	19755
81	63	263	51	354	6498	21	577	20326
80	72	326	50	362	6852	20	584	20903
79	82	398	49	370	7214	19	590	21487
78	93	480	48	378	7584	18	596	22077
77	104	573	47	386	7962	17	601	22673
76	114	677	46	393	8348	16	606	23274
75	125	791	45	400	8741	15	611	23880
74	135	916	44	406	9141	14	616	24491
73	145	1051	43	413	9547	13	621	25107
72	155	1196	42	420	9960	12	627	25728
71	165	1351	41	426	10380	11	633	26355
70	175	1516	40	432	10806	10	639	26988
69	185	1691	39	439	11238	9	646	27627
68	195	1876	38	446	11677	8	653	28273
67	205	2071	37	454	12123	7	664	28926
66	215	2276	36	461	12577	6	676	29590
65	225	2491	35	468	13038	5	688	30266
64	235	2716	34	475	13506	4	709	30954
63	245	2951	33	482	13981	3	736	31663
62	254	3196	32	490	14463	2	768	32399
61	264	3450	31	499	14953	1	804	33167
60	273	3714	30	507	15452	0	1000	33971
								34971

1) Les colonnes de ce tableau n'ont pas de titres dans le manuscrit et n'y sont poussées que jusqu'à l'âge de 74 ans. Le feuillet où EULER a calculé les autres chiffres, de 73 à 0 ans, ne s'est pas retrouvé, mais ces nombres figurent par leurs logarithmes dans la table suivante. L. G. D.

[TABLE INDIQUANT LES RENTES CROISSANTES $[m]$
pour une mise unique de 100 *écus, suivant l'âge* m *du rentier.*

14. Ayant déjà trouvé (§ 12) que $[90] = 56$ et $[89] = 46{,}2$, on détermine les rentes suivantes en combinant la table ci-dessus avec la dernière formule du § 11. On obtient]

$$[88] = \frac{84 \cdot 15}{31} = \frac{1260}{31} = 40{,}64$$

$$[87] = \frac{84 \cdot 20}{46} = \frac{840}{23} = 36{,}52$$

$$[86] = \frac{84 \cdot 26}{66} = \frac{364}{11} = 33{,}09$$

$$[85] = \frac{84 \cdot 32}{92} = \frac{672}{23} = 29{,}22$$

$$[84] = \frac{84 \cdot 39}{124} = \frac{819}{31} = 26{,}42$$

$$[83] = \frac{84 \cdot 46}{163} = \frac{3864}{163} = 23{,}70$$

$$[82] = \frac{84 \cdot 54}{209} = \frac{4536}{209} = 21{,}70$$

$$[81] = \frac{84 \cdot 63}{263} = \frac{5292}{263} = 20{,}12$$

$$[80] = \frac{84 \cdot 72}{326} = \frac{3024}{163} = 18{,}55$$

$$[79] = \frac{84 \cdot 82}{398} = \frac{3444}{199} = 17{,}31$$

$$[78] = \frac{84 \cdot 93}{480} = \frac{1953}{120} = 16{,}27$$

$$[77] = \frac{84 \cdot 104}{573} = \frac{2912}{191} = 15{,}24$$

$$[76] = \frac{84 \cdot 114}{677} = \frac{9576}{677} = 14{,}14.$$

15. [Par les logarithmes, ces rentes croissantes se calculeront à l'aide de la formule

$$\begin{aligned}\log [m] &= \log 84 \quad + \log (m) - \log \textstyle\sum (m+1) \\ &= 1{,}92428 + \log (m) - \log \textstyle\sum (m+1)\end{aligned}$$

dont voici l'application pour des âges inférieurs à 80.]

2	3	4	5	6
1,92428	1,92428	1,92428	1,92428	1,92428
2,88536	2,86688	2,85064	2,83759	2,82995
4,80964	4,79116	4,77492	4,76187	4,75423
4,51056	4,50058	4,49075	4,48098	4,47117
0,29908	0,29058	0,28417	0,28089	0,28306
1,991	1,952	1,924	1,909	1,919

7	8	9	10	12 [1]
1,92428	1,92428	1,92428	1,92428	1,92428
2,82217	2,81491	2,81023	2,80550	2,79726
4,74645	4,73919	4,73451	4,72978	4,72154
4,46132	4,45137	4,44135	4,43119	4,41042
0,28513	0,28782	0,29316	0,29859	0,31112
1,928	1,940	1,964	1,988	2,047

[2] = 1,991	[16] = 2,187	[38] = 3,208	[60] = 6,174
[3] = 1,952	[18] = 2,267	[40] = 3,358	[62] = 6,676
[4] = 1,924	[20] = 2,346	[42] = 3,542	[64] = 7,268
[5] = 1,909	[22] = 2,428	[44] = 3,731	[66] = 7,935
[6] = 1,919	[24] = 2,520	[46] = 3,954	[68] = 8,731
[7] = 1,928	[26] = 2,606	[48] = 4,187	[70] = 9,696
[8] = 1,940	[28] = 2,677	[50] = 4,438	[72] = 10,886
[9] = 1,964	[30] = 2,756	[52] = 4,710	[74] = 12,380
[10] = 1,988	[32] = 2,846	[54] = 5,003	[76] = 14,144
[12] = 2,047	[34] = 2,954	[56] = 5,357	[78] = 16,275
[14] = 2,112	[36] = 3,079	[58] = 5,726	

16. A l'âge de 25 ans, 552 personnes mettent chacun 100 écus, ce qui fait 55200 écus, d'où l'on retranche d'abord la $\frac{1}{5}$ partie, 11040 écus, pour les besoins de la ville, et le reste, 44160 écus, est placé en fond à 5 pour cent, d'où la tontine doit être fournie. Puïsqu'on retire ici d'abord l'avantage qu'on attend de cette tontine, il seroit trop, si l'on vouloit encore profiter à la fin le fond tout entier. Et partant, je retire du capital outre les intérêts encore la 75$^{\text{me}}$ partie, pour éteindre le capital lorsque les interessans auront atteint 100 ans.

1) Sur le manuscrit, Euler a continué à aligner ainsi les chiffres pour tous les âges pairs: 14, 16, 18 et ainsi de suite jusqu'à 78. Nous ne reproduisons que le commencement de ces calculs numériques, cela d'autant plus que quelques fautes s'y sont glissées. En particulier, Euler prend comme nombre des survivants 407 (au lieu de 406) pour l'âge de 44 ans, et 654 (au lieu de 653) pour l'âge de 8 ans, et ces fautes se sont répercutées dans les chiffres de la colonne $\sum(m+1)$. Nous n'avons relevé dans le tableau suivant que les résultats rectifiés. L. G. D.

Soit donc cette diminution annuelle 580 écus[1]), et voyons de 5 à 5 ans combien on pourra payer à chaque rentier. [Le capital est diminué de $5 \cdot 580 =$] 2900 écus tous les cinq ans (colonne 2). [Aux rentiers survivants (colonne 5) on peut distribuer annuellement, outre les intérêts du capital disponible (colonne 3), encore la somme de 580 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit $580 + 29 =$] 609 (colonne 4). [On en déduit par division le montant de la rente qui revient à chacun (colonne 6).]

Après années	Capital C	Intérêts à 5 pour cent	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente de chacun	Rente réelle pour cent
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	44160	2208	2817	552	5,10	
5	41260	2063	2672	507	5,27	5,6
10	38360	1918	2527	468	5,40	5,10
15	35460	1773	2382	432	5,51	5,12
20	32560	1628	2237	400	5,59	5,14
25	29660	1483	2092	362	5,78	5,18
30	26760	1338	1947	319	6,10	6,0
35	23860	1193	1802	273	6,60	6,12
40	20960	1048	1657	225	7,36	7,8
45	18060	903	1512	175	8,64	8,12
50	15160	758	1367	125	10,94	10,12
55	12260	613	1222	72	16,97	16,12
60	9360	468	1077	32	33,66	32
65	6460	323	932	8	116,50	100
70	3560	178	787	4	196,75	150
75	660	33	642	1	642,00	500

17. Age 80 ans. [Nombre des personnes] 72. [Capital disponible $7200 - 1440 =$] $C = 5760$. [Durée $100 - 80 = 20$ ans, puisque l'âge limite des rentiers est supposé 100 ans]. Diminution [annuelle $5760 : 20 =$] 228, [en 5 ans] 1440.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 288 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit $288 + 14$ ou] 302. [Donc, de 5 à 5 ans, on aura:]

1) Il ressort des paragraphes subséquents et de la fin du mémoire que c'est à dessein que le chiffre de 588,80 (la 75ième partie de 44160) est arrondi à 580.

La numérotation des colonnes a été ajoutée par l'éditeur. Dans les tableaux suivants, les têtes de colonne sont souvent abrégées ou incomplètes sur le manuscrit d'EULER. L. G. D.

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	1440	302			
0	5760	288	590	72	8,4
5	4320	216	518	32	16,19
10	2880	144	446	8	55,7
15	1440	72	374	3 [1])	124
20	0	0	302	1 [1])	302

18. Age 70 ans. [Nombre des personnes] 175. [Capital disponible 17500 — 3500 =] $C = 14000$. [Durée 100 — 70 = 30 ans; v. § 16.] Diminution annuelle [14000 : 30 =] 466,66 [en 5 ans, en arrondissant,] 2330.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 466 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit 466 + 23 =] 489. [Donc, de 5 à 5 ans, on aura:]

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	2330	489			
0	14000	700	1189	175	6,79
5	11670	583,5	1072	125	8,57
10	9340	467	956	72	13,22
15	7010	350,5	839	32	26,22
20	4680	234	723	8	90
25	2350	117,5	606	4 [2])	151
30	20	1	490 [3])	1	490 [3])

1) Pour étendre jusqu'à 100 ans le terme de la vie humaine, EULER modifie également ici, ainsi que dans les tableaux suivants, la table de mortalité de KERSSEBOOM qu'il utilise généralement. Ces modifications ne sont pas toujours les mêmes et paraissent arbitraires. Voir la note 1 p. 562 et les notes 2 p. 574 et 1 p. 575. L. G. D.

2) Voir la note précédente. L. G. D.

3) Le manuscrit porte ici 489. L. G. D.

19. Age 60 ans. [Nombre des] personnes 273. Capital disponible $27300 - 5460 = 21840 = C$. [Durée $100 - 60 = 40$ ans, v. § 16. Diminution annuelle $21840 : 40 =$] 546, en 5 ans 2730.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 546 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit] $546 + 27$ [$= 573$ arrondie à] 570. [Donc, de 5 à 5 ans, on aura:]

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	2730	570	136		
0	21840	1092	1662	273	6,09
5	19110	955,5	1525	225	6,78
10	16380	819	1389	175	7,94
15	13650	682,5	1252	125	10,01
20	10920	546	1116	72	15,5
25	8190	409,5	979	32	30,6
30	5460	273	843	8	105
35	2730	136,5	706	4	176
40	0	0	569	1	560

20. Age 50 ans. [Nombre des] personnes 362; à 100 écus par sociétaire fait 36200. Le capital disponible $C\,[= 36200 - 7240] = 28960$. [Durée $100 - 50 = 50$ ans, v. § 16.] Dimin[ution annuelle $28960 : 50 =$] 579, en cinq ans [2895, arrondie à] 2890.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 579 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit $579 + 28{,}9 = 607{,}9$ ou, en arrondissant,] 600. [Donc, de 5 à 5 ans, on aura:]

Après ans	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	2890	600			
0	28960	1448	2048	362	5,66
5	26070	1303	1903	319	5,96
10	23180	1159	1759	273	6,44
15	20290	1014	1614	225	7,17
20	17400	870	1470	175	8,40
25	14510	725	1325	125	10,60
30	11620	581	1181	72	16,40
35	8730	436	1036	32	32,37
40	5840	292	892	8	111
45	2950	147	747	4	187
50	60	30	630 [1])	1	630 [1])

1) Le manuscrit porte 600. L. G. D.

21. Age 40 ans. [Nombre des] personnes 432; à 100 écus [par sociétaire] fait 43200. Retranchant la cinquième partie [soit 8640, il reste disponible] le fond $34560 = C$. Placé à 5 pour cent, [il rapporte en] intérêts 1728. [Durée $100 - 40 = 60$ ans v. § 16.] Diminution annuelle [$34560 : 60 =$] 576, en cinq ans 2880.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 576 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit] $576 + 28 = 604$. Donc, de 5 à 5 ans, on aura:

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente	Rente
	2880	604				
0	34560	1728	2332[1]	432[1]	5,40	
5	31680	1584	2188	400	5,47	5,8
10	28800	1440	2044	362	5,65	5,14
15	25920	1296	1900	319	5,95	5,20
20	23040	1152	1756	273	6,43	6,8
25	20160	1008	1612	225	7,16	7
30	17280	864	1468	175	8,39	8,6
35	14400	720	1324	125	10,59	10,8
40	11520	576	1180	72	16,39	16,6
45	8640	432	1036	32	32,38	32
50	5760	288	892	8	111	100
55	2880	144	748	4	187	150
60	0	0	604	1	604	500

1) Le manuscrit porte ici le calcul intermédiaire suivant:

$$\begin{array}{r|r|l} & 1728 & \\ & 576 & \\ \hline 426 & 2304 & 5,40 \\ & 2130 & \\ \hline & 174\ 0 & \end{array}$$

Comme dans le tableau du § 22, Euler prélève donc ici, en plus des intérêts du capital, la somme de 576 sans l'augmenter de ses intérêts. Au lieu de 2332, il distribue ainsi 2304 et répartit cette somme non pas entre les 432 personnes qui entrent dans la société ($432 = l_{40}$), mais entre les 426 survivants au bout d'une année ($426 = l_{41}$). L. G. D.

22. Age 35 ans. [Nombre des personnes] 468. [Capital disponible $468 \cdot 80 =$] $C = 37440$. [Durée $100 - 35 = 65$ ans, v. § 16. Diminution annuelle $37440 : 65 =$] 576 écus. [D'où le tableau suivant.] [1])

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	576	576	29		
1	37440	1872	2448	461	5,31
2	36864	1843	2419	454	5,33
3	36288	1814	2390	446	5,36
4	35712	1785	2361	439	5,37
5	$5 \cdot 29 = 145$		2332	432	5,39
....	....	....	....	....	....
			145		
10			2187	400	5,47
15			2042	362	5,64
20			1897	319	5,94
25			1752	273	6,41
30			1607	225	7,14
35			1462	175	8,35
40			1317	125	10,54
45			1172	72	16,28
50			1027	32	32
55			882 [2])	8	110
60			737	3	246
65			592	1	592

1) La méthode suivie par EULER pour la construction de ce tableau diffère par deux points de celle employée pour les précédents. 1°. En plus de l'intérêt du capital disponible C, on distribue encore chaque année aux survivants la $65^{\text{ième}}$ partie du capital initial (soit 576 écus), et non pas cette partie augmentée de ses intérêts (ce qui ferait $576 + 28{,}8$ ou 604 écus). 2°. Ayant remarqué que la différence constante dans la colonne (4) est de 29, EULER la multiplie par 5 et peut ainsi calculer directement les nombres de cette colonne (4), à partir de la cinquième année, sans recourir aux colonnes (2) et (3). Les numéros de colonne (1), (2), ... (6) ont été ajoutés par l'éditeur.
L. G. D.

2) Le manuscrit porte ici 872, et cette erreur se répercute dans les chiffres suivants ainsi que dans ceux de la colonne (6). Nous avons fait les modifications nécessaires. L. G. D.

23. Age 20 ans. [Nombre des] personnes 584; à 100 [écus par sociétaire] fait 58 400. Capital disponible C [= 58 400 — 11 680] = 46 720. [Durée 100 — 20 = 80 ans, v. § 16.] Dimin[ution] ann[uelle 46 720 : 80 =] 584, en cinq ans 2920.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 584 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit] 584 + 29 [= 613, arrondie à] 610. [Donc, de 5 à 5 ans, on aura:]

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	2920	610	146		
0	46 720	2336	2946	584	5,04
5	43 800	2190	2800	552	5,07
10	40 880	2044	2654	507	5,23
15	37 960	1898	2508	468	5,36
20	35 040	1752	2362	432	5,46
25	32 120	1606	2216	400	5,54
30	29 200	1460	2070	362	5,72
35	26 280	1314	1924	319	6,03
40	23 360	1168	1778	273	6,51
45	20 440	1022	1632	225	7,25
50	17 520	876	1486	175	8,49
55	14 600	730	1340	125	10,72
60	11 680	584	1194	72	16,58
65	8 760	438	1048	32	32,75
70	5 840	292	902	8	112
75	2 920	146	756	4	189
80	0	0	610	1	610

24. Age 10 ans. [Nombre des] personnes 639; à 100 [écus par sociétaire] fait 63 900 écus. Capital [disponible] $C = [63\,900 - 12\,780 =]\ 51120$. [Durée $100 - 10 = 90$ ans, v. § 16.] Dim[inution] ann[uelle $51\,120 : 90 =$] 568; dim[inution] de cinq ans 2840.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 568 écus augmentée de ses intérêts annuels, soit] $568 + 28$ [$= 596$, arrondie à] 590. [Donc, de 5 à 5 ans, on aura:]

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	2 840	590	142		
0	51 120	2556	3146	639	4,92
5	48 280	2414	3004	611	4,92
10	45 440	2272	2862	584	4,90
15	42 600	2130	2720	552	4,93
20	39 760	1988	2578	507	5,08
25	36 920	1846	2436	468	5,20
30	34 080	1704	2294	432	5,31
35	31 240	1562	2152	400	5,38
40	28 400	1420	2010	362	5,55
45	25 560	1278	1868	319	5,85
50	22 720	1136	1726	273	6,32
55	19 880	994	1584	225	7,04
60	17 040	852	1442	175	8,24
65	14 200	710	1300	125	10,40
70	11 360	568	1158	72	16,08
75	8 520	426	1016	32	31,75
80	5 680	284	874	8	109
85	2 840	142	732	4	183
90	0	0	590	1	590

25. Age 5 ans. [Nombre des personnes] 690. Capital disponible C $[= 69\,300 - 13\,800] = 55\,200$. [Durée $100 - 5 = 95$ ans, v. § 16.] Dim[inution] ann[uelle $55\,200 : 95 =$] 581; en cinq ans [2905, arrondie à] 2900.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 581 écus augmentée de ses intérêts à 5 pour cent, soit] $581 + 29 = 610$. [Donc, de 5 en 5 ans, on aura:] [1])

Après ans	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente
	2900	610	145		
0	55200	2760	3370	690 [2])	4,88
5	52300	2615	3225	639	5,04
10	49400	2470	3080	611	5,04
15	46500	2325	2935	584	5,02
20	43600	2180	2790	552	5,05
25	40700	2035	2645	507	5,21
30	37800	1890	2500	468	5,34
35	34900	1745	2355	432	5,45
40	32000	1600	2210	400	5,52
45	29100	1455	2065	362	5,70
50	26200	1310	1920	319	6,02
55	23300	1165	1775	273	6,50
60	20400	1020	1630	225	7,24
65			1485	175	8,49
70			1340	125	10,72
75			1195	72	16,60
80			1050	32	32,81
85			905	8	113
90			760	4	190
95			615	1	615

1) Dans le manuscrit, les calculs ne sont poussés que jusqu'à 65 ans. Nous avons complété le tableau par la méthode des différences. Voir la note 1 p. 571. L. G. D.

2) Au lieu de 688. Voir la note 1 p. 567. L. G. D.

26. Age 0 ans. [Nombre des] personnes 1200.[1]) Capital disponible C [$= 120000 - 24000$] $= 96000$. [Durée 100 ans, v. § 16.] Dim[inution] ann[uelle] $= 960$, [en cinq ans] 4800.

[En plus des intérêts du capital C, on pourra donc distribuer annuellement aux rentiers survivants la somme de 960 écus augmentée de ses intérêts d'un an, soit] $960 + 48$ [$= 1008$ écus, arrondie à] 1000. [Donc, de 5 en 5 ans, on aura:]

Après années	Capital C	Intérêts	Somme à distribuer	Nombre des survivants	Rente[2])
	4800	1000	240		
0	96000	4800	5800	1200[1])	4,83
5	91200	4560	5560	690[1])	8,07*
10	86400	4320	5320	639	8,33
15	81600	4080	5080	611	8,31
20	76800	3840	4840	584	8,29
25	72000	3600	4600	552	8,33
30	67200	3360	4360	507	8,6
35	62400	3120	4120	468	8,80*
40	57600	2880	3880	432	8,98*
45	52800	2640	3640	400	9,10
50			3400	362	9,39*
55			3160	319	9,91*
60			2920	273	10,70*
65			2680	225	11,91
70			2440	175	13,94
75			2200	125	17,60
80			1960	72	27,33
85			1720	32	53,75*
90			1480	8	185 *
95			1240	4	310 *
100			1000	1	1000

1) Il est curieux qu'EULER n'ait pas pris 1000 et 688, comme dans ses autres travaux. Voir la note 1 p. 567. L. G. D.

2) Les chiffres de cette colonne marqués d'un astérisque sont dans le manuscrit: 7,94; 8,7; 8,9; 9,4; 10; 11,5; 53; 182; 400. L. G. D.

TABLE

combien pro cento on payera aux tontiniers de chaque âge, de 5 à 5 ans, depuis le commencement.[1])

Depuis	âge 0	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans	25 ans	30 ans	35 ans	40 ans	45 ans	50 ans	55 ans	60 ans	65 ans	70 ans	75 ans	80 ans
1 à 5	$7\frac{1}{2}$	5	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{3}{4}$	5	5	5	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{2}$	6	$6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	7	8	10
6 à 10	8	5	$4\frac{3}{4}$	5	5	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{3}$	$6\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{4}$	10	15
11 à 15	$8\frac{1}{4}$	5	$4\frac{3}{4}$	5	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$	7	$7\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{2}$	10	18	40
16 à 20	$8\frac{1}{4}$	5	$4\frac{3}{4}$	5	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$	7	8	9	12	20	50	80
21 à 25	$8\frac{1}{4}$	5	5	5	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$	7	8	10	14	22	75	90	240
26 à 30	$8\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{4}$	5	5	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	6	$6\frac{1}{4}$	7	8	10	$14\frac{1}{2}$	24	72	100	300	
31 à 35	$8\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	6	$6\frac{1}{4}$	7	8	10	15	$24\frac{1}{2}$	70	110	400		
36 à 40	$8\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{2}$	6	$6\frac{1}{2}$	7	8	10	15	25	72	120	450			
41 à 45	$8\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	8	10	15	25	75	122	480				
46 à 50	9	$5\frac{3}{4}$	$5\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{3}$	7	$8\frac{1}{3}$	10	15	25	75	125	490					
51 à 55	$9\frac{1}{2}$	6	$6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	8	$10\frac{1}{2}$	15	25	75	125	500						
56 à 60	$9\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{2}$	7	8	10	15	25	75	125	500							
61 à 65	$10\frac{3}{4}$	7	8	10	15	25	75	125	500								
66 à 70	$11\frac{3}{4}$	8	10	15	25	75	125	500									
71 à 75	$13\frac{1}{2}$	10	15	25	75	125	500										
76 à 80	16	15	25	75	125	500											
81 à 85	20	25	75	125	500												
86 à 90	40	70	125	500													
91 à 95	100	125	500														
96 à 100	400	500															

1) Cette table reproduit les chiffres du manuscrit. EULER y résume les nombres des tableaux précédents (§ 16—26) et d'autres dont on n'a pas retrouvé le manuscrit. Toutefois, il arrondit ces nombres dans un sens favorable à la Caisse, mais sans indiquer d'après quelles normes. L. G. D.

27. Dans cet arrangement, rien n'est donc incertain, et ce qui l'est par sa nature, j'en ai tenu compte dans le calcul, que l'entrepreneur n'en risque rien et qu'il lui doit toujours rester un plus grand profit que suivant l'hypothese sur laquelle le calcul est fondé.

Cette tontine semble avoir plusieurs avantages sur les ordinaires, quoique ceux qui arrivent à la dernière vieillesse ne soient pas ici si bien partagés; mais pour les âges médiocres, les rentes sont ici plus considérables.

Peut-être le projet deviendrait encore plus du goût du public, si l'on diminuoit les rentes des vieillards à l'avantage de l'âge médiocre. La classe de l'âge de 10 ans semble exiger un tel changement, attendu qu'aux premieres années, on n'est pas ici en état d'accorder 5 pour 100.

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS 6 ET 7 CONTINENTUR

Date Due

Demco 293-5			